Kvadratické formy nad $\mathbb{R}$

Minule jsme ukázali, že každou kvadratickou formu $g: U \to \mathbb{R}$ kde U je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ lze v nějaké bázi α prostoru U psát ve tvaru

$$g(u) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+r}^2 + 0x_{s+r+1}^2 + \dots + 0\,x_n^2$$

Přitom počet $+1$, -1 a 0 v takovém vyjádření nezávisí na volbě báze.

Kontrolní otázka: Jaký je vztah mezi u a $(x_1, x_2, \dots x_n)$?

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(2)

<u>Signatura kvadr. formy g</u> je trojice čísel (s_1, s_{-1}, s_0),

kde s_1 = počet $+1$

s_{-1} = počet -1

s_0 = počet 0

Pro g kvadr. formu na $\mathbb{R}^n$ máme

$$g(x) = x^T A x,$$

kde A je symetrická matice. Signatura matice A je signatura příslušné kvadr. formy.

Kongruentní matice mají stejnou signaturu.

A je kongruentní s maticemi $P^T A P$, kde P je regulární.

A a $P^T A P$ jsou matice téže kvadr. formy pouze v různých bazích. Proto mají stejnou signaturu.

Platí to i obráceně: Nechť A a B symetrické mají stejnou signaturu. Pak kvadr. formy $g(x) = x^T A x$ a $h(x) = x^T B x$ lze psát ve stejných bázích v diagonálním tvaru s maticí

$$D = \begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & +1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & +1 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \, 0 \end{pmatrix}$$

Tedy

$D = P^T A P$ (D a A jsou kongruentní)

$D = Q^T B Q$ (D a B jsou kongruentní)

$\Longrightarrow$ A a B jsou kongruentní.

Dokázali jsme

Věta Dvě symetrické matice A a B tvaru $n \times n$ jsou kongruentní, právě když mají stejnou signaturu.

A matice $n \times n$ se signaturou (s_+, s_-, s_0). Pak platí

$$s_+ + s_- + s_0 = n$$

$$s_+ + s_- = h(A) \qquad \left(= h(D) \qquad D = P^T A P \right)$$

regulární

<u>Speciální kvadr. formy</u> $g : U \to \mathbb{R}$

(1) g je pozitivně definitní, jestliže $\forall u \in U \setminus \{0\} : g(u) > 0 \iff s_+ = n,\ s_- = s_0 = 0$

(2) g je negativně definitní, jestliže $\forall u \in U \setminus \{0\} : g(u) < 0 \iff s_- = n,\ s_+ = s_0 = 0$

(3) g je pozitivně semidefinitní, jestliže $\forall u \in U : g(u) \geq 0 \iff s_- = 0$

(4) g je negativně semidefinitní, jestliže $\forall u \in U : g(u) \leq 0 \iff s_+ = 0$

(5) g je indefinitní, jestliže $\exists u \in U\ g(u) > 0$, $\exists u \in U\ g(u) < 0 \iff s_+ > 0,\ s_- > 0$

Kontrolní otázka: Jak vypadají všechny kvadr. formy z $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

$$g(x) = x^2, \quad 2x^2, \quad kx^2$$

Obecně $g(x) = kx^2$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad g(x_1, x_2) = a_{11} x^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$$

Dif. počet $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce $\quad f'(x_0) = 0$

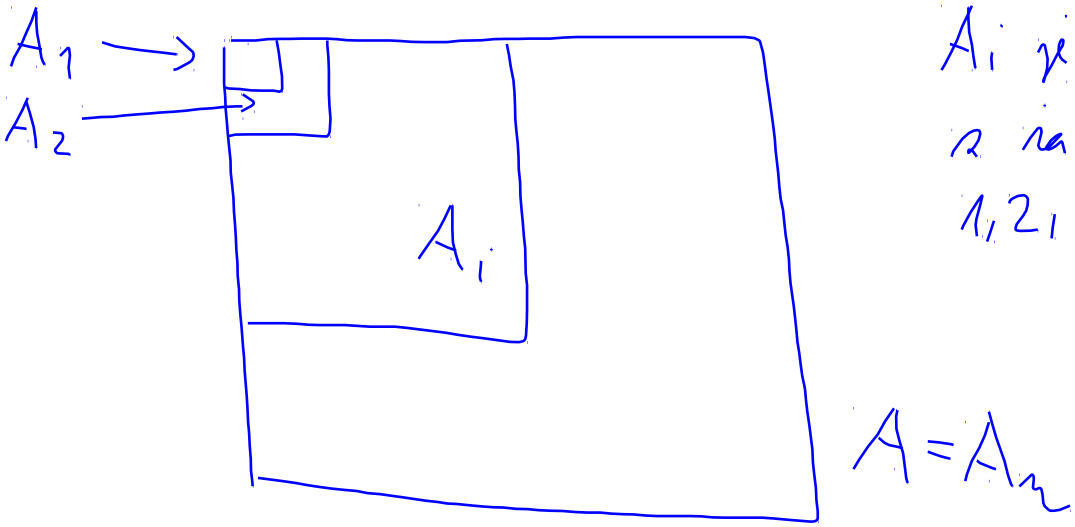
$f''(x_0) > 0 \; \ldots \; x_0$ je lok. minimum

Této derivaci odpovídá kvadr. forma $\quad g(h) = f''(x_0) h^2$

v $\mathbb{R}^2$
$$g(h_1, h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) h_2^2$$

Sylvestrovo kritérium

Nechť q je kvadratická forma zadaná maticí A typu $n \times n$. Hlavní minory matice A jsou determinanty submatic $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$.



A_i je matice $i \times i$ tvořená z řádků $1, 2, \dots i$ a sloupců $1, 2, \dots i$ matice A.

Kritérium Kvadr. forma g s maticí A je pozitivně definitní právě když $\det A_i > 0$ pro všechna $i \in \{1, 2, \dots n\}$.

Kvadr. forma g s maticí A je negativně definitní, právě když
$$\det A_1 < 0, \det A_2 > 0, \det A_3 < 0, \dots \det A_{2i-1} < 0, \det A_{2i} > 0$$

Jak si to zapamatovat

$g(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ je pozitivně definitní a matice $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ má všechny hlavní minory kladné

$h(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$ je negativně definitní s maticí
$$B = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

(8)

$\det(-1) = -1$, $\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$, $\det\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = -1$.

Příklad $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$g(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 7x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &\det(3) = 3 > 0 \\ &\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0 \\ &\det A = 21 - 4 - 7 = 10 > 0. \end{aligned}$$

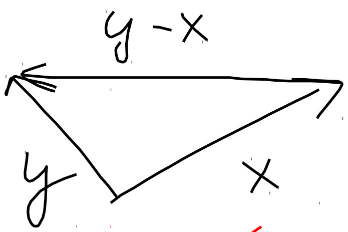
g je podle Sylvesterova kritéria pozitivně definitní

Kontrolní otázka pro ty, co chtějí hodnocení A nebo B

Jak je to s kvadr. formami nad $\mathbb{C}$ – zformulujte analogii Sylvesterova zákona setrvačnosti

Vektorové prostory se skalárním součinem

Motivace: V $\mathbb{R}^2$: jsou-li vektory $x=(x_1,x_2)$ a $y=(y_1,y_2)$ na sebe kolmé, platí Pythagorova věta:



$$\|y-x\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$$

$$(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2 = x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2$$

$$\cancel{y_1^2}-2y_1x_1+\cancel{x_1^2}+\cancel{y_2^2}-2y_2x_2+\cancel{x_2^2} = \cancel{x_1^2}+\cancel{x_2^2}+\cancel{y_1^2}+\cancel{y_2^2}$$

$$-2x_1y_1-2x_2y_2=0$$

Platí-li Pyth. věta

$$x_1y_1+x_2y_2=0$$

, pak jsou vektory x a y na sebe kolmé

a reálné číslo

$$x_1y_1+x_2y_2=0.$$

Výraz $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ měří, zda jsou vektory x a y na sebe kolmé. Nazýváme ho skalární součin.

Vidíme, že jde o symetrickou bilin. formu, navíc příslušná kvadr. forma

$$x_1^2 + x_2^2$$

je pozitivně definitní a měří velikost vektoru v druhé mocnině.

To nás inspiruje k definici abstraktního skalárního součinu:

Definice Skalární součin na reálném vektorovém prostoru V je zobrazení $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ takové, že

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l} \langle au + bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle v, w\rangle \\ \langle u, av + bw\rangle = a\langle u, v\rangle + b\langle u, w\rangle \end{array}\right\} \langle\ ,\ \rangle \text{ je bilin. forma}$$

2) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ $\quad\langle\ ,\ \rangle$ je symetrická bilin. forma

3) $\langle u, u\rangle > 0$ pro všechna $u \neq \vec{o}$ $\quad$ příslušná kvadr. forma je pozitivně definitní

<u>Příklady</u> ① $U = \mathbb{R}^n$, $\langle\ ,\ \rangle$ stand. skal. součin na $\mathbb{R}^n$

$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

② $U = \mathbb{R}^3$

$\langle x, y\rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 7x_3y_3$

Jde o sym. bilin. formu

příslušná kvadr. forma je podle Sylvestrova kritéria pozitivně definitní — viz příklad na Sylv. kritérium (předchozí)

3) $U = C[a,b]$ spojité reálné funkce na intervalu $[a,b]$.

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

- symetr. bilin. forma
- kvadr. forma

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,dx$$

je pro $f \not\equiv 0$ kladná.

Normu vektoru definujeme jako

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

Řekneme, že u a v jsou na sebe kolmé (ortogonální),

jestliže $\langle u, v\rangle = 0$.

Komplexní vekt. prostory se skalárním součinem

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$. Skalární součin na U je zobrazení $\langle \, , \, \rangle : U \times U \to \mathbb{C}$ s vlastnostmi:

(1 a) $\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall u, v, w \in U$

$$\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$$

linearita v 1. složce

(1b) $\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall u, v, w \in U$

$$\langle u, av + bw \rangle = \bar{a}\langle u, v \rangle + \bar{b}\langle u, w \rangle$$

kde $\bar{a}$ a $\bar{b}$ jsou komplexně sdružená čísla k a, b.

V 2. složce není skal. součin lineární.

(2) $\forall u, v \in U \quad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

(3) $\forall u \in U \setminus \{0\}$ platí $\langle u, u \rangle > 0$

Poznámka: Z (2) plyne $\langle u, u \rangle = \overline{\langle u, u \rangle}$.

Tedy $\langle u,u\rangle$ je reálné číslo. Proto má smysl požadovat, aby $\langle u,u\rangle > 0$ pro $u \neq \vec{0}$.

__Poznámka__ $\langle \vec{0}, u\rangle = 0$

$\langle \vec{0}, u\rangle = \langle 0\cdot v, u\rangle = 0\cdot\langle v, u\rangle = 0$

Dále $\langle u, \vec{0}\rangle = \overline{\langle 0, u\rangle} = \overline{0} = 0.$

A tedy také $\langle \vec{0}, \vec{0}\rangle = 0.$

__Příklady__: (1) $U = \mathbb{C}^n$, stand. skal. součin na $\mathbb{C}^n$

$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots + x_n\overline{y_n}$ $\quad \overline{y_i}$ je komplexně sdružené

$\langle ax, y\rangle = (ax_1)\overline{y_1} + (ax_2)\overline{y_2} + \dots = a(x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots) = a\langle x, y\rangle$

$\langle x, by\rangle = x_1\overline{(by_1)} + x_2\overline{(by_2)} + \dots = \overline{b}(x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} \dots) = \overline{b}\langle x, y\rangle$

$\langle x, x\rangle = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \dots = |x_1|^2 + |x_2|^2 \dots |x_n|^2 > 0$ pro $x \neq \vec{0}.$

I zde (v kompl. vekt. prostorech) definujeme normu vektoru u

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$$

a říkáme, že u a v jsou kolmé, jestliže $\langle u,v\rangle = 0$.

Příklad 2 Spojité funkce na intervalu $[a,b]$ s hodnotami v $\mathbb{C}$. Je to komplexní vektorový prostor

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

Toto splňuje všechna pravidla pro skal. součin.

CAUCHYOVA NEROVNOST

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skalárním součinem $\langle\,,\rangle$. Potom pro všechna $u,v \in U$ platí

$$|\langle u,v\rangle| \le \|u\| \cdot \|v\|$$

Rovnost nastane, právě když jsou vektory u a v lineárně závislé.

Pro skal. součin na $\mathbb{R}^n$ to znamená, že

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$$

Pro skal. součin na $C[a,b]$ to znamená, že

$$\left| \int_a^b f(x) g(x)\,dx \right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\,\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

Důkaz pro reálné vekt. prostory

(1) Nechť $u = \vec{0}$ a $v = \vec{0}$. Pak platí rovnost.

(2) Předpokládejme, že $u \neq \vec{0}$ a uvažujme pro všechna $t \in \mathbb{R}$ normu vektoru $tu - v$:

$$0 \le \|tu - v\|^2 = \langle tu - v, tu - v \rangle = t^2 \langle u, u \rangle \underbrace{- t \langle u, v \rangle - t \langle v, u \rangle}_{=} + \langle v, v \rangle$$

$$= t^2\langle u,u\rangle - 2t\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = t^2\|u\|^2 - 2t\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

Toto je kvadratická funkce $p(t)$ v proměnné t.

Vidíme, že $p(t) \geq 0$, tedy diskriminant této funkce

$$D \leq 0$$

Diskriminant je roven

$$0 \geq D = \left(2\langle u,v\rangle\right)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2$$

Odtud

$$4\|u\|^2\|v\|^2 \geq 4\left|\langle u,v\rangle\right|^2$$

Po vydělení 4 a odmocnění

$$\|u\|\|v\| \geq \left|\langle u,v\rangle\right|$$

Jak je to s rovností?

$tu-v$ může být rovno $\vec{0}$ právě když u a v jsou lin. závislé. Takže pro u, v lin. závislé má rovnice $\|tu-v\|^2=0$ právě jedno řešení a

$$D=0 \Rightarrow \|u\|\|v\| = |\langle u,v\rangle|$$

Jsou-li u, v lin. nezávislé, rovnice $\|tu-v\|^2=0$ nemá řešení a

$$D<0 \Rightarrow \|u\|\|v\| > |\langle u,v\rangle| .$$

Důsledek: Platí pro $u \neq \vec{0}$ a $v \neq \vec{0}$

$$-1 \le \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|} \le 1$$

Proto existuje právě jeden úhel α z intervalu $[0,\pi]$ tak, že

$$\cos\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|} .$$

Tento úhel nazýváme odchylkou vektorů u a v.