Jordanův kanonický tvar

Matice 4×4 $\quad A \quad \varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = Ax$

Jestliže λ_0 je vlastní číslo alg. násobnosti 4 a geom. násobnosti 2

dva možné JKT

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array}\right) \quad \text{nebo} \quad J_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array}\right)$$

$$J_i = P^{-1} A P$$

$$(J_1 - \lambda_0 E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & & \\ \hline 0 & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (J_1 - \lambda_0 E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J_2 - \lambda_0 E) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (J_2 - \lambda_0 E)^2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \neq 0$$

$$(J_2 - \lambda_0 E)^3 = 0$$

$$(A - \lambda_0 E)^k = (P^{-1} J P - \lambda_0 P^{-1} E P)^k = (P^{-1}(J - \lambda_0 E)P)^k =$$

$$= P^{-1}(J - \lambda_0 E)\underbrace{P P^{-1}}_{E}(J - \lambda_0 E)\underbrace{P P^{-1}}_{E}(J - \lambda_0 E)P \ldots\ldots$$

$$= P^{-1}(J - \lambda_0 E)^k P$$

Je-li A podobná J_1 je $(A-\lambda_0 E)^2 = 0$

Je-li A podobná J_2 je $(A-\lambda_0 E)^2 \neq 0$ $(A-\lambda_0 E)^3 = 0$

Jiný způsob hledání řetězce v příkladu 5

$\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = Ax$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}$

vl. číslo $\lambda_0 = 1$ alg. nás. 4

gem. nás. 2

Řetězec

- jeden délky 3 a jeden délky 1 ..... J_2
- dva řetězce délky 2 .... J_1

Řetězec délky 3 $0 \xleftarrow{A-E} v_1 \xleftarrow{A-E} v_2 \xleftarrow{A-E} v_3$

V případě, že NEEXISTUJÍ jiná vlastní čísla lze řetězec najít metodou „slepé slepice" (hádáním).

④

(1) Vezmeme náhodné $v_3 \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. Spočítáme

$$v_2 = (A-E)\,v_3$$

(2) Je-li $v_2 = 0$, jdeme na (1). Jestliže $v_2 \neq 0$, spočítáme

$$v_1 = (A-E)\,v_2$$

(3) Je-li $v_1 = 0$, jdeme na (1). Jestliže $v_1 \neq 0$, je to vlastní vektor a pro matici A s vl. číslem 1 alg. nás. 4 a geom. nás. 2 máme řetězec délky 3.

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-E} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = v_2 \xrightarrow{A-E} \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \\ 9 \\ -18 \end{pmatrix} = v_1 \xrightarrow{A-E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jako druhý řetězec vezmeme <u>vl. vektor</u> lin. nezávislý s v_1

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(5)

Vezmeme bázi $B = (\underbrace{v_1, v_2, v_3, v_4}_{\text{řetězce}})$ a v ní

$$(\varphi)_{B,B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = J = P^{-1} A \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 & 0 \\ -18 & 6 & 0 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & 0 \\ -18 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$P = (id)_{E,B}$$

Domácí úloha

Najít JKT a matici P, která zprostředkuje podobnost.

(A)

$$F = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Výpočet vl. čísel

$$\det \left(\begin{array}{cc|cc} 3-\lambda & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3-\lambda & -7 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 4-\lambda & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4-\lambda \end{array}\right) =$$

Součin 2 det

6

B) $N = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}$

Vl. čísla 1 alg. násobnosti 4

C) $D = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 4 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Vl. čísla 2 alg. násobnosti 3

vl. čísla 1 alg. nás. 1

$J = P^{-1} D P$

(7)

Aplikace JKT na řešení soustav diferenciálních rovnic

Víme, že rovnice

$$x' = ax$$

$$x(0) = x_0$$

má řešení $x(t) = e^{at} \cdot x_0$. Soustava dif. rovnic pro n funkcí $x_1, x_2, \dots, x_n$ proměnné t má ve speciálním případě (tj. lineární, homogenní s konst. koeficienty) tvar

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n
\end{aligned}
\qquad a_{ij} \in \mathbb{R}
$$

Poč. podmínka $x_1(0) = x_{01}$, $x_2(0) = x_{02}$, ..., Přepišme do maticového tvaru

$$x'(t) = A\, x(t)$$

$$x(0) = x_0 \qquad (\mathbb{C}) \qquad \mathbb{C}^n$$

kde $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $(\mathbb{C}^n)$, $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Víme, že

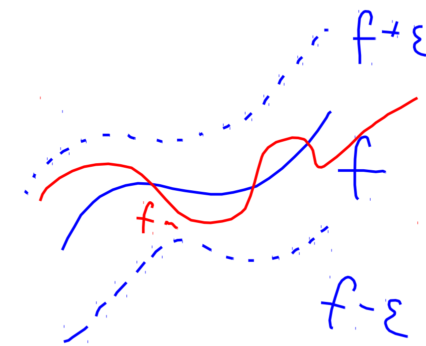
$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^n}{n!} + \dots$$

$f_n(t) \rightrightarrows f(t$

Lze definovat

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$$

Tato řada konverguje absolutně a stejnoměrně.



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$

$\forall n \geq n_0$

$f(t) - \varepsilon < f_n(t) < f(t) + \varepsilon$

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2} + \frac{a^3t^3}{3!} + \dots\dots$$

$$\left(e^{at}\right)' = 1' + (at)' + \left(\frac{a^2t^2}{2}\right)' + \left(\frac{a^3t^3}{3!}\right)' + \dots\dots \left(\frac{a^nt^n}{n!}\right)'$$

$$\parallel$$

$$a\,e^{at} = 0 + a + a^2\,t + a^3\,\frac{t^2}{2} + \dots\dots \frac{a^n\ t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$

$$a\,e^{at} = a\left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2} + \frac{a^3t^3}{3!} + \dots\right)$$

Stejně můžeme počítat s e^{At}. To znamená, že platí

$$\left(e^{At}\right)' = A\,e^{At}$$

Tedy e^{At} je řešení maticové dif. rovnice

$$X'(t) = A\,X(t) \qquad X : \mathbb{R} \to Mat_{n\times n}$$

$$X(0) = e^{A\cdot 0} = e^{0} = E$$

Proto funkce $x(t) = X(t)\,x_0$, kde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) je řešením soustavy

$$x'(t) = A\,x(t), \quad x(0) = x_0$$

Nejprve vypořádejme s tím, že řada pro e^{At} je nekonečná. Pomocí JKT je můžeme značně zjednodušit. Vezmeme nové

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E_k + D_k \qquad D_k = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{k} \Big\} k$$

$$e^{J_k(\lambda)} = e^{\lambda E_k + D_k} = e^{\lambda E_k} \cdot e^{D_k}$$

díky tomu, že matice λE_k a D_k komutují.

Pro matice A, B obecně neplatí $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$

Jestliže víme $AB = BA$, pak $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$.

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$e^A \cdot e^B = \left(E + A + \frac{A^2}{2} + \dots\right)\left(E + B + \frac{B^2}{2} + \dots\right) = E + (A+B) + \frac{A^2+B^2}{2}$$

$$= E + (A+B) + \frac{A^2+2AB+B^2}{2} + AB$$

$$e^{A+B} = E + (A+B) + \frac{(A+B)^2}{2} + \dots = E + (A+B) + \frac{A^2+AB+BA+B^2}{2} + \dots$$

12

Pokračujme ve výpočtu $e^{J_k(\lambda)t}$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad D^2 = \begin{pmatrix} 0\,0 & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad D^3 = \begin{pmatrix} 0\,0\,0 & \ddots \\ & \end{pmatrix}$$

$$e^{J_k(\lambda)t} = e^{\lambda E t} \cdot e^{D_k t} =$$

$$= \left(E + \lambda t E + \frac{\lambda^2 t^2 E^2}{2} + \frac{\lambda^3 t^3 E^3}{3!} + \dots\dots\right) e^{D_k t}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & & & 0 \\ & e^{\lambda t} & & \\ 0 & & e^{\lambda t} & \\ & & & \ddots & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \cdot \left(E + D_k t + \frac{D_k^2 t^2}{2} + \frac{D_k^3 t^3}{3!} + \dots + \underbrace{\frac{D^k t^k}{k!}}_{=0}\right)$$

$$= e^{\lambda t}\left(E + D_k t + \frac{D_k^2 t^2}{\cdot} + \dots + \frac{D_k^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!}\right)$$

Zde máme již jen konečný součet.

Je-li J matice v JKT, je blokově diagonální s Jord. buňkami na diagonále.

Pak e^{Jt} je rovněž blokově diagonální s bloky $e^{J_i(\lambda_i)t}$ a bude dána konečným výrazem

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & 0 \\ & e^{\lambda_1 t} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix} \left(E + Dt + \frac{D^2 t^2}{2} + \dots \frac{D^{r-1} t^{r-1}}{(r-1)!} \right)$$

kde $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_2 & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix} + D$ a r je rozměr největší buňky.

Závěr: Soustavu $Y'(t) = J\,Y(t)$ (1)

kde J je matice v JKT umíme vyřešit výše uvedeným postupem.

Mějme soustavu $X'(t) = A X(t)$ (2)

kde A má JKT J, přesněji $J = P^{-1} A P$

Nechť $Y(t)$ je řešením soustavy (1). Pak

$$X(t) = P Y(t) \implies Y(t) = P^{-1} X(t)$$

je řešením soustavy (2)

$$X'(t) = P Y'(t) = P J Y(t) = P J P^{-1} X(t)$$
$$= A X(t).$$

Řešení úlohy $x'(t) = A x(t)$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n)$ (3)

Je-li $X(t) = P e^{Jt}$ soustavy (2) tj. $X'(t) = A X(t)$

platí, že $X(0) = P e^{J \cdot 0} = P$.

Tedy funkce $x(t) = X(t)P^{-1}x_0$ je hledaným řešením

$$x(0) = X(0)P^{-1}x_0 = PP^{-1}x_0 = x_0 .$$

Speciálně: Je-li x_0 vlastní vektor k vlastnímu číslu λ_0 je funkce $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$x(t) = e^{\lambda_0 t} x_0$$

řešením rovnice

$$x'(t) = A\,x(t)$$

$$x(0) = x_0$$

Plyne z toho, že si vezmeme příslušný člen v Pe^{Jt}. (Napište si, jak vypadá e^{Jt} pro J diagonální matici.)

Důkaz věty o JKT

Internetová osnova – Barbuzová – LA na pokračování
– Kalvoda z předch. let (asi nejlépe 2016)
– Slovák LA kap 5

Nové pojmy

Kořenový podprostor operátoru $\varphi : U \to U$ k vlastnímu číslu λ je

$$R_\lambda = \{ u \in U,\ \exists k \in \mathbb{N}\ \ (\varphi - \lambda\, id)^k (u) = 0 \}$$

Vlastní podprostor $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\, id) = \{ u \in U,\ (\varphi - \lambda\, id) u = 0 \}$

Lze ukázat, že existuje k_0 tak, že

$$R_\lambda = \ker(\varphi - \lambda\, id)^{k_0}$$

1 První krok důkazu věty o JKT spočívá v tom, že ukážeme (za předpokladu že součet alg. násobností vl. čísel je roven dimenzi prostoru U)

$$R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k} = U$$

Direktní součet více podprostorů:

Součet $U_1 + U_2 + \dots + U_k = \{u_1 + u_2 + \dots + u_k \in U,\ u_i \in U_i\}$ je direktní, jestliže kdykoliv $u_1 + u_2 + \dots + u_k = \vec{o}$, kde $u_i \in U_i$, pak $u_1 = u_2 = \dots = u_k = o$.

(2) <u>Druhý krok</u> R_{λ_i} jsou invariantní podprostory operátorů φ i $\varphi - \lambda_j\, id$

Vezmeme si R_λ a $\varphi - \lambda\, id$.

$\varphi - \lambda\, id \,/\, R_\lambda : R_\lambda \longrightarrow R_\lambda$ a platí $\left((\varphi - \lambda\, id)/R_\lambda\right)^k = 0$

Operátor ψ s vlastností $\psi^k = 0$ se nazývá nilpotentní.

Speciální případ nilpotentního operátoru je cyklický operátor: $\psi : V \longrightarrow V$ je cyklický, jestliže existuje báze $(v_1, v_2, \dots v_n)$ prostoru V taková, že

$$v_n \xrightarrow{\psi} v_{n-1} \xrightarrow{\psi} v_{n-2} \xrightarrow{\psi} \dots \xrightarrow{\psi} v_1 \longrightarrow 0$$

Druhý krok důkazu spočívá v tom, že prostor R_λ napíšeme jako direktní součet podprostorů

$$R_\lambda = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$$

takových, že $(\varphi - \lambda\, id)/V_i : V_i \longrightarrow V_i$ je cyklický operátor. Vhodné (= cyklické) báze těchto podprostorů jsou hledané řetězce pro Jordanův kanonický tvar.