

VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

U reálný prostor nad \mathbb{K} , lineární operátor $\varphi: U \rightarrow U$

Příklad čísel $U = \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Máme pro uvažování

$$V = \left[v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \text{ invariantní}$$

podprostor:

$$\varphi(V) \subseteq V$$

$$\varphi(v_1) = v_1 + 2v_2$$

$$\varphi(v_2) = -2v_1 + v_2$$

$$W = \left[w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \text{ také invariantní podprostor}$$

$$\varphi(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 4w_1 - w_2 \quad \varphi(w_2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = w_1 + 4w_2 \Rightarrow \varphi(W) \subseteq W$$

(2)

Vismime bazi $\alpha = (v_1, v_2, w_1, w_2)$

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \left((\varphi(v_1))_{\alpha} \quad (\varphi(v_2))_{\alpha} \quad (\varphi(w_1))_{\alpha} \quad (\varphi(w_2))_{\alpha} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right)$$

Vēta Nihil $\varphi : U \rightarrow U$ ir lineārs operators, V a W ir

div invariantu apakšprogru kabe, tē $U = V \oplus W$.

Nihil v_1, v_2, \dots, v_k ir baze V a w_1, w_2, \dots, w_l ir baze W .

Pat ir bazi $\alpha = (v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l)$ ma φ matricu

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \left(\begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & B \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} k \\ \} l \end{array} \right\} \begin{array}{l} k \\ l \end{array}$$

(3)

Brndou naš sazimat pedevnim 1-dimenzionalkim invariantnim podprostorom.

Príklad $U = \mathbb{R}^2$ $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podprostor $[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$ je invariantnim.

Jedličie $[v] \subset U$ je invariantnim necht podprostor, $v \neq \vec{0}$, keď

existuje $\lambda \in \mathbb{K}$ $\varphi(v) = \lambda v$.

Pre dabin nektory $a [v]$ platí

$$\varphi(av) = a \varphi(v) = a \lambda v = \lambda(av)$$

Definice Vektor $v \in U$ miery od $\vec{0}$ je nazýva vlastným vektorom lin. operácie $\varphi: U \rightarrow U$, jedličie platí

$$\varphi(v) = \lambda v$$

pre nejake $\lambda \in \mathbb{K}$. Tote λ je nazýva vlastným číslom príslušnej

vládním vektoru v .

(4)

Výpočet vlastního čísla:

- λ je vlastní číslo \Leftrightarrow rovnice $\varphi(u) = \lambda u$ má netriviální vektor u má řešení $u \neq \vec{0}$.
- \Leftrightarrow rovnice $\varphi(u) - \lambda u = \vec{0}$ má řešení $u \neq \vec{0}$
- \Leftrightarrow rovnice $(\varphi - \lambda \text{id})u = \vec{0}$ má řešení $u \neq \vec{0}$
- \Leftrightarrow pro každou bázi α máme U platí
- $$\left((\varphi - \lambda \text{id})u \right)_\alpha = (\vec{0})_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
- $\Leftrightarrow (\varphi - \lambda \text{id})_{\alpha, \alpha} (u)_\alpha = 0$ má netriviální řešení $(u)_\alpha$
- $\Leftrightarrow \left((\varphi)_{\alpha, \alpha} - \lambda E \right) x = 0$ má netriviální řešení x
- $\Leftrightarrow (\varphi)_{\alpha, \alpha} - \lambda E$ nemá inverzní matici
- $\Leftrightarrow \det \left((\varphi)_{\alpha, \alpha} - \lambda E \right) = 0$
- $\Leftrightarrow \lambda$ je řešením rovnice $\det \left((\varphi)_{\alpha, \alpha} - \lambda E \right) = 0$.

(5)

Primer λ je vlastní čísla operátoru φ právě když je kořenem rovnice $\det((\varphi)_{\alpha, \alpha} - \lambda E) = 0$.

Jak vypadá rovnice $\det(A - \lambda E) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & \\ & & \dots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) + \text{členy}$$

kteř se λ vyskytne v maximálně $n-1$ menších maticích

$$= (-\lambda)^n + \lambda^{n-1} b_{n-1} + \lambda^{n-2} b_{n-2} + \dots + \lambda b_1 + b_0$$

Polynom stupně n , u λ^n je koeficient $(-1)^n$, $b_0 = \det A$ (dosadíme $\lambda = 0$).

(6)
Charakterističnyj polynom matice A (rozmer $n \times n$) je
 $\det(A - \lambda E)$.

Lemma Podobne matice majú rovný charakterističnyj polynom.

Důkaz: B a A jsou podobné, existuje
 $B = P^{-1}AP$ pro nějakou regulární matici P

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda E) &= \det(P^{-1}AP - \lambda \underbrace{P^{-1}EP}_E) = \det(P^{-1}(A - \lambda E)P) = \\ &= \det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det P = (\det P)^{-1} \cdot \det P \cdot \det(A - \lambda E) \\ &= \det(A - \lambda E).\end{aligned}$$

Charakterističnyj polynom lineárního operátora $\varphi: U \rightarrow U$ je

$$\det((\varphi)_{\alpha, \alpha} - \lambda E)$$

kde α je libovolná báze v U . (Tato definice nezávisí na volbě báze α .)

(7)

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = A$$

$$(\varphi)_{\beta, \beta} = \underbrace{(id)_{\beta, \alpha}}_{P^{-1}} (\varphi)_{\alpha, \alpha} \underbrace{(id)_{\alpha, \beta}}_P = P^{-1} A P$$

Pada $\det((\varphi)_{\alpha, \alpha} - \lambda E) = \det((\varphi)_{\beta, \beta} - \lambda E)$

Zpět k počítání vlastních čísel a vlastních vektorů

Vlastní čísla operátoru φ malisverme jako kořeny char. polynomu
 $\det((\varphi)_{\alpha, \alpha} - \lambda E) = 0$.

μ -ti λ vlastní čísla, pak mají λ vlastní vektor μ μ -krát
 jednoduše, neboť vlastní vektor (přemění jeho souřadnice
 v λu) jsou díky úvahám homogenní soustavy rovnice

$$\left((\varphi)_{\alpha, \alpha} - \lambda E \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Vlastní vektor $\mu \in V$ lze zvolit, že $(u)_{\alpha} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

(8)

$$\varphi u = \lambda u$$

\Leftrightarrow

$$(\varphi - \lambda \text{id}) u = 0$$

$\Leftrightarrow u \text{ lin } \alpha$

$$(\varphi - \lambda \text{id})_{\alpha, \alpha} (u)_{\alpha} = 0$$

\Leftrightarrow

$$((\varphi)_{\alpha, \alpha} - \lambda E) (u)_{\alpha} = 0.$$

Prüklad $U = \mathbb{R}^2$ $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Matrixe φ in Basis $\varepsilon = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ $\pi = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Charakteristisches Polynom φ π

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} &= (\lambda-3)(\lambda+2) + 4 = \lambda^2 - \lambda - 6 + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2 \\ &= (\lambda-2)(\lambda+1) \end{aligned}$$

(9)

Matritsa A da \vec{v}

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = -1$$

\vec{v}_1 matritsa A 2 \vec{v}_1 matritsa

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ 4 & -2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reseni $\vec{v}_1(x_1, x_2) = (a, a)$. Matritsa A matritsa \vec{v}_1 $a(1, 1)$, $a \neq 0$.

Matritsa A matritsa \vec{v}_2 \vec{v}_2 - \uparrow

$$\begin{pmatrix} 3-(-1) & -1 \\ 4 & -2-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x_1, x_2) = a(1, 4)$$

Matritsa A matritsa \vec{v}_2 \vec{v}_2 - \uparrow \vec{v}_2 $a \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Rychlá kuchařka pro práci s lineárními polynomy

Tvrzení: Nechtě $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$.

x_0 je kořenem polynomu $p(x)$, právě když

$$p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$$

kde q je polynom stupně $n-1$. (kde $q(x) = a_n x^{n-1} + \dots$, kde $a_n \neq 0$)

Důkaz: $\Leftarrow p(x_0) = (x_0 - x_0) q(x_0) = 0 \cdot q(x_0) = 0$

\Rightarrow Nechtě $p(x_0) = 0$, pak

$$p(x) = p(x) - p(x_0) = a_n x^n - a_n x_0^n + a_{n-1} x^{n-1} - a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x - a_1 x_0 + a_0 - a_0$$

$$= a_n (x^n - x_0^n) + a_{n-1} (x^{n-1} - x_0^{n-1}) + \dots + a_1 (x - x_0) =$$

$$(x - x_0) (x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + \dots + x_0^{n-1})$$

$$= (x - x_0) q(x)$$

$$\begin{aligned} x^2 - x_0^2 &= (x - x_0)(x + x_0) \\ x^3 - x_0^3 &= (x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2) \end{aligned}$$

(11)

Praktické úvznení

$$p(x) = \pm 1x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0, \quad n \geq 1$$

kdě $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 \in \mathbb{Z}$

Jestliže má $p(x)$ racionální kořen, pak je to celé číslo, které dělí absolutní člen a_0 .

Důkaz: Necht' $x_0 = \frac{c}{d}$ je kořen, c, d nesoudělná.

$$\pm \frac{c^n}{d^n} + a_{n-1} \frac{c^{n-1}}{d^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{c}{d} + a_0 = 0 \quad \Bigg| d^n$$

$$\pm \underbrace{c^n + a_{n-1}c^{n-1}d + \dots + a_1cd^{n-1}}_{\text{je dělitelný číslem } c} + \underbrace{a_0d^n}_{\text{dělitelné číslem } c} = 0$$

$\Rightarrow a_0d^n$ je dělitelné číslem c

\Rightarrow protože \underline{c} a \underline{d} jsou nesoudělná, tak c dělí a_0 .

Príklad $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ⁽¹²⁾ $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Najdite maticu čísla a maticu nebhy.

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^2(-4-\lambda) + \dots$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

Koreny char. polynomu hľadame medzi deliteľmi čísla 6, tj. medzi číslami $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Hornerovo schéma

| | | | | |
|---|----|---|-----|---|
| | -1 | 6 | -11 | 6 |
| 2 | -1 | 4 | -3 | 0 |

vysledok desasemi do polynomu

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 4\lambda - 3)$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2} = \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$$

(13)

Vlastní čísla $\lambda_1 = 2$

$$\lambda_2 = 3$$

$$\lambda_3 = 1$$

Vlastní vektory v_1, v_2, v_3 jsou lineárně nezávislé (nekvadratické)

$$\left(\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \right) v_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vesmírná báze $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$

Polem

$$\begin{aligned} (\varphi)_{\alpha, \alpha} &= \left((\varphi(v_1))_{\alpha} \quad (\varphi(v_2))_{\alpha} \quad (\varphi(v_3))_{\alpha} \right) = \left((2v_1)_{\alpha} \quad (3v_2)_{\alpha} \quad (v_3)_{\alpha} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vēta $\text{Ker } \varphi : U \rightarrow U$ ir lineāru operāta α α μ bāze U minimālu slāpumu veidus. Pat

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

kur $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ir reālu slāpumu veidus.

Dokā: $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \left((\varphi(v_1))_{\alpha} \quad (\varphi(v_2))_{\alpha} \quad \dots \quad (\varphi(v_n))_{\alpha} \right) = \left((\lambda_1 v_1)_{\alpha} \quad (\lambda_2 v_2)_{\alpha} \quad \dots \quad (\lambda_n v_n)_{\alpha} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Věta: Množina vektorů je lineárně nezávislá právě tehdy když žádná netriviální lineární kombinace jejích vektorů není rovna nulovému vektoru.

(Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ jsou reálná čísla. Pak odpovídající vektorů v_1, v_2, \dots, v_k jsou lin. nezávislé.)

Důkaz: Matematickou indukcí.

$k=1$ platí $v_1 \neq \vec{0}$, je lin. nezávislý.

Nechť věta platí pro $k \geq 1$. Dokažeme ji pro $k+1$.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}$ jsou libovolná čísla, v_1, v_2, \dots, v_{k+1} vektorů. Nechtě

$$(*) \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} = \vec{0}$$

Applikujeme φ

$$a_1 \varphi(v_1) + a_2 \varphi(v_2) + \dots + a_{k+1} \varphi(v_{k+1}) = \vec{0}$$

$$(1) \quad a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \dots + a_k \lambda_k v_k + a_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = \vec{0}$$

(*) vynásobíme číselm λ_{k+1}

(16)

$$(2) \quad \lambda_{k-1} a_1 v_1 + \dots + \lambda_{k-1} a_k v_k + \lambda_{k+1} a_{k+1} v_{k+1} = \vec{0}$$

Odečtem (1) - (2) dostaneme

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) a_1 v_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_{k+1}) a_k v_k + \vec{0} = \vec{0}$$

Vi máme, že v_1, \dots, v_k je LN (indukčným predpokladom).

Preto $(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) a_1 = \dots = -(\lambda_k - \lambda_{k+1}) a_k = 0$

Tedy $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$. Dosadením do (+) pak dostaneme, že
 buď $a_{k+1} v_{k+1} = \vec{0}$ a buď $v_{k+1} \neq \vec{0}$, či $a_{k+1} = 0$. □

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a také n vektorů v_1, \dots, v_n je

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

pak λ_i a v_i jsou vlastní čísla a vlastní vektory.

$$(\varphi(v_1))_{\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots = \lambda_1 v_1 \Rightarrow v_1 \text{ je vlastní vektor}$$

(17)

Důsledek předchozích tvrzení

Jedliže má lin. operátor φ na prostoru dimenze n právě n různých vlastních čísel, potom existují vektor α a β a

$$(\varphi)_{\alpha, \beta} \text{ je diagonální } \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Máme-li na vlastních čísel operátoru φ se nazývá **spektrum operátoru**.