Bilineární a kvadratické formy

Algoritmus A je čtvercová symetrická matice

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array}\right) \sim \begin{array}{l}\text{stejné řádk.}\\ \text{a sloupc.}\\ \text{el. operace}\end{array} \sim \left(\begin{array}{c|c} D & P^T \\ \hline P & \end{array}\right)$$

kde $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ je diagonální a platí

$$D = P^T A P$$

Při regulární

Dôkaz na príklade

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim$$

k 1. riadku pričítame 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

k 1. stĺpcu pričítame 2.

symetrická $\qquad P^T$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

$P \rightarrow$

2. a 3. riadok vynásobíme dvoma

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & 2 & 0 \\ 20 & 12 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

2. a 3. stĺpec vynásobíme dvoma

$\sim$

3

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 24 & 0 & 2 & 0 \\ 20 & 24 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

od 2. riadku odčítame 1.

$\sim$

od 3. riadku odčítame 5 násobok 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -100 & -5 & -5 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

stejné na stĺpci

$\sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -100 & -5 & -5 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -5 & & & \\ 1 & 1 & -5 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

K 3. riadku pričítame 2.

$\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -5 & & & \\ 1 & 1 & -5 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

teraz na stĺpci

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -6 & & & \\ 1 & 1 & -4 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} D & P^T \\ \hline P & \end{array}\right)$$

$$D = P^T A P$$

Tento algoritmus nám říká, že každá sym. matice je kongruentní s diagonální maticí.

Zpět k bilin. formám

$f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ symetrická bilin. forma

V bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ má matici $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = f(u_i, u_j)$$

Minule jsme si ukázali, že

$$f(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x^T A y = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

kde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (u)_\alpha$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (v)_\alpha$.

Věta: Pro každou symetrickou bilineární formu $f: U \times U \to K$ existuje báze B taková, že matice f v bázi B je diagonální, tj

$$f(u,v) = d_{11}\bar{x}_1\bar{y}_1 + d_{22}\bar{x}_2\bar{y}_2 + \dots + d_{nn}\bar{x}_n\bar{y}_n$$

kde $\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \vdots \\ \bar{x}_n\end{pmatrix} = (u)_B$, $\begin{pmatrix}\bar{y}_1\\ \vdots \\ \bar{y}_n\end{pmatrix} = (v)_B$

Vyjádření f v diagonálním tvaru. Báze B se nazývá polární.

Poznámka Báze B není určena jednoznačně, existuje jich spousta.

Provedeme důkaz modifikací předchozího algoritmu.

Nechť f má v nějaké bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ matici $A = (a_{ij})$.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} \\ \hline u_1\, u_2 \dots u_n & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a_{ij} = f(u_i, u_j) & u_i \\ \hline u_j & \end{array}\right)$$

Při provedení řádk. nebo sloupc. úprav tohle pravidlo zachováme.

Ke 2. řádku přičtem 2 krát první řádek. Situace v j-tém sloupci

$$
\left.\begin{array}{c|c}
f(u_1, u_j) & u_1 \\
f(u_2, u_j) + 2 f(u_1, u_j) & u_2 + 2u_1 \\
\hline
u_j &
\end{array}\right.
=
\left.\begin{array}{c|c}
f(u_1, u_j) & u_1 \\
f(2u_1 + u_2, u_j) & 2u_1 + u_2 \\
\hline
u_j &
\end{array}\right.
$$

Při provedení stejných řádk. a sloupcových operací dostaneme vpravo i dole stejné vektory.

$$
\left(\begin{array}{c|c}
A & \begin{matrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} \\
\hline
u_1 \dots u_n &
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{c|c}
D & \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \\
\hline
v_1 \dots v_n &
\end{array}\right)
$$

stejné řádk. a sloupc. operace

$(v_1, v_2, \dots, v_n)$ je báze B, v níž má matice f diag. matici D.

$$a_{ij} = f(v_i, v_j) = 0 \quad i \neq j$$

<u>Príklad</u> Máme sym. bilin. formu $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ktorá má v súradniciach stand. báze vyjadrenie

$$f(x,y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2$$

Matice f v bázi $\alpha = (e_1, e_2, e_3)$ je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$ viz náš príklad.

Vraťme se k němu s tím, že matice E vpravo budeme považovat za vektory $\begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$ a matici E dole za vektory $e_1\, e_2\, e_3$.

Dostali jsme výsledek

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \\
\hline
1 & -1 & -6 & & & \\
1 & 1 & -4 & & & \\
0 & 0 & 2 & & &
\end{array}\right)
\begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$

Dostali jsme hledanou „zadanou" bázi $B=(v_1,v_2,v_3)$ v níž má f diagonální tvar

$$f(u,v) = 4\bar{x}_1\bar{y}_1 - 4\bar{x}_2\bar{y}_2 - 96\bar{x}_3\bar{y}_3$$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 4 \qquad f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 0$$

Kvadratická forma na vektorovém prostoru U nad $\mathbb{K}$ je zobrazení $q : U \to \mathbb{K}$ takové, že existuje symetrická bilineární forma $f : U \times U \to \mathbb{K}$ a platí, že

$$(\forall u \in U) \quad q(u) = f(u,u).$$

Příklad: $A = (a_{ij})$ je symetrická matice řádu $n \times n$. $f : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x^T A y.$$

$$q(x) = f(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x^T A x$$ je typická kvadr. forma na $\mathbb{K}^n$.

Příklad $q(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2$ $\quad q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Je to kvadr. forma?

$$q(x) = 3x_1x_1 + 5x_2x_2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1$$

$$f(x,y) = 3x_1y_1 + 5x_2y_2 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1$$

Toto je sym. bilin. forma a $q(x) = f(x,x)$.

Matice f ve stand. bázi je $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Věta Každá kvadratická forma $q: V \to K$ určuje jednoznačně symetrickou bilineární formu f.

Platí vzorec $\quad f(u,v) = \frac{1}{4}\left(q(u+v) - q(u-v)\right)$

Důkaz: nechť $q(u) = f(u,u)$.

Pak $q(u+v) - q(u-v) = f(u+v, u+v) - f(u-v, u-v) =$

$$= f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v) - f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) - f(v,v)$$

$$= 4 f(u,v).$$

Definice: Matice kvadr. formy $q: U \to \mathbb{K}$ v bázi α je matice přidružené symetrické bilin. formy v bázi α.

$q(u) = f(u,u)$, f symetrická bilineární forma

Matice q v bázi $\alpha = (u_1, \ldots, u_n)$ je $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = f(u_i, u_j)$

Důsledek předchozí věty: Ke každé kvadr. formě $q : U \to \mathbb{K}$ existuje v U báze B (polární báze) taková, že

$$q(u) = b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + \dots + b_{nn} x_n^2$$

kde $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (u)_\alpha$.

KVADRATICKÉ FORMY NAD $\mathbb{R}$

Dokážeme více, než jsme ukázali na konci předchozí části.

Sylvestrův zákon setrvačnosti.

Nechť $q : U \to \mathbb{R}$ je kvadratická forma. Potom v U existuje báze B taková, že v souřadnicích této báze je

$$q(u) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 + 0 \cdot x_{r+1}^2 + \dots + 0 \cdot x_n^2$$

kde $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (u)_B$.

Navíc (setrvačnost) platí: jsou-li B a $\mathcal{C}$ dvě báze, pro něž toto platí, pak počet $+1$, -1 a 0 v obou vyjádřeních je stejný.

Díky této větě můžeme definovat signaturu kvadr. formy je to trojice čísel (s_+, s_-, s_0), kde $s_+ =$ počet $+1$, $s_- =$ počet -1, $s_0 =$ počet 0 ve vyjádření z předchozí věty.

Hodnost kvadr. formy $h = s_+ + s_-$.

Důkaz věty Již víme, že v nějaké bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ lze q psát ve tvaru

$$q(u) = a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 + \dots + a_{nn} y_n^2$$

Lze předpokládat, že $a_{11}, \dots a_{pp} > 0$, $a_{p+1\,p+1}, \dots a_{r,r} < 0$ a $a_{r+1,r+1}, \dots a_{nn} = 0$.

Nechť $a_{ii} > 0$. Změníme bázi tak, že místo u_i vezmeme $\frac{u_i}{\sqrt{a_{ii}}}$. Potom $q(u_i) = a_{ii} 1^2$ neboť $(u_i)_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

$$q\left(\frac{u_i}{\sqrt{a_{ii}}}\right) = a_{ii} \left(\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}\right)^2 = \underline{1}$$

q má v nových souřadnicích člen $b_{ii} = 1$.

Nechť $a_{ii} < 0$. Změníme bázi tak, že místo u_i vezmeme $\frac{u_i}{\sqrt{-a_{ii}}}$. Potom $q\left(\frac{u_i}{\sqrt{-a_{ii}}}\right) = a_{ii} \left(\frac{1}{\sqrt{-a_{ii}}}\right)^2 = \frac{a_{ii}}{-a_{ii}} = \underline{-1}$

Když $a_{ii} = 0$, neděláme nic.

15

Tím jsme dokázali 1. část věty.

Nechť

$$q(u) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots \dots \quad \text{v bázi } B = (v_1, v_2, \dots v_n)$$

$$q(u) = y_1^2 + \dots + y_p^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \dots \quad \text{v bázi } \mathcal{C} = (w_1 \dots w_n).$$

Předpokládejme, že $p < s$. Najdeme spor.

Definujme $V = [v_{p+1}, v_{p+2}, \dots v_n]$

$v \in V \quad q(v) \leq 0$ podle 1. vyjádření $(*)$

Definujme $W = [w_1, w_2, \dots, w_s]$

$w \in W \setminus \{\vec{o}\} \quad q(w) > 0. \quad (\times\times)$

Jestliže existuje $u \in V \cap W \setminus \{o\}$, pak bude platit

$$\underset{\text{podle } (\times\times)}{0} < q(u) \underset{\text{podle } (*)}{\leq 0}$$

A to je hledaný spor!

Dokážeme, že $\dim V \cap W \geq 1$, pak takový u existuje.

$$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim (V + W)$$
$$\geq \dim V + \dim W - \dim (U)$$
$$= n - p + s - n = s - p \geq 1.$$