ORTOGONÁLNÍ OPERÁTORY

U vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem

$\varphi : U \to U$ je ortogonální, jestliže

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

Minule – unitární operátor na vekt. prostoru nad $\mathbb{C}$

existuje ortonorm. báze, v níž

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |\lambda_i| = 1 \\ \lambda_i \text{ vl. čísla} \end{matrix}$$

Pro ortogonální operátory to neplatí!

Minule ort. operátory v $\mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(x) = Ax$

(1) otočení o úhel α $\quad \det A = 1$ $\quad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

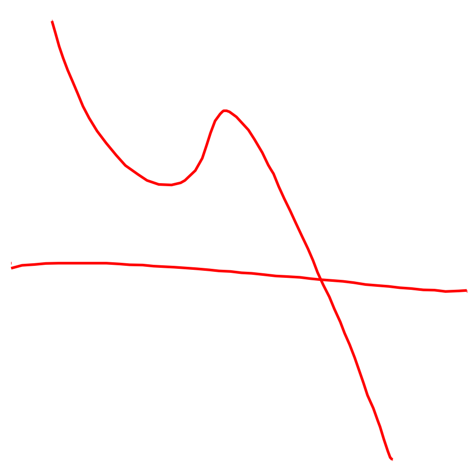
(2) symetrie podle přímky proch. počátkem

$\det A = -1$, vl. čísla jsou ± 1

Ortogonální operátory v $\mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = Ax$

Char. polynom je stupně 3, takže má aspoň jeden reálný kořen

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \ldots\ldots$$



Tento kořen má abs. hodnotu 1, takže to je $+1$ nebo -1.

Zobrazení $\hat{\varphi} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ $\quad \hat{\varphi}(z) = Az$
je unitární zobrazení. Takže char. polynom
má další kořeny v $\mathbb{C}$. Char. polynom $\hat{\varphi}$
je stejný jako char. polynom φ
$\det(A - \lambda E)$

Nechť λ_0 je kořen char. polynomu

$$-\lambda^3 + \underline{a_2 \lambda^2} + a_1 \lambda + a_0 = 0 \qquad a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$$

Ukážeme, že také $\bar{\lambda}_0$ je kořen:

$$-\lambda_0^3 + a_2 \lambda_0^2 + a_1 \lambda_0 + a_0 = 0 \qquad \text{provedeme } \overline{}$$

$$\overline{-\lambda_0^3 + a_2 \lambda_0^2 + a_1 \lambda_0 + a_0} = \overline{0}$$

$$-\overline{\lambda_0}^3 + \overline{a_2}\,\overline{\lambda_0}^2 + \overline{a_1}\,\overline{\lambda_0} + \overline{a_0} = 0$$

$$-\overline{\lambda_0}^3 + a_2 \overline{\lambda_0}^2 + a_1 \overline{\lambda_0} + a_0 = 0.$$

Kořeny char. polynomu jsou ± 1, $\cos\alpha + i\sin\alpha$, $\cos\alpha - i\sin\alpha$

protože každé číslo λ_0 s $|\lambda_0| = 1$ je tvaru

$\cos\alpha + i\sin\alpha$.

(1) Nechť vl. čísla $\hat{\varphi}$ jsou $1, \cos\alpha \pm i\sin\alpha$.

Nechť u_1 je vl. vektor k vl. číslu 1. Potom

$$\mathbb{R}^3 = [u_1] \oplus [u_1]^\perp$$

kde $[u_1]$ a $[u_1]^\perp$ jsou inv. podprostory dim 1 a 2.

Toto zobrazení je geometricky otočení kolem přímky $[u_1]$ o úhel α. Směr otáčení a úhel otáčení zjistíme tak, že si vezmeme libovolný vektor $v \in [u_1]^\perp \setminus \{\vec{0}\}$ spočítáme $\varphi(v)$ a $\cos\alpha = \dfrac{\langle v, \varphi(v)\rangle}{\|v\|\,\|\varphi(v)\|}$

(2) Nechť vlastní čísla $\hat{\varphi}$ jsou $-1,\ \cos\alpha \pm i\sin\alpha$.

Opět
$$\mathbb{R}^3 = [u_1] \oplus [u_1]^\perp$$

kde u_1 je vlastní vektor k -1.

Geometricky je φ složení

(1) symetrie vzhledem k rovině $[u_1]^\perp$

a

(2) otočení kolem osy $[u_1]$ o úhel α.
Směr otáčení a velikost úhlu α zjistíme stejně jako v předchozím případě.

SAMOADJUNGOVANÉ OPERÁTORY

Příklad U vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skal. součinem, $V \subseteq U$ je podprostor. Nechť $P: U \longrightarrow U$ je kolmá projekce na V. Ukážeme, že pro P platí

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \langle Pu_1, u_2 \rangle = \langle u_1, Pu_2 \rangle .$$

Operátory s touto vlastností nazýváme samoadjungované.

Důkaz:

$$u_1 = \underbrace{Pu_1}_{\in V} + \underbrace{(u_1 - Pu_1)}_{\in V^\perp} \qquad u_2 = \underbrace{Pu_2}_{\in V} + \underbrace{(u_2 - Pu_1)}_{\in V^\perp}$$

$$\langle Pu_1, u_2 \rangle = \langle Pu_1, Pu_2 + u_2 - Pu_2 \rangle = \langle Pu_1, Pu_2 \rangle + \underbrace{\langle \underbrace{Pu_1}_{\in V}, \underbrace{u_2 - Pu_2}_{\in V^\perp} \rangle}_{=0}$$

$$= \langle Pu_1, Pu_2 \rangle .$$

obdobně pravá strana je
$\langle u_1, Pu_2\rangle = \langle Pu_1, Pu_2\rangle$.

Definice Nechť $\varphi: U \to V$ je lin. zobrazení mezi prostory se skalárním součinem. Zobrazení $\varphi^*: V \to U$ se nazývá <u>adjungované</u> k zobrazení φ, jestliže platí

$$\forall u \in U\ \forall v \in V \quad \langle \varphi(u), v\rangle_V = \langle u, \varphi^*(v)\rangle_U$$

Příklad: $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ $\varphi(x) = Ax$
Hledáme matici B takovou, aby $\varphi^*: \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ byla $\varphi^*(y) = By$.

Má platit
$$\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi^*(y) \rangle$$
$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle$$
$$(Ax)^T \overline{y} = x^T \overline{By}$$
$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall y \in \mathbb{C}^k \quad x^T A^T \overline{y} = x^T \overline{B}\, \overline{y}$$
Proto
$$A^T = \overline{B}$$
$$\overline{A}^T = B$$
To znamená, že adjungované zobrazení vždy existuje.

Předchozí příklad můžeme aplikovat na obecnou situaci.

Závěr: ke každému $\varphi: U \to V$ existuje právě jedno $\varphi^*: V \to U$.

DEFINICE Operátor $\varphi: U \to U$ se nazývá samoadjungovaný, jestliže $\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$ pro všechna $u, v \in U$.

Příklad Samoadjungované operátory v $\mathbb{R}^n$,

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad \varphi(x) = Ax$ je samoadjungovaný právě když $\quad A = A^T$

$$\langle Ax, y \rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y = \langle x, A^T y \rangle$$

Matice samoadjungovaných operátorů nad $\mathbb{R}$ je symetrická.

Příklad $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $\quad \varphi(x) = Ax$ je samoadjungovaný, právě když $\overline{A}^T = A$, tj. matice A je hermitovská.

$$\langle Ax, y \rangle = (Ax)^T \overline{y} = x^T A^T \overline{y} = x^T \overline{\left(\overline{A}^T y\right)} = \langle x, \overline{A}^T y \rangle$$

Příklad hermitovské matice je $\begin{pmatrix} 3 & 2+3i \\ 2-3i & 7 \end{pmatrix}$

Další příklad – kolmá projekce – viz začátek

<u>Lemma</u> Je-li $\varphi : U \to U$ samoadjungovaný operátor a α je <u>ortonormální</u> báze, pak matice

$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je symetrická (je-li U nad $\mathbb{R}$)

je hermitovská (je-li U nad $\mathbb{C}$)

Dk založen na

$$\langle \varphi(u), v \rangle_U = (\varphi(u))_\alpha^T \cdot \overline{(v)_\alpha} \quad \text{v ortonormální bázi } \alpha$$

$$= \left((\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (u)_\alpha\right)^T \cdot (v)_\alpha$$

a zbytek je stejné počítání jako v předchozím příkladu.

Vlastní čísla a vlastní vektory samoadj. operátorů

(1) Vlastní čísla jsou vždy reálná (i když jsme nad $\mathbb{C}$)

(2) Vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou navzájem kolmé.

Dk: (1) Nechť $\varphi(u) = \lambda u$, $u \neq 0$.

$$\lambda \langle u,u\rangle = \langle \lambda u, u\rangle = \langle \varphi(u), u\rangle = \langle u, \varphi(u)\rangle = \langle u, \lambda u\rangle = \bar{\lambda}\underbrace{\langle u,u\rangle}_{}\overset{\neq 0}{}$$

Proto $\lambda = \bar{\lambda}$, tedy $\lambda \in \mathbb{R}$

(2) $\lambda \neq \mu$ $\quad \varphi(u) = \lambda u$, $\varphi(v) = \mu v$

$$\lambda \langle u,v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle = \langle u, \mu v\rangle = \mu \langle u,v\rangle$$

$$\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle u,v\rangle = 0$$

Proto $\langle u,v\rangle = 0$

Věta (hlavní věta o samoadj. operátorech) Nechť $\varphi: U \to U$ je samoadj. operátor, U nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$. Pak v U existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory. V této bázi α je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1 \dots \lambda_n$ jsou vl. čísla.

Důkaz indukcí podle $\dim U$. Je analogický důkazu pro unitární operátor.

<u>První nad $\mathbb{C}$</u>. Char. polynom má kořen v $\mathbb{C}$. Protože jde o vlastní čísla, je každý kořen reálný. Označme jej λ_1.
Nechť u_1 je vlastní vektor k λ_1, $\|u_1\| = 1$.
Je-li $\dim U = 1$, jsme hotovi. Předp. že věta platí pro dimenzi $n-1 \geq 1$. Proto U dimenze n je

$$U = [u_1] \oplus [u_1]^\perp$$

kde $\dim [u_1]^\perp = n-1$. Ukážeme, že $[u_1]^\perp$ je invariantní podprostor vůči φ.

Nechť $v \in [u_1]^\perp$. Chceme dokázat, že také $\varphi(v) \in [u_1]^\perp$

$$\langle \varphi(v), u_1 \rangle = \langle v, \varphi(u_1) \rangle = \langle v, \lambda_1 u_1 \rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle v, u_1 \rangle}_{0} = 0$$

Proto $\varphi / [u_1]^\perp : [u_1]^\perp \longrightarrow [u_1]^\perp$

je samoadj. operátor na prostoru dimenze $n-1$.

Podle ind. předpokladu existuje ort. báze $u_2, u_3, \dots u_n$ prostoru $[u_1]^\perp$ tvořená vl. vektory operátoru φ.

Proto $(u_1, u_2, \dots u_n) = \alpha$ je ortonormální báze v U tvořená vlastními vektory a $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$

<u>U je nad $\mathbb{R}$</u> Char. polynom počítáme pomocí matice

$B = (\varphi)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$, kde $\mathcal{B}$ je nějaká ortonormální báze.

Tedy $B = B^T$, B reálná, proto také $B = \overline{B}^T$.

B je matice nějakého samoadj. operátoru $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

Má vlastní čísla, ta jsou v $\mathbb{R}$, tedy tato vl. čísla jsou vlastní čísla i našeho operátoru $\varphi : U \to U$. Důkaz je stejný jako nad $\mathbb{C}$.

DŮSLEDEK

(Věta o spektrálním rozkladu samoadjungovaných operátorů. Spektrum je množina všech vlastních čísel.)

Každý samoadjungovaný operátor, lze psát ve tvaru

$$\varphi = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_k P_k,$$

kde $P_1, P_2, \ldots P_k$ jsou kolmé projekce na navzájem kolmé podprostory v U, jejichž direktní součet je roven U.

<u>Důkaz:</u> P_1 je kolmá projekce na $\ker(\varphi - \lambda_1 id)$

P_2 je kolmá projekce na $\ker(\varphi - \lambda_2 id)$, atd.

Odtud jde o podprostory vlastních vektorů k různým vlastním číslům, jsou tedy navzájem kolmé. Podle předch. věty musí být jejich direktní součet roven U.

Důkaz rovnosti provedeme rovnou na vektorech ortonormální báze operátoru U. Nechť u je vlastní vektor k λ_i. Pak

$$\varphi(u) = \lambda_i u$$

$$(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k)(u) = \lambda_1 \underbrace{P_1(u)}_{0} + \dots \lambda_i \underset{\lambda_i u}{\underset{\parallel}{P_i(u)}} + \dots + \lambda_k \underbrace{P_k(u)}_{0} =$$

Proto $\varphi = \sum \lambda_i P_i$ nejen na vektorech báze, ale i na všech dalších.

DŮSLEDEK Každou symetrickou (reálnou) matici A lze psát ve tvaru

$$A = P^T D P,$$

kde D je diagonální s vl. čísly matice A na diagonále a P je ortogonální matice.

Dk: $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$ je samoadj. operátor. V $\mathbb{R}^n$ existuje ortonormální báze α tvořená vl. vektory φ

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

$A = (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\varepsilon} = Q D Q^{-1}$ matice Q je ortogonální, neboť α je ortonormální báze. Proto $A = QDQ^{-1} = QDQ^T$. Vezmeme $P = Q^T$, to je opět ortogonální.