

ORTOGONÁLNÍ OPERÁTORY

$\varphi: U \rightarrow U$ nad \mathbb{C} unitární $\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$

$\varphi: U \rightarrow U$ nad \mathbb{R} ortogonální $\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$

Klasičeská a unitární operátory $\varphi: U \rightarrow U$ unitární,

nad n -D existuje orthonormální báze tvořená vlastními

vektory. V této bázi (α) je

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

λ_i vlastní čísla z \mathbb{C}

$$|\lambda_i| = 1.$$

Pro unitární operátory jako věta obecně neplatí:

$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ortogonální (1) $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

nema vlastní ul. čísla a jde o otáčení kolem počátku.

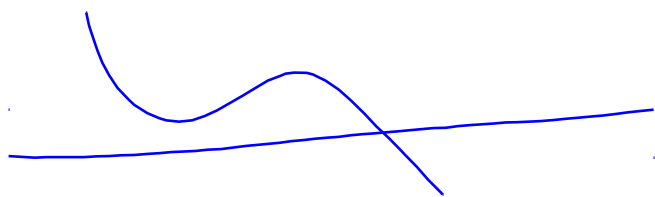
$$(2) \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \text{где } a^2 + b^2 = 1$$

має власні числа 1 та -1 а їде φ симетрич. подіє
одн. орт. власним вектором e_1 .

Ортogonalні операції в \mathbb{R}^3

$$\varphi(x) = Ax \quad \text{char. polynomial} = -\lambda^3 + \dots$$

Подіє їде φ polynomial тиче до ступні, має аспік їдеи реалітї
коріи. Теи має абс. hodnotu
 1 , подіє λ до $+1$ nebo -1 .



Далі коріи char. polynomial маєи тїл комплексні.

їє до $\lambda \in \mathbb{C}$ коріи polynomial а маєи тїл коріи реалітї.

їє $\bar{\lambda}$ комплексні спряжені числа тичеи коріи.

(3)

jestliže $-\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

$a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$

$\lambda \in \mathbb{C}$

pak

$-\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

$-(\bar{\lambda})^3 + \bar{a}_2(\bar{\lambda})^2 + \bar{a}_1\bar{\lambda} + \bar{a}_0 = 0$

$-(\bar{\lambda})^3 + a_2(\bar{\lambda})^2 + a_1(\bar{\lambda}) + a_0 = 0$

$\bar{\lambda}$ je rovněž kořen.

$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(x) = Ax$, ortogonální, $A \cdot A^T = E$

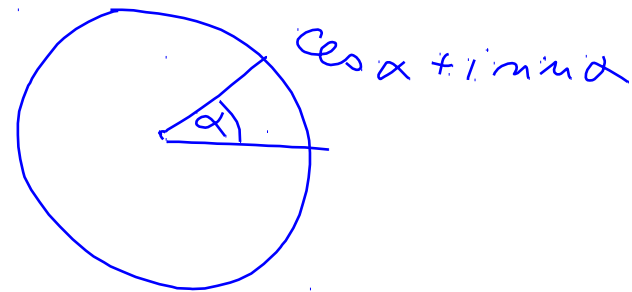
Tato reálná matice je rovinně unitární $A \cdot \underline{\underline{A}}^T = A \cdot \underline{\underline{A}}^T = E$

Vlastní čísla matice A v \mathbb{C} jsou s absolutní

hodnotou 1 — každé takové číslo lze psát jako $\cos \alpha + i \sin \alpha$

Všickna vlastni matice A jsou

$\pm 1, \cos \alpha + i \sin \alpha, \cos \alpha - i \sin \alpha$



Pro $\alpha = 0$ máme 3 kružnice ⁽⁴⁾ $\pm 1, 1, 1$

pro $\alpha = \pi$ máme 3 kružnice $\pm 1, -1, -1$

pro jiná $\alpha \in (0, 2\pi)$ má dvě kružnice s reálnými a dvě s imaginárními centry

① Všechny kružnice ortogonální matice A jsou 3×3 jsou

$$1, \cos \alpha \pm i \sin \alpha$$

vektor $u_1 \neq \vec{0}$ je vlastní vektor k vlastnímu číslu 1.

$$\mathbb{R}^3 = [u_1] \oplus [u_1]^\perp \text{ přičemž oba podprostory jsou}$$

$$\text{invariantní vůči } \varphi(x) = Ax. \quad \varphi(u_1) = u_1$$

$$\varphi([u_1]^\perp) = [u_1]^\perp$$

Tato rotace je tedy rovinná $[u_1]^\perp$ otáčení o úhel α v \mathbb{R}^3 je otáčení o úhel α kolem své osy dané vektorem u_1 .

Velikost a směr obačím $\textcircled{5}$ můžeme také, se vzhledem
vektor $v \in [u_1]^+$, zkusíme se do $\varphi(v)$ a můžeme
odchylku k němu obačím

Uhel obačím je α
$$\cos \alpha = \frac{\langle v, \varphi(v) \rangle}{\|v\| \|\varphi(v)\|}$$

$\textcircled{2}$ Vlastní čísla matice A jsou -1 , $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$

Opět $\mathbb{R}^3 = [u_1] \oplus [u_1]^\perp$

kde u_1 je vlastní vektor k -1 .

Výsledně zkusíme je dočím symetrické podle roviny $[u_1]^\perp$

a dočím kolem osy řadíme vektorem u_1 .

Velikost a směr obačím můžeme vektor $v, \varphi(v) \in [u_1]^\perp$

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, \varphi(v) \rangle}{\|v\| \|\varphi(v)\|}$$

⑥

Obecně pro ortogonální operátor $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

platí, že \mathbb{R}^n se rozkládá na disjunktivních reálných invariantních podprostorů dimenze 1 a 2.

V prostorech dim 1 je φ násobením ± 1 , v prostorech dimenze 2 je φ otáčením.

(7)

SAMOADJUNGOVANE OPERATORY

Začneme príkladom U vekt. priestor se skalárnym
rozměrom, V jeho podmnožina a P: U → U je lineárna
projekce na podmnožina V. Ukážeme, že platí

$$\forall u, v \in U: \langle P u, v \rangle = \langle u, P v \rangle$$

Důkaz

$$\langle P u, v \rangle = \langle P u, \underbrace{v - P v}_{\in V^\perp} + \underbrace{P v}_{\in V} \rangle = \langle P u, v - P v \rangle + \langle P u, P v \rangle = \underbrace{\langle P u, v - P v \rangle}_0 + \langle P u, P v \rangle = \langle P u, P v \rangle //$$

$$\langle u, P v \rangle = \langle \underbrace{u - P u}_{\in V^\perp} + \underbrace{P u}_{\in V}, P v \rangle = \langle u - P u, P v \rangle + \langle P u, P v \rangle = \underbrace{\langle u - P u, P v \rangle}_0 + \langle P u, P v \rangle = \langle P u, P v \rangle //$$

Operátorym s touto vlastností budeme učit samoadjungované
operátory.

8

Definice Necht U a V jsou vektorové prostory se skalárním součinem nad \mathbb{R} nebo \mathbb{C} . Necht $\varphi: U \rightarrow V$ je lineární operátor. Řekneme, že operátor $\varphi^*: V \rightarrow U$ je adjungovaný k operátoru φ , pokud je

$$(\forall u \in U) (\forall v \in V) \quad \langle \varphi(u), v \rangle_V = \langle u, \varphi^*(v) \rangle_U$$

Příklad (duálníita) $\varphi: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^k$ $\varphi(x) = Ax$.

Udáváme adjungovaný operátor $\varphi^*: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^m$ ve tvaru
$$\varphi^*(y) = By.$$

Můžeme také

$$\langle \varphi(x), y \rangle_{\mathbb{C}^k} = \langle x, \varphi^*(y) \rangle_{\mathbb{C}^m}$$

$$\langle Ax, y \rangle_{\mathbb{C}^k} = \langle x, By \rangle_{\mathbb{C}^m}$$

(5)

$$(Ax)^T \cdot \overline{y} = x^T (\overline{By})$$

$\forall x \in \mathbb{C}^m$
 $\forall y \in \mathbb{C}^k$

$$x^T \underline{A}^T \overline{y} = x^T \underline{B} \overline{y}$$

$$A^T = \overline{B} \quad / \quad \overline{\quad}$$

$$\overline{A}^T = B$$

Sobrazem n matrici $B = \overline{A}^T$ je adjungované
 n sobrazem $\varphi(x) = Ax$.

Toto lze zobecnit na libovolné prostory (nejin na \mathbb{C}^n a \mathbb{C}^k)

Příklad: Ke každému sobrazem $\varphi: U \rightarrow V$ existuje právě
jedno adjungované sobrazem $\varphi^*: V \rightarrow U$.

Definice: Omezte $\varphi: U \rightarrow U$ se namyřte samoadjungova-
ným, jindež $\varphi^* = \varphi$, tj. $\forall u, v \in U \langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$

Průklady ① $U = \mathbb{C}^n$ ⁽¹⁰⁾ $\varphi(x) = Ax$

Na n-ume, se matice adjungované operace je

$$B = \bar{A}^T$$

a ta se nurn rovná A , aly by operace samoadjungovaná

Tedy platí

$$A = \bar{A}^T$$

Takym matice m. n. kame hermitovské

Průklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 3 & -5i \\ 2-3i & 5i & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad $U = \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$

Jele musí být stabil, aby φ byl samoadjungovaný, se

$$A = \bar{A}^T = A^T$$

Samoadjungované operátory na \mathbb{R}^n jsou měny symetrickými maticemi.

Příklad geometrický $P: U \rightarrow U$ je kolmá projekce na podprostor $V \subseteq U$ - viz. sáček.

Lemma Necht U je vekt. prostor nad \mathbb{C} (nebo \mathbb{R})

a $\varphi: U \rightarrow U$ je samoadjungovaný. Jestliže je α ortonormální báze prostoru U , pak

$(\varphi)_{\alpha, \alpha}$ je hermitovská (nad \mathbb{C}), je symetrická nad \mathbb{R} .

(12)

Ditaks mad \mathbb{R}

$$\langle \varphi(u), v \rangle = (\varphi(u))_{\alpha}^T (v)_{\alpha} = ((\varphi)_{\alpha, \alpha} \cdot (u)_{\alpha})^T (v)_{\alpha}$$

$$\parallel = (u)_{\alpha}^T (\varphi)_{\alpha, \alpha}^T (v)_{\alpha}$$

$$\langle u, \varphi(v) \rangle = (u)_{\alpha}^T (\varphi)_{\alpha, \alpha} (v)_{\alpha} = (u)_{\alpha}^T (\varphi)_{\alpha, \alpha} (v)_{\alpha}$$

$$\implies (\varphi)_{\alpha, \alpha}^T = (\varphi)_{\alpha, \alpha}, \text{ eos pome chleli dabrak}$$

Vlastni čísla a vlastni vektory samoady operátora

Lemma: Ki $\varphi: U \rightarrow U$ samoadyngosary, pak

- (1) parde piba vlastni čísla λ reálne (i helye U λ mad \mathbb{P})
- (2) vlastni vektory u m'arym vlastnim číslom λ preu reálne kalme

Juhász:

(1) Nechť $\varphi : U \rightarrow U$, $\varphi(u) = \lambda u$.

$\lambda \langle u, u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \langle \varphi(u), u \rangle = \langle u, \varphi(u) \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle$

Proba $(\lambda - \bar{\lambda}) \langle u, u \rangle = 0$ $u \neq \vec{0}$

leďy $\lambda - \bar{\lambda} = 0$, $\lambda = \bar{\lambda}$ a teda je $\lambda \in \mathbb{R}$

(2) Nechť $\varphi(u) = \lambda u$, $\varphi(u) = \mu v$, $\lambda \neq \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\lambda \langle u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle = \langle u, \mu v \rangle = \mu \langle u, v \rangle$

$(\lambda - \mu) \langle u, v \rangle = 0$

Proba $\langle u, v \rangle = 0$ a u, v jsou na sebe kolmé.

Hlavní věta o samoadjungovaných operátorech

Nechť U je vektor. prostor nad \mathbb{C} nebo \mathbb{R} a $\varphi: U \rightarrow U$ je samoadjungovaný lineární operátor. Pokud v U existuje orthonormální báze konjugovatelnými vlastními vektory operátoru φ .

Důkaz indukci podle dimenze prostoru U .

Je-li $\dim U = 1$, je $\varphi(u) = \lambda u$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$ nebo \mathbb{C} .

Ale pokud λ je skalární číslo je $\lambda \in \mathbb{R}$ a vektor u s normou 1 tvoří hledanou orthonormální bázi konjugovatelnými vlastními vektory.

Nechť věta platí v prostorech dimenze $n-1 \geq 1$. Nechť λ_1 je skalární číslo operátoru φ . To musí být reálné, protože existuje i reálný skalární vektor (převzetí jsme v prostoru nad \mathbb{R}).

Tj. existuje $u_1 \in U$ $\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1$ $\|u_1\| = 1$.

Ukážeme, že $[u_1]^\perp$ je invariantní podprostor pro φ .

$v \in [u_1]^\perp$ a chceme ukázat, že $\varphi(v) \in [u_1]^\perp$.

$$\langle \varphi(v), u_1 \rangle = \langle v, \varphi(u_1) \rangle = \langle v, \lambda_1 u_1 \rangle = \lambda_1 \langle v, u_1 \rangle = 0$$

Poda $\tilde{\varphi} = \varphi|_{[u_1]^\perp} : [u_1]^\perp \rightarrow [u_1]^\perp$

je samoadjungované zobrazení na prostoru dimenze

$n-1$. Můžeme na něj použít indukční předpoklad –

– tedy v $[u_1]^\perp$ existuje orthonomální báze tvořená

kladnými vektory u_2, u_3, \dots, u_n . Poda $\alpha = (u_2, u_3, \dots, u_n)$

je orthonomální báze prostoru U tvořená kladnými vektory.

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Důsledek Každý samoadjungovaný operátor

$\varphi: U \rightarrow U$ je lineární

$$\varphi = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k$$

tedy $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ jsou navzájem různá vlastní čísla operátoru φ a P_i jsou k němu příslušné do navzájem kolmých podprostorů $\ker(\varphi - \lambda_i \text{id})$.

Důkaz: Vezmeme $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ všechna různá vlastní čísla operátoru φ .

V U existují ortogonální báze tvořené vlastními vektory

$\underbrace{u_1, u_2, \dots}_{\in \lambda_1} \quad \underbrace{u_m}_{\in \lambda_k} \quad \ker(\varphi - \lambda_i \text{id})$ má bázi tvořenou i -tou skupinou těchto vektorů.

Prostředek $\varphi(u) = \lambda_1 P_1(u) + \lambda_2 P_2(u) + \dots + \lambda_k P_k(u)$

platí na vektorech báze $u = u_1$

$$\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1 = \lambda_1 P_1(u_1) = \lambda_1 u_1$$

(17)

jestliže rovnost platí na všech vektorech v a v je
 vektor $v \in U$.

Tento důsledek se někdy nazývá věta o spektrálním
 rozkladu samoadjungované operace.

DŮSLEDEK 2 Každá symetrická matice

A lze psát ve tvaru

$$A = P D P^T$$

kde D je diagonální matice a P je ortogonální matice.

Důkaz: $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\varphi(x) = Ax$ je lineární operátor.

$\forall \mathbb{R}^n$ existují ortonormální báze α tvořící vlastním vektorům.

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(18)

$$\begin{aligned} (\varphi)_{\varepsilon, \varepsilon} = A &= (id)_{\varepsilon, \alpha} (\varphi)_{\alpha, \alpha} (id)_{\alpha, \varepsilon} = \\ &= P^{-1} D P \end{aligned}$$

α a ε sunt orthonormale baze. Pe baza matricei precedente

$$P = (id)_{\varepsilon, \alpha}$$

și ortogonală matrice. Pe baza

$$P^{-1} = P^T$$

a deducem

$$A = P D P^T$$