Věta Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ různá vlastní čísla operátoru $\varphi : U \to U$ a $u_1, u_2, \dots u_k$ odpovídající vlastní vektory, pak jsou $u_1, u_2, \dots u_k$ lineárně nezávislé.

Důkaz indukcí $k = 1$, $u_1 \neq \vec{0}$, u_1 je LN.

Nechť tvrzení platí pro k, dokážeme to pro $k+1$.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ různá vl. čísla s vl. vektory $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}$.

Nechť
$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_{k+1} u_{k+1} = \vec{0} \qquad (1)$$

aplikujme φ
$$a_1 \varphi(u_1) + a_2 \varphi(u_2) + \dots + a_{k+1} \varphi(u_{k+1}) = \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$$
$$a_1 \lambda_1 u_1 + a_2 \lambda_2 u_2 + \dots + a_{k+1} \lambda_{k+1} u_{k+1} = \vec{0} \qquad (2)$$

Od rovnice (2) odečteme λ_{k+1} – násobek rovnice (1). Dostaneme

$$a_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})u_1 + a_2(\lambda_2-\lambda_{k+1})u_2 + \dots + a_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})u_k = \vec{o}$$

Podle ind. předpokladu jsou $u_1, u_2, \dots, u_k$ lin. nezávislé, tedy

$$\underbrace{a_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})}_{\neq 0}=0 \quad \underbrace{a_2(\lambda_2-\lambda_{k+1})}_{\neq 0}=0 \quad \dots \quad \underbrace{a_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})}_{\neq 0}=0$$

Proto $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$. Dosazením do (1) dostaneme

$$a_{k+1}u_{k+1} = \vec{o}$$

Protože $u_{k+1} \neq \vec{o}$, je $a_{k+1} = 0$. Proto jsou $u_1, u_2, \dots, u_{k+1}$ lin. nezávislé.

Věta Nechť $\dim U = n$. Nechť $\varphi : U \to U$ je lin. operátor, který má n různých vlastních čísel. Pak v U existuje báze tvořená vlastními vektory a v takové bázi α je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ jsou příslušná vlastní čísla.

Důkaz: Vlastní vektory k $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ jsou podle předchozí věty lin. nezávislé. Protože je jich $n = \dim U$, tvoří bázi $\alpha = (u_1, \dots u_n)$. Protože $\varphi(u_i) = \lambda_i u_i$ je

$$(\varphi)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}.$$

Násobnost kořene polynomu p

λ_0 je kořen polynomu p násobnosti k, jestliže

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \, q(\lambda),$$

kde $q(\lambda_0) \neq 0$.

Algebraická násobnost vlastního čísla λ_0 operátoru φ je násobnost λ_0 jako kořene char. polynomu

$$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) = \pm \lambda^n + \dots\dots$$

Geometrická násobnost vlastního čísla λ_0 je

$$\dim \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_0 \mathrm{id})$$ (dimenze vlastního podprostoru)

Je-li u vlastní vektor, pak $\varphi(u) = \lambda_0 u$

$$(\varphi - \lambda_0 \mathrm{id})u = \vec{o} \implies u \in \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_0 \mathrm{id})$$

Věta Algebraická násobnost vl. čísla $\geq$ geometrická násobnost.

Příklady

1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

char. polynom je $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$

2 je vl. číslo alg. násobnosti 3

$\varphi - 2\,\mathrm{id} = 0 \qquad \mathrm{Ker}(\varphi - 2\,\mathrm{id}) = \mathbb{R}^3$

2 je vl. číslo geom. násobnosti 3

2) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

char. polynom je $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$

2 je vl. číslo alg. násobnosti 3

$\operatorname{Ker}(\varphi - 2\,id) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 ;\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = [e_2, e_3]$

2 je vl. číslo geom. násobnosti 2

3) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} x$

char. polynom je $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$

2 je vl. číslo alg. násobnosti 3

$\operatorname{Ker}(\varphi - 2\,id) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 ;\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = [e_3]$

Geom. násobnost vl. čísla 2 je 1.

<u>Důkaz věty</u> Nechť λ_0 je vl. číslo geom. násobnosti k. Dokážeme, že jeho alg. násobnost je $\geq k$.
Nechť $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou vl. vektory, které tvoří bázi $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0\, \mathrm{id})$. Doplníme je na bázi $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ celého prostoru U, na kterém operuje $\varphi : U \to U$.
V této bázi α má φ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & * \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\hphantom{\lambda_0\ 0\ \cdots\ \lambda_0}}_{k} & \underbrace{\hphantom{*\ *}}_{n-k} \end{array} \end{array}$$

Pomocí této matice spočítáme char. polynom

$$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) = \det\left(\begin{array}{cccc|ccc} \lambda_0-\lambda & & & 0 & & & \\ & \lambda_0-\lambda & & & & \text{něco} & \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & & & \lambda_0-\lambda & & & \\ \hline & & & & *-\lambda & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & \text{něco} & & *-\lambda \end{array}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda_0-\lambda & & & 0 \\ & \lambda_0-\lambda & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_0-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det\underbrace{\begin{pmatrix} *-\lambda & & \text{něco} \\ & *-\lambda & \\ \text{něco} & & *-\lambda \end{pmatrix}}_{n-k}\Big\} {\scriptstyle n-k}$$

$$= (\lambda_0-\lambda)^k \, q(\lambda) \implies \text{alg. násobnost } \lambda_0 \text{ je alespoň } k$$

UNITÁRNÍ A ORTOGONÁLNÍ OPERÁTORY

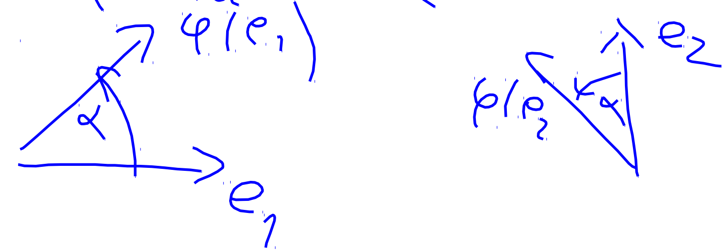
Pracujeme v prostorech se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Operátor $\varphi: U \to U$ nad $\mathbb{C}$ se nazývá UNITÁRNÍ, jestliže
$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$
pro všechna $u, v \in U$.

Operátor $\varphi: U \to U$ nad $\mathbb{R}$ se stejnou vlastností se nazývá ORTOGONÁLNÍ.

Příklad: Otočení v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku o úhel α

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



$$\varphi(x) = Ax$$

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = (Ax)^T \cdot (Ay) = x^T A^T A \cdot y = x^T E y = x^T y = \langle x, y \rangle$$

matice

$$A^T A = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha & 0\\ 0 & \cos^2\alpha+\sin^2\alpha\end{pmatrix} = E$$

Zobecnění příkladu

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad \varphi(x) = Ax$, kde A je matice s vlastností $A^T A = E$, je φ ortogonální operátor. Zdůvodnění stejné jako v předchozím.

Vlastnosti ortogonálních a unitárních operátorů

1. $\forall u \in U \quad \|\varphi(u)\| = \|u\|$ — je to nejen podmínka nutná, ale také postačující

2. $\forall u, v \in U \setminus \{o\}$ platí, že $\measuredangle(u,v) = \measuredangle(\varphi(u),\varphi(v))$

Dk: $\|\varphi(u)\|^2 = \langle \varphi(u), \varphi(u)\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|^2$

$$\cos(\measuredangle\, \varphi(u), \varphi(v)) = \frac{\langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle}{\|\varphi(u)\|\,\|\varphi(v)\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = \cos(\measuredangle\, u, v).$$

3. φ zobrazuje ortonormální bázi na ortonormální bázi

Dk: $u_1, u_2, \dots, u_n$ je orton. báze, jestliže $\langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j\end{cases}$

Pak $\quad \langle \varphi(u_i), \varphi(u_j)\rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j\end{cases}$

Jak vypadají unitární zobrazení z $\mathbb{C}^n$ do $\mathbb{C}^n$?

$$\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \qquad \varphi(x) = Ax$$

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$(Ax)^T \, \overline{(Ay)} = x^T \, \overline{y}$$

$$x^T A^T \overline{A} \, \overline{y} = x^T E \, \overline{y}$$ pro všechna $x, y \in \mathbb{C}^n$

Odtud plyne, že

$$A^T \overline{A} = E$$ aplikujeme $\overline{}$

$$\overline{A}^T A = E$$

Matice $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{C})$ se nazývá unitární, jestliže

$$\bar{A}^T A = E$$

Tyto matice určují unitární operátory na $\mathbb{C}^n$.

Tento vztah je ekvivalentní tomu, že

$$A^{-1} = \bar{A}^T$$

$$\bar{A}^T \cdot A$$

$$\begin{matrix} \overline{s_1}(A) \\ \overline{s_2}(A) \\ \\ \overline{s_n}(A) \end{matrix} \quad s_1(A) \; s_2(A) \dots s_n(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sloupce mají jedn. velikost a jsou navzájem kolmé

Toto znamená, že $\langle s_i(A), s_i(A) \rangle = 1$
$\langle s_i(A), s_j(A) \rangle = 0$ $\Longrightarrow$ sloupce matice A tvoří ortonorm. bázi v $\mathbb{C}^n$.

Jak vypadají ortogonální operátory v $\mathbb{R}^n$?

Odpověď je analogická, jsou to operátory

$$\varphi(x) = Ax, \text{ kde } A^T A = E.$$

Matice $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ s vlastností

$$A^T A = E \quad (\Leftrightarrow A^{-1} = A^T)$$

se nazývá ortogonální.

Tvrzení Je-li $\varphi : U \to U$ ortogonální (unitární) a $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$ je ortonormální báze, pak

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

je ortogonální (unitární).

Důkaz nad $\mathbb{R}$

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

$$(\varphi(u))_\alpha^T \cdot (\varphi(v))_\alpha = (u)_\alpha^T \cdot (v)_\alpha$$

$$\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (u)_\alpha\right)^T \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} (v)_\alpha = (u)_\alpha^T (v)_\alpha$$

$$\forall u, v \in U: \quad (u)_\alpha^T \underbrace{(\varphi)_{\alpha,\alpha}^T \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha}}_{=E} (v)_\alpha = (u)_\alpha^T (v)_\alpha$$

$\Rightarrow$

Tedy $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je ortogonální matice.

Lemma Determinant ortogonální matice je ± 1, determinant unitární matice má absolutní hodnotu 1.

Důkaz: nad $\mathbb{C}$

$$\overline{A}^T \cdot A = E$$

$$\det(\overline{A}^T \cdot A) = \det E = 1$$

$$\det \overline{A}^T \cdot \det A = 1 \implies \overline{(\det A)} \cdot \det A = 1$$

$$|\det A|^2 = 1$$

$z \in \mathbb{C}$ $\quad \bar{z} \cdot z = |z|^2$ neboť $z = a+ib$, $\bar{z} = a-ib$

$\bar{z} \cdot z = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Vlastní čísla a vlastní vektory ortog. a unitárních operátorů

(1) Vlastní čísla mají abs. hodnotu 1.

(2) Vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou navzájem kolmé.

Důkaz nad $\mathbb{C}$:

(1) Nechť $\varphi(u) = \lambda u$.

$$0 \neq \langle u,u \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle = \langle \lambda u, \lambda u \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle u,u \rangle = |\lambda|^2 \underbrace{\langle u,u \rangle}_{\neq 0}$$

Tedy $1 = |\lambda|^2$.

(2) Nechť λ, μ jsou dvě různá vlastní čísla. Připomeňme, že mají abs. hodnotu 1, proto $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$, $\mu^{-1} = \bar{\mu}$

Nechť $\varphi(u) = \lambda u$, $\varphi(v) = \mu v$ $\quad \lambda \neq \mu$

$$\langle u, v\rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle = \langle \lambda u, \mu v\rangle = \lambda \bar{\mu} \langle u, v\rangle$$
$$= \lambda \mu^{-1} \langle u, v\rangle$$

$$\underbrace{(1 - \lambda \mu^{-1})}_{\neq 0} \langle u, v\rangle = 0 \qquad \lambda\mu^{-1} \neq 1$$

Pak $\langle u, v\rangle = 0$.

VĚTA O UNITÁRNÍCH OPERÁTORECH

Pro ortogonální neplatí!

Nechť $\varphi : U \to U$ je unitární operátor. Pak v U existuje ortonormální báze α tvořená vlastními vektory. V této bázi

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ jsou vl. čísla.

(17)

<u>Důkaz</u>: Indukcí podle $\dim_{\mathbb{C}} U$.

Pro $\dim U = 1$ věta platí neboť $\varphi(u) = \lambda u$.

Nechť věta platí pro dimenze $\leq n-1$, $n \geq 2$.

Nechť $\dim U = n$, $\varphi: U \to U$ unitární.

Char. polynom operátoru φ je stupně n a podle základní věty algebry má kořen v $\mathbb{C}$. Označme jej λ_1, to musí být vlastní číslo operátoru φ a nechť u_1 je nějaký vlastní vektor velikosti 1 k vl. číslu λ_1.

$$\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1, \quad \|u_1\| = 1.$$

Ukážeme, že $[u_1]^\perp$ je invariantní podprostor vůči φ.

Nechť $v \in [u_1]^\perp$. Pak platí $\langle v, u_1 \rangle = 0$.

$$0 = \langle v, u_1 \rangle = \langle \varphi(v), \varphi(u_1) \rangle = \langle \varphi(v), \lambda_1 u_1 \rangle = \overset{0\neq}{\bar{\lambda}_1} \langle \varphi(v), u_1 \rangle$$

Odtud plyne $\langle \varphi(v), u_1 \rangle = 0$, tedy $\varphi(v) \in [u_1]^\perp$.

Platí: $\dim [u_1]^\perp = n-1$

a $\varphi / [u_1]^\perp : [u_1]^\perp \longrightarrow [u_1]^\perp$

je unitární. Podle ind. předpokladu v prostoru $[u_1]^\perp$ existuje ortonormální báze tvořená vl. vektory operátoru $\varphi / [u_1]^\perp$, ta je $u_2, u_3, \dots u_n$. Tedy $(u_1, u_2, \dots u_n) = \alpha$ je ortonormální báze tvořená vl. vektory operátoru φ a platí

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ortogonální operátory v dimenzi 2

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(x) = Ax$ $\quad A$ má dva sloupce velikosti 1 navzájem kolmé

Máme 2 možnosti

1. $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $\quad a^2+b^2 = \underline{1}$ $\quad \det = a^2+b^2 = \underline{1}$

2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ $\quad a^2+b^2 = 1$ $\quad \det = -a^2-b^2 = -\underline{1}$

První případ

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \det A = \underline{1}$$

$\varphi(x) = Ax$ je otočení o úhel α proti směru hodinových ručiček. Je-li $\alpha \neq k\pi$, pak φ nemá reálná vlastní čísla

20

2. možnost

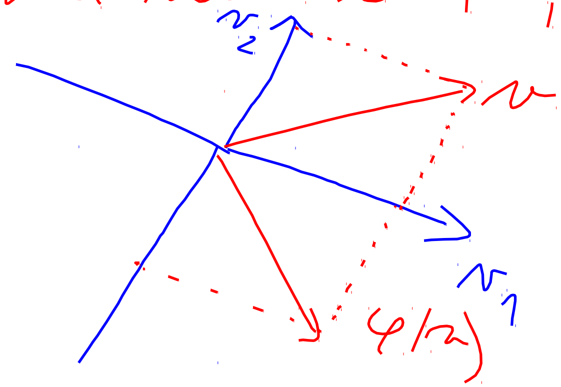
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \det A = -1$$

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - a)(a+\lambda) - b^2 = \lambda^2 - a^2 - b^2 =$$

$$= \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

má vl. čísla 1 a -1

v_1 vlastní vektor k 1, v_2 vl. vektor k -1



Zobrazení φ je geometricky symetrie podle osy zadané vlastním vektorem k 1.