

①

Znaciemi Pirmena U, V, W oznacuju "obykle vektore"

podany. $K = \mathbb{C}$ nebo \mathbb{R} je pole nad kterym maime tyto
podany.

Pirmena n, v, w jsou obykle vektory
 a, b, c jsou skalary z K

x, y, z jsou vektory z K^n zapamenejme si stand. raziednicich jako

slupce $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

A^T je konjugovana matice

(2)

Lin. zobrazení je zobrazení $\varphi: U \rightarrow V$ mezi vekt. prostory nad \mathbb{K}

$$\forall u, v \in U \quad \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$$

$$\forall a \in \mathbb{K} \quad \varphi(au) = a\varphi(u)$$

Lineární forma $f: U \rightarrow \mathbb{K}$ je lineární zobrazení,
kde $V = \mathbb{K}$.

Jak vypadají vidky lin. formy na $U = \mathbb{K}^n$.

$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Další příklady (2) $U = \mathbb{R}_n[x]$

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(p) = p'(1) + p(2)$$

(3) $U = \mathcal{C}[a, b]$ $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(u) = \int_a^b u(x) dx$$

lineární forma

(3)

Bilinearni formy par obzorem $f: U \times U \rightarrow K$,

kedo U je vekt. prostora nad K , ktera par linearni v baidi
stojce:

$$\forall u, v, w \in U \quad \forall a, b \in K \quad f(au + bv, w) = af(u, w) + bf(v, w)$$
$$f(u, av + bw) = af(u, v) + bf(u, w)$$

Prıklad 1 $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$f(x, y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2)y_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2)y_2$$

$$= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)x_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2)x_2$$

← linearni v y

← linearni v x

Matrix ni lase prak. kella 4

$$f(x, y) = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2, a_{12}x_1 + a_{22}x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \\ = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x^T A y$$

Prüklad 2 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i y_j =$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = x^T A y$$

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$
symmetrische Matrix

(5)

Příklad 3 $f: \mathbb{R}_m[x] \times \mathbb{R}_m[x] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(p, q) = p(1) \cdot q''(2)$$

Příklad 4 $U = C[a, b]$ $F: C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f, g \in C[a, b] \quad F(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

^L
Příklad 5: Každá čtvercová matice A má nějaký bilinear tvar

$$f: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} \quad f(x, y) = x^T A y$$

Platí i jeho inverze

6

De două bilineare formă f pe spațiul U și baze α și β asociate, matrice A pe $\dim U \times \dim U$ asociată, se poate

$$\forall u, v \in U \quad f(u, v) = x^T A y,$$

unde $x = (u)_\alpha$, $y = (v)_\alpha$ prin scrierea vectorilor u și v în baza α .

$$\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_m)$$

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ unde } u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_m u_m$$

Matrice A asociată matrice bilineare formă $f: U \times U \rightarrow \mathbb{K}$ și baze α . Scriem în tabel

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^m \quad a_{ij} = f(u_i, u_j)$$

Verifică și definiția matrice lin. asociată $\varphi: U \rightarrow U$ și baze α și obține rezultatul.

(7)

Najprije postavimo $f(u, v)$. Neka $u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$, $v = y_1 v_1 + \dots + y_m v_m$

$$f(u, v) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i, \sum_{j=1}^m y_j v_j\right) = \sum_{j=1}^m y_j f\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i, v_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^m y_j \left(\sum_{i=1}^n x_i f(u_i, v_j)\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i f(u_i, v_j) y_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j = (x_1, x_2, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = (u)_{\alpha}^T A (v)_{\alpha}$$

Matrica bilinearni formi f u $n \times m$ i α

NEZNACIME $(f)_{\alpha, \alpha}$

(8)

Odosťdime vztah me matice bilinearneho sohlaseni

n merych bazi ch. $f: U \times U \rightarrow K$ bilinearne

$\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dve baze n U

Nech A je matice f v bazi α a B je matice f v bazi β .

To znamena, ze me riadnice kazdych dvoch vektoru

$u, v \in U$ plati

$$f(u, v) = (u)_{\alpha}^T A (v)_{\alpha} = (u)_{\beta}^T B (v)_{\beta}$$

Pisime $x = (u)_{\alpha}$, $y = (v)_{\alpha}$, $\bar{x} = (u)_{\beta}$, $\bar{y} = (v)_{\beta}$.

$$\underline{x = (u)_{\alpha} = (id)_{\alpha, \beta} (u)_{\beta} = P \bar{x}}$$

$$\underline{y = (v)_{\alpha} = (id)_{\alpha, \beta} (v)_{\beta} = P \bar{y}}$$

Pocitame

$$f(u, v) = \bar{x}^T B \bar{y} = x^T A y = (P \bar{x})^T A (P \bar{y}) =$$

$$= \bar{x}^T P^T A P \bar{y} = \bar{x}^T (P^T A P) \bar{y} \quad (9)$$

Dokážeme, že $\forall \bar{x}, \bar{y} \in K^m$ platí

$$\bar{x}^T B \bar{y} = \bar{x}^T (P^T A P) \bar{y}$$

z čeho rovnosti pro všechna $\bar{x}, \bar{y} \in K^m$ plyne

$$B = P^T A P$$

Průč: Berme $l_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← i -té místo

j -tý sloupec
matice A

Plom $l_i^T A l_j = a_{ij}$

neboli $l_i^T A l_j = l_i^T S_j A = a_{ij}$

Odtud plyne, že $\forall i, j$

$$(B)_{ij} = (P^T A P)_{ij} \Rightarrow B = P^T A P$$

(10)

ještě podruhé: odvodili jsme, že

$$B = (\text{id})_{\alpha, \beta}^T A (\text{id})_{\alpha, \beta}$$

matice f
v bázi B

matice f v bázi α

Operace: $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_m)$

$$(\text{id})_{\alpha, \beta} = (v_1)_\alpha (v_2)_\alpha \dots (v_m)_\alpha$$

$$\forall v \in U : (v)_\alpha = (\text{id})_{\alpha, \beta} (v)_\beta$$

$$(v_1)_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dvě čtvercové matice A a B nazýváme

KONGRUENTNÍ

jestliže existuje regulární matice P (del P ≠ 0 ⇔ P existuje)
a platí

$$B = P^T A P$$

Relace A je kongruentní s B je relací ekvivalence:

Bitlineární forma $f : U \times U \rightarrow K$ se nazývá "symetrická", má-li

každě $\forall u, v \in U$ platí

$$f(u, v) = f(v, u).$$

Jednoduchý důsledek je, že matice každé "symetrické" bilin. formy v nějaké bázi je "symetrická".

$$A = (a_{ij}) \quad a_{ij} = f(u_i, u_j) = f(u_j, u_i) = a_{ji}.$$

Plati i obráceně "naopak". Je-li matice formy nějaké bázi "symetrická", je f "symetrická".

Příklad matice bilin. formy $f : K^n \times K^n \rightarrow K,$

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

(12)

Ce matrice A reprezintă matricea în linii pentru f pe stand. bari

$$A_{r,s} = f(e_r, e_s) = \sum_{i=1}^n a_{ij} (e_r)_i (e_s)_j = a_{rs}$$

Năm în cazul în care matricea este hermitică simetrică

matricea este hermitică și hermitică și diagonalizabilă

matrice. Dacă f este biliniară și hermitică în linie
forma $f: U \times U \rightarrow \mathbb{K}$ matricea $n \times n$ în \mathbb{K} și hermitică

unde

$$f(x, y) = d_1 x_1 y_1 + d_2 x_2 y_2 + \dots + d_n x_n y_n = x^T \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} y$$

unde x și y sunt vectorii obișnuiți

Rádkové i sloupové operace jsou realizovány pomocí násobení

lsv. elementárními maticemi slava, resp. apava

e_r ... elem. řádk. operace

$$e_r(A) = e_r(E) \cdot A$$

elementární

e_s ... elem. sloup. operace

$$e_s(A) = A \cdot e_s(E)$$

matice

$$e_r^1(E) = \begin{pmatrix} a & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= e_s^1(E)$$

nynásobení 1. řádku číslem $a \neq 0$
nynásobení 1. sloupce číslem $a \neq 0$

$$e_r^1(E) = (e_s^1(E))^T$$

$$e_r^2(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= e_s^2(E)$$

nyměnína 1. a 2. řádku
nyměnína 1. a 2. sloupce

$$e_r^2(E) = (e_s^2(E))^T$$

$$e_r^3(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

le 2. rādru pīckem a - mārōkē 1.

$$e_s^3(E) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

le 2. rādru pīckem a - mārōkē 1.

$$e_r^3(E) = (e_s^3(E))^T$$

Lemma Nīkē pē mējābā kōmpōzīcījōpācē realizējamā mārōkēm mātīcī P pāra. Pāle kējā rādru opācē pē realizējamā mārōkēm mātīcī P^T pāra.

(15)

Základní Necht matice B vznikne ze čtvercové matice A posazením nejprve řádkových a sloupcových úprav. Pak je B kongruentní s matricí A .

Důkaz:

$$\begin{aligned} B &= P_k^T \dots (P_2^T (P_1^T A P_1) P_2) \dots P_k \\ &= P_k^T P_{k-1}^T \dots P_1^T A P_1 P_2 \dots P_k = \\ &= (P_1 P_2 \dots P_k)^T A (P_1 P_2 \dots P_k) = P^T A P. \end{aligned}$$

A je kongruentní s B .

ALGORITHMUS Máme algoritmus, který ke každé symetrické čtvercové matici A najde diagonální matici D a matici P , takže

$$D = P^T A P$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array} \right)$$

same rank.
~
a slope space

(16)

$$\sim \left(\begin{array}{c|c} D & P^T \\ \hline P & \end{array} \right)$$