Důkaz věty o JKT

Věta: Nechť $\varphi : U \to U$ je lin. operátor takový, že součet alg. násobností jeho vlastních čísel $= \dim U$. Pak v U existuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

je matice v Jord. kan. tvaru. Tento tvar je určen jednoznačně, až na pořadí buněk.

Přednáška LS 2015

skripta Slováka

Bak. práce Ivana Bachurová LA pro pokročilé 1. kap.

Pojmy: Nilpotentní operátor $\varphi : V \to V$ je takový operátor, že existuje k tak, že

$$\underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k \text{ krát}} = 0 \qquad \varphi^k = 0$$

Kořenový podprostor operátoru $\varphi : U \to U$. λ vlastní číslo φ

$$R_\lambda = \{ u \in U ; (\varphi - \lambda \mathrm{id})^k u = 0 \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N} \}$$

$$\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}) = \{ u \in U, (\varphi - \lambda \mathrm{id}) u = 0 \} \subseteq R_\lambda$$

R nad

Príklad: $\varphi : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$, $\varphi(x) = Jx$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \boxed{\lambda_1} & & & \\ & & & & \lambda_2 & 1 & \\ & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = J$$

$$(\varphi - \lambda_1 id) e_1 = 0$$

$$(\varphi - \lambda_1 id) e_2 = e_1$$

$$(\varphi - \lambda_1 id)^2 e_2 = (\varphi - \lambda_1 id) e_1 = 0$$

$$(\varphi - \lambda_1 id) e_3 = e_2$$

$$(\varphi - \lambda_1 id)^3 e_3 = (\varphi - \lambda_1 id)^2 e_2 = 0$$

$$R_{\lambda_1} = [e_1, e_2, e_3, e_4]$$

$$R_{\lambda_2} = [e_5, e_6, e_7]$$

$$\mathbb{R}^7 = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2}$$

Vlastnosti kořenových podprostorů

$\varphi : U \to U$ s vl. číslem λ

1. R_λ je netriv. podprostor

2. R_λ je invariantní vůči všem lin. operátorům, které komutují s φ, speciálně je to $\varphi - \alpha\,\mathrm{id}$.

3. Je-li $\alpha \neq \lambda$, pak $\varphi - \alpha\,\mathrm{id} : R_\lambda \to R_\lambda$ je izomorfismus.

4. $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ je nilpotentní na R_λ.

Dk (4) $R_\lambda = [u_1, u_2, \dots u_\ell]$ $\quad \exists k_i \quad (\varphi - \lambda id)^{k_i} u_i = 0$

$k = \max\{k_1, \dots, k_\ell\} \quad (\varphi - \lambda id)^{k} u_i = 0$

$u = \sum a_i u_i \implies (\varphi - \lambda id)^{k} u = 0$. Tedy $\varphi - \lambda id$ je nilpotentní na R_λ.

(3) Nechť $\varphi - \mu id$ není izomorfismus. Pak existuje $u \neq 0$, $u \in R_\lambda$ $\varphi(u) = \mu u$. Pro u existuje minimální $k \in \mathbb{N}$ takové, že $(\varphi - \lambda id)^k u = 0$.

$$0 = (\varphi - \lambda id)^k u = (\varphi - \lambda id)^{k-1}(\varphi(u) - \lambda u) = (\varphi - \lambda id)^{k-1}(\mu - \lambda) u =$$

$$\underbrace{(\mu - \lambda)}_{\neq 0}(\varphi - \lambda id)^{k-1} u = 0 \implies (\varphi - \lambda id)^{k-1} u = 0$$, spor s volbou k

$\implies \varphi - \mu id : R_\lambda \to R_\lambda$ je izo.

(2) Nechť $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$. $u \in R_\lambda$, $(\varphi - \lambda id)^k u = 0$.

Chceme dk, že $\psi(u) \in R_\lambda$.

$$(\varphi - \lambda id)^k \psi(u) = \psi(\varphi - \lambda id)^k u = \psi(0) = 0$$

$$\Rightarrow \psi(u) \in R_\lambda.$$

Důkaz věty o JKT má dva kroky

I krok **Věta** Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou všechna vl. čísla operátoru $\varphi: U \to U$ a nechť nad čísly jejich alg. násobnosti je $n = \dim U$.

Potom $U = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k}$

a $\dim R_{\lambda_i} =$ alg. násobnost λ_i

Součet více podprostorů $U_1+U_2+\dots+U_k=U$ je direktní, jestliže platí $\forall u_i\in U$ $\quad u_1+u_2+\dots+u_k=\vec{o} \Longrightarrow u_1=u_2=\dots=u_k=\vec{o}$

(to je ekvivalentní s výrokem

$$\forall u\in U\ \exists!\, u_1\in U_1\ \exists!\, u_2\in U_2 \dots \exists!\, u_k\in U_k \quad u=u_1+u_2+\dots+u_k\ )$$

Důkaz věty: Součet je direktní – indukcí podle k (počet vlastních čísel). Nechť $R_{\lambda_1}+R_{\lambda_2}+\dots+R_{\lambda_{k-1}}$ je direktní.

$u_i\in R_{\lambda_i}$, $i=1,2,\dots,k$ $\quad u_1+u_2+\dots+u_k=\vec{o}$ aplikuje na rovnici $(\varphi-\lambda_k id)^e$, přičemž $(\varphi-\lambda_k id)^e u_k=\vec{o}$.

$$\underbrace{(\varphi-\lambda_k id)^e u_1}_{v_1\in R_{\lambda_1}}+\underbrace{(\varphi-\lambda_k id)^e u_2}_{v_2\in R_{\lambda_2}}+\dots+\underbrace{(\varphi-\lambda_k id)^e u_{k-1}}_{v_{k-1}\in R_{\lambda_k}}=\vec{o}$$

Z ind. předpokladu plyne, že $v_1=v_2=\dots=v_{k-1}=\vec{o}$.

$\varphi - \lambda_k \, id$ na R_{λ_i}, $i < k$, je izomorfismus.

Proto také $(\varphi - \lambda_k \, id)^e$ je izomorfismus. Je-li $v_i = 0$,

je u_i také rovno 0. $\quad v_i = (\varphi - \lambda_k \, id)^e u_i$.

Proto $u_1 = u_2 = \dots = u_{k-1} = \vec{0}$ a tudíž $u_k = \vec{0}$.

Dokázali jsme, že součet je direktní.

Dokážeme, že $R_{\lambda_1} + R_{\lambda_2} + \dots + R_{\lambda_k} = U$

a to tak, že ukážeme $\dim R_{\lambda_i} = $ alg. násobnost λ_i.

Kvocient vekt. prostoru podle podprostoru

$V \subseteq U$

$U/V = \{ u+V \subset U \,;\, u \in U \}$

součet $(u_1+V)+(u_2+V) \underset{\text{def}}{=} (u_1+u_2)+V$

násobek $a(u+V) \underset{\text{def}}{=} au+V$

U/V je vekt. prostor

$\varphi : U \to U$ a $V \subseteq U$ je invariantní podprostor $\varphi(V) \subseteq V$

Lze definovat $\tilde{\varphi} : U/V \to U/V$ $\quad \tilde{\varphi}(u+V) = \varphi(u)+V$

$\tilde{\varphi}$ je lin. zobrazení.

Lemma: Nechť $\varphi : U \to U$ splňuje předpoklady věty o JKT. Pak v U existuje báze B taková, že

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & * \\ & \lambda_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & 0 & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Důkaz indukcí podle $\dim U$. Nechť platí pro prostory $\dim \leq n-1$. Nechť U má $\dim n$ a nechť u_1 je vlastní vektor pro λ_1 operátoru φ. $V = [u_1]$

$$\tilde{\varphi} : U/[u_1] \longrightarrow U/[u_2] \qquad \dim U/[u_1] = n-1.$$

Pro $\tilde{\varphi}$ platí naše lemma. Existuje báze v $U/[u_1]$

$$\tilde{B} = (u_2 + [u_1], u_3 + [u_1], \dots, u_n + [u_1])$$ a v této bázi

$$(\tilde{\varphi})_{\tilde{B}\tilde{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

(11)

Vzamemo-li bazo $B=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ v U tak, da velja, da

$$(\varphi)_{B,B}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & & & & * \\ & \lambda_1 & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & 0 & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_k\end{pmatrix}$$

$$(\varphi-\lambda_1 id)_{B,B}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & * & * \\ & \ddots & \vdots & \\ & & 0 & \\ \hline & & & \lambda_2-\lambda_1 \\ & & & \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}0 & \times & \times \\ & 0 & \times \\ & & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Pokažimo v dokazu, da $\dim R_{\lambda_i}=$ alg. več. λ_i:

$$B=(\underbrace{u_1,u_2,\dots,u_{k_1}}_{\lambda_1},u_{k_1+1},\dots\dots)$$

$$R_{\lambda_1}=[u_1,u_2,\dots,u_{k_1}]=\text{alg. večkrat } \lambda_1$$

Zaključek: $\dim(R_{\lambda_1}\oplus R_{\lambda_2}\oplus\dots\oplus R_{\lambda_k})=\sum\dim R_{\lambda_i}=\underbrace{\sum \text{alg. več. } \lambda_i}_{=n}$

$\Longrightarrow R_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus R_{\lambda_k}\subseteq U \quad \dim(R_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus R_{\lambda_k})=\dim U$

$\Longrightarrow R_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus R_{\lambda_k}=U.$

2. krok důkazu Jordanovy věty

spočívá v tom, že rozložíme každý kořenový podprostor na direktní součet dalších podprostorů.

$\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ je nilpotentní operátor na R_λ.

Vezmeme V vekt. prostor a $\psi: V \to V$ nilpotentní operátor.

Řekneme, že $\psi: V \to V$ je cyklický, jestliže existuje ve V báze $\alpha = (v_1, v_2, \dots, v_s)$ taková, že

$$\psi(v_1) = 0 \quad \psi(v_2) = v_1, \quad \psi(v_3) = v_2, \quad \dots \quad \psi(v_s) = v_{s-1}$$

$$(\psi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Cyklický operátor je speciálním případem nilpotentního.

Věta: Nechť $\varphi : V \to V$ je nilpotentní. Pak lze V rozložit na direktní součet invariantních podprostorů

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_\ell$$

takových, že $\varphi / V_i : V_i \to V_i$ je cyklický.

Důkaz: Nechť k je stupeň nilpotentnosti: $\varphi^k = 0$, ale $\varphi^{k-1} \neq 0$.

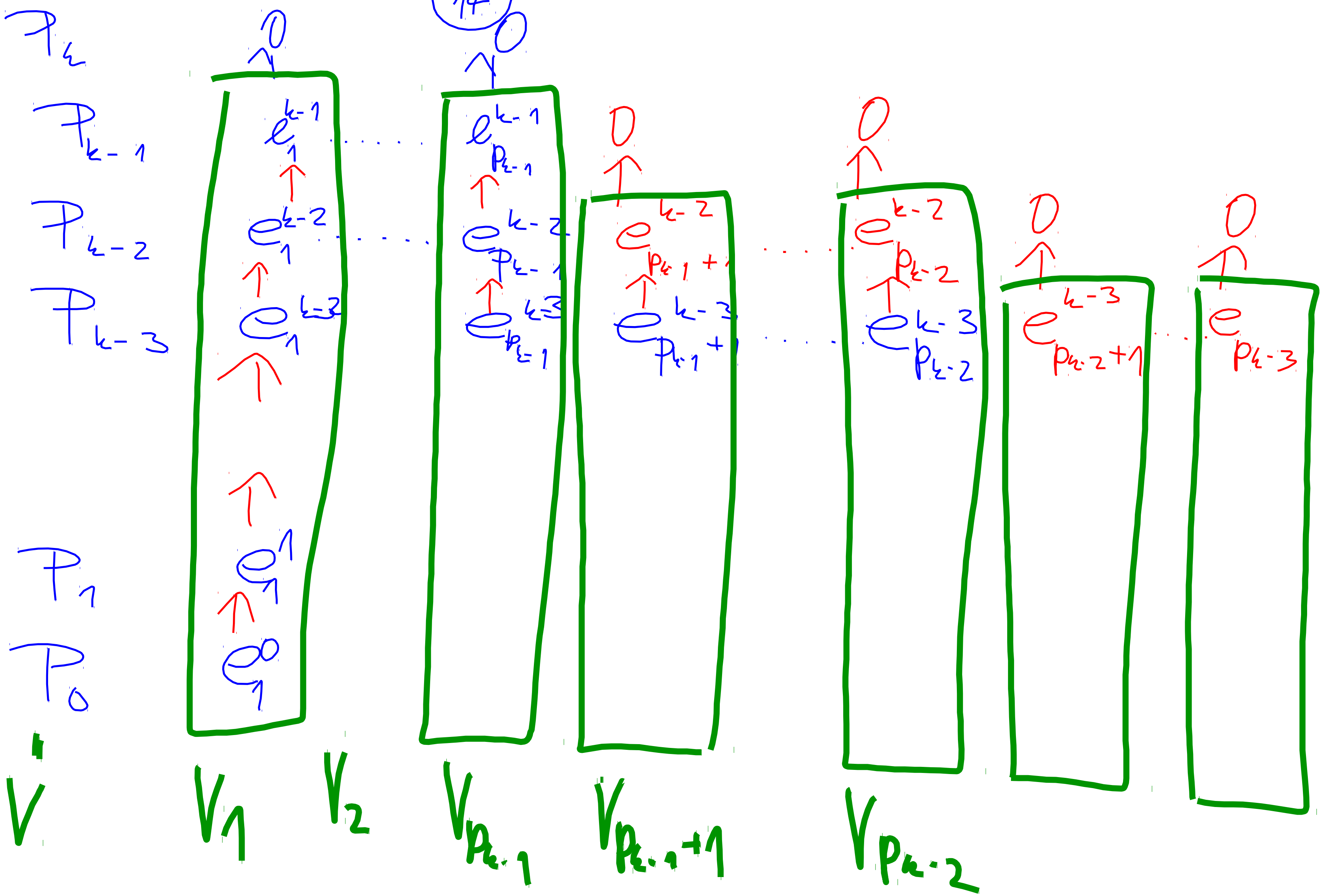
$P_i = \operatorname{im} \varphi^i$

$$\{0\} = P_k \subsetneqq P_{k-1} \subsetneqq P_{k-2} \dots\dots P_1 \subsetneqq P_0 = U$$

Kdyby $P_i = P_{i-1}$, pak by $P_{i+1} = P_i$ a dostali bychom $P_k \neq 0$.

Nechť $e_1^{k-1}, e_2^{k-1}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-1}$ je báze P_{k-1}. V P_{k-2} existují vektory, které se na tyto zobrazí $\varphi(e_i^{k-2}) = e_i^{k-1}$

Vektory $e_1^{k-1}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-1}, e_1^{k-2}, \dots e_{p_{k-1}}^{k-2}$ jsou LN.


P_k
P_{k-1}
P_{k-2}
P_{k-3}
P_1
P_0
V
V_1
V_2
$V_{p_{k-1}}$
$V_{p_{k-1}+1}$
$V_{p_{k-2}}$
e_1^{k-1}
e_1^{k-2}
e_1^{k-3}
e_1^1
e_1^0
$e_{p_{k-1}}^{k-1}$
$e_{p_{k-1}}^{k-2}$
$e_{p_{k-1}}^{k-3}$
$e_{p_{k-1}+1}^{k-2}$
$e_{p_{k-1}+1}^{k-3}$
$e_{p_{k-2}}^{k-2}$
$e_{p_{k-2}}^{k-3}$
$e_{p_{k-2}+1}^{k-3}$
$e_{p_{k-3}}$
0

$$\sum a_i e_i^{k-1} + \sum b_i e_i^{k-2} = \vec{o} \qquad / \ \varphi$$

$$\sum a_i \varphi(e_i^{k-1}) + \sum b_i \varphi(e_i^{k-2}) = \vec{o}$$

$$\sum a_i \vec{o} + \sum b_i e_i^{k-1} = 0$$

e_i^{k-1} jsou LN $\Rightarrow b_i = 0$

$\Rightarrow a_i = 0$

LN dokázána

$P_{k-1} \subsetneq P_{k-2}$ doplníme $e_1^{k-1}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-1}, e_1^{k-2}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-2}$ na bázi P_{k-2} pomocí vektorů $e_{p_{k-1}+1}^{k-2}, \dots, e_{p_{k-2}}^{k-2}$. Tyto vektory lze vybrat tak, že $\varphi(e_j^{k-2}) = \vec{o}$.

Obecně $\varphi(e_j^{k-2}) = \sum_{i=1}^{p_{k-1}} c_i e_i^{k-1}$. Proto místo e_j^{k-2} vezmeme

$$\bar{e}_j^{k-2} = e_j^{k-2} - \sum c_i e_i^{k-2}$$

$$\varphi(\bar{e}_j^{k-2}) = \varphi(e_j^{k-2}) - \sum c_i \varphi(e_i^{k-2}) = \sum c_i e_i^{k-1} - \sum c_i e_i^{k-1} = 0$$

Takto pokračujeme i pro P_{k-3}, P_{k-4}, atd. až do P_0.
Tímto dostaneme podle obrázku na str. 14
podprostory $V_1, V_2, \ldots$
na nichž je φ cyklické. Tím je důkaz ukončen.

Shrnutí pro JKT: Prvně rozložíme $U = R_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus R_{\lambda_k}$.
Pak rozložíme každé R_{λ_i} na součet podprostorů $V_1 \oplus \cdots \oplus V_{e_i}$
takových, že $\varphi - \lambda_i \, id$ je cyklický operátor na V_j. Nyní vezmeme
bázi U složenou z cyklických bází podprostorů V_j. V takové bázi α
je $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ matice v JKT. Báze prostoru V_j v R_{λ_i} dává buňku
$J_{\lambda_i}(\dim V_j)$

<u>Jednoznačnost:</u>

Počet buněk velikosti k v JKT $= \dim P_{k-1}$

Počet buněk velikosti $k-1$ v JKT $= \dim P_{k-2} - 2\dim P_{k-1}$

Počet buněk velikosti $k-2$ v JKT $= \dim P_{k-3} - 2\dim P_{k-2} + \dim P_{k-1}$

atd

Odtud plyne, že počet Jord. buněk dané velikosti je nezávislý na volbě báze.