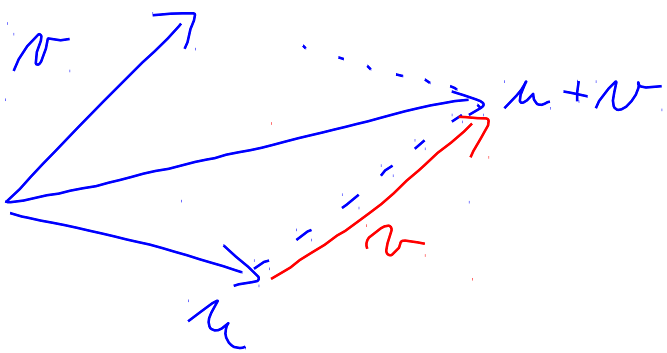
Prostory se skalárním součinem

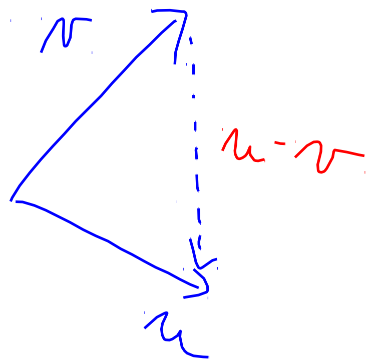
Cauchyova nerovnost $\quad |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

Důsledkem Cauchyovy nerovnosti je trojúhelníková nerovnost

$$\|u \pm v\| \leq \|u\| + \|v\|$$





(2)

Nad $\mathbb{R}$

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle}_{2\langle u,v\rangle} + \langle v,v\rangle$$

$$\leq \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + 2\|u\|\|v\|$$

$$= \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\|+\|v\|)^2$$

Řekneme, že vektory $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou ortogonální, jestliže
$\langle u_i, u_j\rangle = 0$ pro $i \neq j$
(po dvou kolmé).

Lemma Jestliže jsou vektory $u_1, u_2, \dots u_k$ ortogonální a nenulové, jsou lin. nezávislé.

Důkaz: Nechť $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{0}$ $\quad / \langle -, u_j\rangle$

$$\langle a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots, u_j\rangle = \langle \vec{0}, u_j\rangle = 0$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \langle u_i, u_j \rangle = 0 \qquad \langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad i \neq j$$

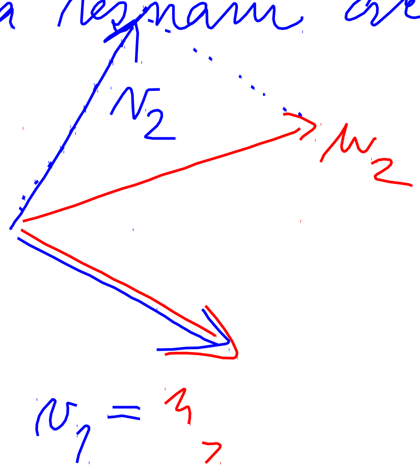
$$\langle u_j, u_j \rangle \neq 0 \quad u_j \neq \vec{0}$$

$$a_j \langle u_j, u_j \rangle = 0$$

$\Rightarrow a_j = 0$. Tedy všechna a_j jsou nulová a vektory jsou LN.

Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces

Algoritmicky změní seznam lin. nezávislých vektorů na seznam ortogonálních vektorů se stejným lin. obalem.



(u_1, u_2) lin. nezávislé

(v_1, v_2) ortogonální

G – S ortogonalizační proces

Mějme vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$ lin. nezávislé v prostoru V se skalárním součinem. Pak existují jednoznačně určené vektory

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - a_1 v_1$$

$$v_3 = u_3 - b_1 v_1 - b_2 v_2$$

$$v_4 = u_4 - c_1 v_1 - c_2 v_2 - c_3 v_3$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

které jsou ortogonální a splňují

$$[v_1, v_2, \ldots, v_i] = [u_1, u_2, \ldots, u_i] \text{ pro } 1 \leq i \leq k.$$

<u>Důkaz</u>: Koeficienty $a_1, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, \ldots$ jsou určeny jednoznačně podmínkou $v_i \perp v_1, v_2, \ldots v_{i-1}$

(5)

$$v_2 = u_2 - a_1 v_1 \quad / \langle -, v_1 \rangle$$

$$0 = \langle v_2, v_1 \rangle = \langle u_2, v_1 \rangle - a_1 \langle v_1, v_1 \rangle \qquad v_1 = u_1 \neq 0$$

$$a_1 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}$$

$$v_3 = u_3 - b_1 v_1 - b_2 v_2 \quad / \langle -, v_1 \rangle$$

$$0 = \langle v_3, v_1 \rangle = \langle u_3, v_1 \rangle - b_1 \langle v_1, v_1 \rangle - b_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{=0}$$

$$b_1 = \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}$$ analogicky $$b_2 = \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle}$$

atd

$$[v_1] = [u_1]$$

$$[v_1, v_2] = [v_1, u_2 - a_1 v_1] = [v_1, u_2] = [u_1, u_2]$$

atd.

Ortonormální báze

je báze tvořená ortonormálními vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \qquad \|u_i\| = 1.$$

Věta Každý vekt. prostor konečné dimenze se skal. součinem má ortonormální bázi.

Důkaz: Nechť $w_1, w_2, \dots, w_n$ je nějaká báze.

Provedeme s jejími vektory G–S ortogonalizační proces.

Dostaneme $v_1, v_2, \dots, v_n$, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ pro $i \neq j$

$$[v_1, v_2, \dots, v_n] = U.$$

Nyní položíme

$$u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|} \qquad \|u_i\| = \left\| \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\rangle}$$

$$= \frac{\langle v_i, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = 1.$$

Ortogonální doplněk podprostoru

Jsme v prostoru U a máme podprostor $V \subseteq U$.

Ortogonální doplněk podprostoru V je

$$V^{\perp} = \{ u \in U ;\ \forall v \in V \ \langle v, u \rangle = 0 \}.$$

$V^{\perp}$ je vekt. podprostor

$\vec{o} \in V^{\perp}$

$v_1, v_2 \in V^{\perp}$ $\quad \langle a v_1 + b v_2, u \rangle = a \langle v_1, u \rangle + b \langle v_2, u \rangle = 0 \quad \forall u \in V$

$\Rightarrow a v_1 + b v_2 \in V^{\perp}$

Věta $V + V^{\perp} = U$ a tento součet je direktní, tj. $V \cap V^{\perp} = \{\vec{o}\}$. Píšeme tedy $V \oplus V^{\perp} = U$.

Důkaz: Nechť V má ortonormální bázi $v_1, v_2, \dots, v_k$. Tuto bázi doplníme na ortonormální bázi celého U. Ta bude $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$.

Dokážeme, že $v_{k+1}, \dots v_n$ je báze (ortonormální) podprostoru $V^\perp$.

$v_{k+1}, \dots, v_n \in V^\perp$ jsou kolmé na všechny vektory z V.

$[v_{k+1}, \dots v_n] \subseteq V^\perp$

Nechť $u \in V^\perp$ $\quad u = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n$

$$\langle u, v_i \rangle = 0 \text{ pro } i = 1, 2, \dots k$$

$$0 = \langle u, v_i \rangle = \langle a_1 v_1 + \dots, v_i \rangle = a_i \langle v_i, v_i \rangle = a_i$$

Proto $u = a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n \Rightarrow u \in [v_{k+1}, \dots, v_n]$,

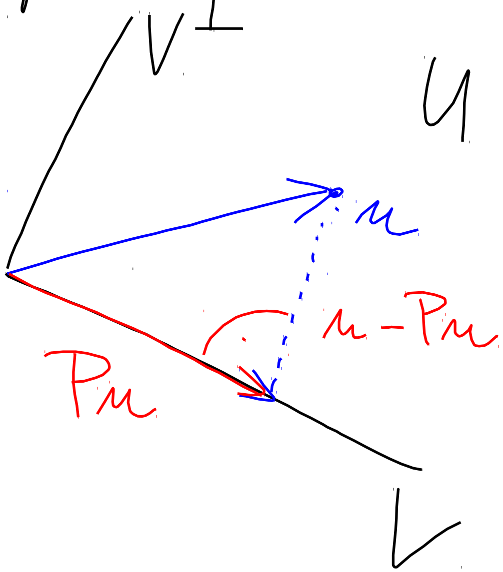
tedy $V^\perp = [v_{k+1}, \dots v_n]$.

$$\Rightarrow u \in U \qquad u = \underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k}_{\in V} + \underbrace{(a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n)}_{\in V^\perp}$$

$$U = V + V^\perp$$

$V \cap V^\perp = \{0\}$

jestliže $u \in V \cap V^\perp$, pak $\langle \underset{V}{\underset{\cap}{u}}, \underset{V^\perp}{\underset{\cap}{u}} \rangle = 0 \Rightarrow u = \vec{o}$. $\blacksquare$



Kolmá projekce na podprostor V je zobrazení $P: U \to V$ definované takto: každý vektor $u \in U$ lze pak jednoznačně zapsat jako součet

$$u = v + w, \quad v \in V, \ w \in V^\perp$$

Kdyby $u = v_1 + w_1 = v_2 + w_2$ a $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in V^\perp$

pak by $V \ni v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in V^\perp$

$$v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in V \cap V^\perp = \{\vec{o}\}$$

$\Longrightarrow$ $v_1 = v_2$ a $w_1 = w_2$.

Definujme $P : U \to V$ jako

$$Pu = v \quad \text{kde když} \quad u = v + w,\ v \in V,\ w \in V^{\perp}$$

Prakticky lze ledaž psát takto:

$\boxed{Pu \text{ je vektor z } V \text{ pro který platí, že } u - Pu \in V^{\perp}}$

Z této definice vycházíme při výpočtu.

<u>Ukázka</u>: Nechť $V = [v_1, v_2, v_3]$

$u \in U$ Kolmá projekce vektoru u do V je vektor

$$Pu = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \in V$$

takový, že $u - Pu = u - a_1 v_1 - a_2 v_2 - a_3 v_3 \perp V$

To je ale zaručeno, pokud

$$u - Pu \perp v_1, v_2, v_3$$

To nám dává rovnice pro koeficienty a_1, a_2, a_3:

$$\langle a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 - u, v_i \rangle = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\langle a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3, v_i \rangle = \langle u, v_i \rangle$$

$$a_1 \langle v_1, v_1 \rangle + a_2 \langle v_2, v_1 \rangle + a_3 \langle v_3, v_1 \rangle = \langle u, v_1 \rangle$$

$$a_1 \langle v_1, v_2 \rangle + a_2 \langle v_2, v_2 \rangle + a_3 \langle v_3, v_2 \rangle = \langle u, v_2 \rangle$$

$$a_1 \langle v_1, v_3 \rangle + a_2 \langle v_2, v_3 \rangle + a_3 \langle v_3, v_3 \rangle = \langle u, v_3 \rangle$$

Soustava 3 rovnic a 3 neznámých.
Jsou-li v_1, v_2, v_3 ortonormální, pak má soustava jednoduchý tvar

$$a_1 \cdot 1 = \langle u, v_1 \rangle$$

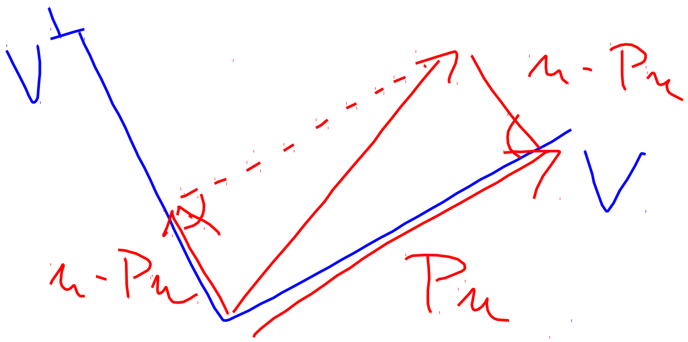
$$a_2 = \langle u, v_2 \rangle$$

$$a_3 = \langle u, v_3 \rangle$$

<u>Pozorování</u>: Je-li Pu kolmá projekce do V, je $u - Pu$ kolmá projekce do $V^\perp$ neboť $(V^\perp)^\perp = V$

a

$$u = \underbrace{u}_{V} + \underbrace{(u - Pu)}_{V^\perp}$$



<u>2. pozorování</u> Kolmá projekce $P: U \to V$ je lineární

naznačení:

$$u_1 = Pu_1 + u_1 - Pu_1 \quad \text{kde } u_1 - Pu_1 \in V^\perp$$

$$u_2 = Pu_2 + u_2 - Pu_2 \quad \text{kde } u_2 - Pu_2 \in V^\perp$$

Pak

$$u_1 + u_2 = \underbrace{Pu_1 + Pu_2}_{\in V} + \underbrace{(u_1 + u_2) - (Pu_1 + Pu_2)}_{\in V^\perp}$$

Tato je definice toho, že

$$P(u_1+u_2) = Pu_1 + Pu_2$$

Věta Důležité vlastnosti kolmé projekce

Nechť V je vekt. podprostor v U, nechť $u \in U$ a Pu je jeho kolmá projekce do V.

Pu je jediný vektor z V, který minimalizuje vzdálenost $\|u - v\|$ pro vektory $v \in V$

$$\|u - Pu\| = \min_{v \in V} \|u - v\|$$

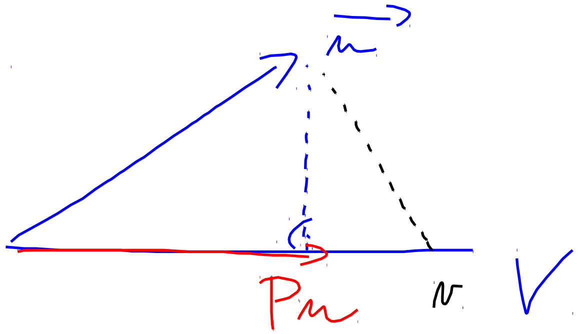
Důkaz: Pro libovolné $v \in V$ máme

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v \rangle = \langle \underbrace{(u-Pu)}_{\in V^\perp} + \underbrace{(Pu-v)}_{\in V}, \underbrace{(u-Pu)}_{\in V^\perp} + \underbrace{(Pu-v)}_{\in V} \rangle$$

$$= \langle u-Pu, u-Pu \rangle + \langle u-Pu, Pu-v \rangle + \langle Pu-v, u-Pu \rangle + \langle Pu-v, Pu-v \rangle$$

$$= \|u-Pu\|^2 + 0 + 0 + \|Pu-v\|^2$$

$\|u-v\|^2$ nabývá svého minima právě když $v = Pu$.



Poznámka – důležitá (Pythagorova věta)

Jestliže $x \perp y$ pak $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

<u>Důkaz:</u> $\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \underbrace{\langle x,y\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{=0} + \langle y,y\rangle$

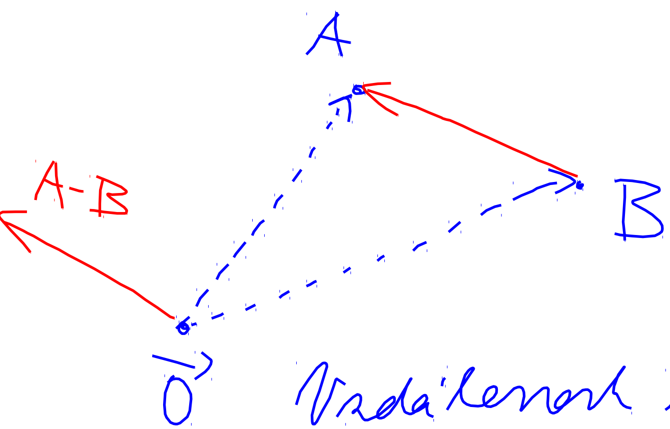
Eukleidovská geometrie

– přidá vzdálenosti a odchylky.

U vekt. prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$.

Vzdálenost dvou bodů A a B v U je

$$\mathrm{dist}(A,B) = \|A-B\|$$



$\mathcal{M}$ afinní podprostor v U

$$\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M})$$

bod   vekt. podprostor U (zaměření)

Vzdálenost bodu A od afinního podprostoru $\mathcal{N}$ je

$$\mathrm{dist}(A,\mathcal{N}) = \min_{N\in\mathcal{N}} \mathrm{dist}(A,N) = \min_{N\in\mathcal{N}} \|N-A\|$$

Vzdálenost afinních podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ je

$$\mathrm{dist}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \min_{\substack{M\in\mathcal{M}\\ N\in\mathcal{N}}} \|M-N\|$$

Vypočít vzdálenosti budeme pomocí kolmých projekcí.

<u>Věta</u> (a) Vzdálenost bodu A od afinního podprostoru $\mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$ je rovna velikosti kolmé projekce vektoru $A-B$ do $Z(\mathcal{N})^{\perp}$.

(b) Následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(1) $\mathrm{dist}(A,\mathcal{N}) = \|N-A\|$ pro nějaké $N\in\mathcal{N}$

(2) $A-N \perp Z(\mathcal{N})$

(3) $N = B + P_{Z(\mathcal{N})}(A-B)$

17

(a) $X \in \mathcal{N}$ $\quad X = B + u,\ u \in Z(\mathcal{N})$

$$\|A - X\| = \|\underbrace{A - B}_{} - \underbrace{u}_{Z(\mathcal{N})}\| \geq \|A - B - P_{Z(\mathcal{N})}(A-B)\|$$

podle předchozí věty o kolmé projekci

Rovnost nastane právě pro $u = P_{Z(\mathcal{N})}(A-B)$.

$$\|A - B - P_Z(A-B)\| = \|P_{Z(\mathcal{N})^\perp}(A-B)\|.$$

(b) nechť $N = B + u$

$\|A - N\|$ nabývá minima pro $u = P_{Z(\mathcal{N})}(A-B)$.

Odtud $N = B + u = B + P_{Z(\mathcal{N})}(A-B)$ tedy (1) $\Rightarrow$ (3)

(3) $\Rightarrow$ (2) $\quad A - N = A - B - P_{Z(\mathcal{N})}(A-B) = P_{Z(\mathcal{N})}(A-B) \perp Z(\mathcal{N})$

(2) $\Rightarrow$ (1) $u \in Z(\mathcal{N})$ libovolný

a platí $A - N \perp Z(\mathcal{N})$

$$\|\underbrace{A - N}_{Z(\mathcal{N})^{\perp}} - \underbrace{u}_{\in Z(\mathcal{N})}\|^2 = \|A-N\|^2 + \|u\|^2 \geq \|A-N\|^2$$

Tedy N minimalizuje vzdálenost A od bodů $N+u \in \mathcal{N}$.

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \|A-N\|.$$

Věta: (a) Vzdálenost dvou afinních podprostorů $\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M})$ a $\mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$ je rovna velikosti kolmé projekce vektoru $(A-B)$ do zaměření podprostoru $\left(Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})\right)^{\perp}$.

(b) Následující tvrzení jsou pro body $M \in \mathcal{M}$, $N \in \mathcal{N}$ ekvivalentní:

(1) $\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \|M - N\|$

(2) $M - N \perp Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})$

(3) $M - N = P_{(Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N}))^\perp}(A-B)$

<u>Důkaz</u> (a) $\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \operatorname{dist}(A + Z(\mathcal{M}), B + Z(\mathcal{N})) =$

$= \operatorname{dist}(A, B + Z(\mathcal{N}) + Z(\mathcal{M})) = P_{(Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N}))^\perp}(A-B)$

podle předchozí věty

(b) (1) => (3) $M = A + u$, $N = B + v$

$\|M - N\| = \|A - B + \underbrace{u - v}_{Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N})}\|$ nabývá minima pro $u - v = P_{Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N})}(A-B)$

Aby $\|M-N\|$ byla minimální, musí být

$$M-N = A-B - P_{Z(m)+Z(n)}(A-B)$$

$$= P_{(Z(m)+Z(n))^{\perp}}(A-B) \quad \text{by } (3).$$

(3) $\Rightarrow$ (2)

$$M-N = P_{(Z(m)+Z(n))^{\perp}}(A-B) \perp Z(m)+Z(n)$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Nechť $M-N \perp (Z(m)+Z(n))$, $u \in Z(m)$, $v \in Z(n)$ libovolné

$$\|M+u-(N+v)\|^2 = \|\underbrace{M-N}_{(Z(m)+Z(n))^{\perp}} + \underbrace{u-v}_{\in Z(m)+Z(n)}\|^2 \geq$$

Pyth. věta

$$= \|M-N\|^2 + \|u-v\|^2.$$

Vzdálenost M a N se realizuje v bodech M a N.