

# 16. SAMOADJUNGOVANÉ OPERÁTORY A JEJICH VLASTNÍ ČÍSLA A VEKTORY

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

30. dubna 2020

# Abstrakt

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu struktury lineárních operátorů na konečně rozměrných vektorových prostorech se skalárním součinem. Zavedeme pojem *adjungovaného zobrazení a samoadjungovaného lineárního operátoru* a podíváme se na jeho diagonalizovatelnost.

# Abstrakt

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu struktury lineárních operátorů na konečně rozměrných vektorových prostorech se skalárním součinem. Zavedeme pojem *adjungovaného zobrazení a samoadjungovaného lineárního operátoru* a podíváme se na jeho diagonalizovatelnost.

V celé této kapitole bude  $V$  buď reálný nebo komplexní vektorový prostor, tj. pole skalárů je  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

# Obsah přednášky I

- ▶ Samoadjungované operátory
  - ▶ Adjungované zobrazení a samoadjungované operátory.
  - ▶ Vlastní vektory a vlastní čísla samoadjungovaných operátorů.
  - ▶ Věta o spektrálním rozkladu a její důsledky.

# Obsah přednášky I

- ▶ Samoadjungované operátory
  - ▶ Adjungované zobrazení a samoadjungované operátory.
  - ▶ Vlastní vektory a vlastní čísla samoadjungovaných operátorů.
  - ▶ Věta o spektrálním rozkladu a její důsledky.
- ▶ Rozklady matic
  - ▶ Singulární rozklad matic.
  - ▶ Pseudoinverzní matice.

# Samoadjungované operátory I

Motivace 1: **Vlastní vektory a vlastní čísla symetrické matice**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= (1 - \lambda)(2 - \lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1 \\ &= \left(\lambda - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

# Samoadjungované operátory I

Motivace 1: **Vlastní vektory a vlastní čísla symetrické matice**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= (1 - \lambda)(2 - \lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1 \\ &= \left(\lambda - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Vlastní čísla jsou  $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  a  $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ .

Pro tato vlastní čísla nalezneme vlastní vektory  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$ .

$$\left(1 - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)x_1 - x_2 = 0, \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)y_1 - y_2 = 0$$

$$\mathbf{v}_1 = \left(1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^T, \mathbf{v}_2 = \left(1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^T$$

Tyto vektory jsou na sebe **navzájem kolmé**.

## Samoadjungované operátory II

Tedy k symetrické matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

existuje ortogonální báze tvořená vlastními vektory.

**Toto není náhoda.**



## Samoadjungované operátory II

Tedy k symetrické matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

existuje ortogonální báze tvořená vlastními vektory.

**Toto není náhoda.**

### Motivace 2: Kolmá projekce

Bud'  $U$  vektorový prostor se skalárním součinem,  $V$  jeho konečně rozměrný vektorový podprostor a  $P_V: U \rightarrow U$  kolmá projekce na podprostor  $V$ . Ukážeme, že platí

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U : \langle P_V(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, P_V(\mathbf{v}) \rangle$$

$$\langle P_V(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \underbrace{\langle P_V(\mathbf{u}), \mathbf{v} - P_V(\mathbf{v}) \rangle}_{\in V} + \underbrace{\langle P_V(\mathbf{u}), P_V(\mathbf{v}) \rangle}_{\in V^\perp} = \langle P_V(\mathbf{u}), P_V(\mathbf{v}) \rangle$$

## Samoadjungované operátory III

$$\langle \mathbf{u}, P_V(\mathbf{v}) \rangle = \langle \underbrace{(\mathbf{u} - P_V(\mathbf{u}))}_{\in V^\perp} + \underbrace{P_V(\mathbf{u})}_{\in V}, \underbrace{P_V(\mathbf{v})}_{\in V} \rangle = \langle P_V(\mathbf{u}), P_V(\mathbf{v}) \rangle$$

Pak říkáme, že  $P_V$  je samoadjungované zobrazení.

## Samoadjungované operátory III

$$\langle \mathbf{u}, P_V(\mathbf{v}) \rangle = \langle \underbrace{(\mathbf{u} - P_V(\mathbf{u}))}_{\in V^\perp} + \underbrace{P_V(\mathbf{u})}_{\in V}, \underbrace{P_V(\mathbf{v})}_{\in V} \rangle = \langle P_V(\mathbf{u}), P_V(\mathbf{v}) \rangle$$

Pak říkáme, že  $P_V$  je samoadjungované zobrazení.

### Definice

Nechť  $\varphi: U \rightarrow V$  je lineární zobrazení unitárních (euklidovských) prostorů. **Adjungovaným zobrazením** k  $\varphi$  se nazývá lineární zobrazení  $\varphi^*: V \rightarrow U$  takové, že pro všechny vektory  $\mathbf{u} \in U$  a  $\mathbf{v} \in V$  platí

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_V = \langle \mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v}) \rangle_U.$$

# Samoadjungované operátory IV

## Příklad

Bud'  $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$  lineární zobrazení,  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ . Hledáme adjungované zobrazení  $\varphi^*: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n$  ve tvaru  $\varphi^*(\mathbf{y}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}$ .

# Samoadjungované operátory IV

## Příklad

Bud'  $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$  lineární zobrazení,  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ . Hledáme adjungované zobrazení  $\varphi^*: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n$  ve tvaru  $\varphi^*(\mathbf{y}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}$ .

Musí platit

$$\langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{C}^k} = \langle \mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y}) \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

$$\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{C}^k} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})^T \cdot \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{x}^T \cdot \overline{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{y})}$$

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{x}^T \cdot \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{y}}$$

Odtud  $B = \bar{\mathbf{A}}^T$  je matice adjungovaného zobrazení  $\varphi^*$  k  $\varphi$ .

# Samoadjungované operátory $V$ - Souřadnicové zobrazení

Nechť  $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  je ortonormální báze v unitárním (euklidovském) prostoru  $V$  dimenze  $n$ . Pak souřadnicové zobrazení  $(-)_\alpha: V \rightarrow \mathbb{C}^n$  ( $(-)_\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) je unitární (ortogonální) zobrazení, tj.,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n} \quad (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{R}^n}).$$

Totíž, pro  $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i$  a  $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n d_j \mathbf{u}_j$  máme

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V &= \langle \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^n d_j \mathbf{u}_j \rangle_V = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle_V \bar{d}_j \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle_V \bar{d}_i = \sum_{i=1}^n c_i \bar{d}_i \\ &= (\mathbf{u})_\alpha^T \cdot \overline{(\mathbf{v})_\alpha} = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n}. \end{aligned}$$

Tedy i inverzní zobrazení  $(-)_\alpha^{-1}: \mathbb{C}^n \rightarrow V$  ( $(-)_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow V$ ) je unitární (ortogonální) zobrazení.

# Samoadjungované operátory VI

## Věta

Nechť  $\alpha$  je ortonormální báze v  $V$ ,  $\beta$  je ortonormální báze v  $U$ ,  $\varphi : U \rightarrow V$  je lineární zobrazení unitárních (euklidovských) prostorů,  $A = (\varphi)_{\alpha,\beta}$ . Potom k  $\varphi$  existuje právě jedno adjungované zobrazení  $\varphi^*$  a matice adjungovaného zobrazení  $\varphi^* : V \rightarrow U$  má tvar

$$(\varphi^*)_{\beta,\alpha} = \begin{cases} \bar{A}^T & \text{v unitárním případě,} \\ A^T & \text{v euklidovském případě.} \end{cases}$$

Obráceně, je-li  $\psi : V \rightarrow U$  lineární zobrazení a  $(\psi)_{\beta,\alpha} = \bar{A}^T$ , pak  $\psi = \varphi^*$ .

# Samoadjungované operátory VII

## Definice

Lineární operátor  $\varphi : U \rightarrow U$  na unitárním (euklidovském) prostoru  $U$  se nazývá **samoadjungované zobrazení**, jestliže pro všechny vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$  platí

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_U = \langle \mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v}) \rangle_U$$

tj. pokud  $\varphi^* = \varphi$ .

## Věta

Operátor  $\varphi : U \rightarrow U$  na unitárním (euklidovském) prostoru  $U$  je samoadjungovaný právě tehdy, když pro jeho matici v ortonormální bázi  $\alpha$  platí

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \mathbf{A} = \begin{cases} \overline{\mathbf{A}}^T & \text{v unitárním případě,} \\ \mathbf{A}^T & \text{v euklidovském případě.} \end{cases}$$



## Samoadjungované operátory VIII

Maticím  $\mathbf{A}$ , které splňují podmínku  $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^T$  se nazývají *hermitovské*. Dále budeme značit  $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$ .

## Samoadjungované operátory VIII

Maticím  $\mathbf{A}$ , které splňují podmínku  $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^T$  se nazývají *hermitovské*. Dále budeme značit  $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$ .

Příkladem hermitovské matice je matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + i & 2 + 3i \\ 1 - i & 3 & -5i \\ 2 - 3i & 5i & 0 \end{pmatrix}$$

## Samoadjungované operátory VIII

Maticím  $\mathbf{A}$ , které splňují podmínku  $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^T$  se nazývají *hermitovské*. Dále budeme značit  $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$ .

Příkladem hermitovské matice je matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + i & 2 + 3i \\ 1 - i & 3 & -5i \\ 2 - 3i & 5i & 0 \end{pmatrix}$$

Podobně samoadjungované operátory na euklidovských prostorech (speciálně na  $\mathbb{R}^n$ ) jsou určeny symetrickými maticemi.

# Samoadjungované operátory IX

## Příklad

Buď nyní  $U$  konečně rozměrný vektorový prostor se skalárním součinem,  $V$  jeho vektorový podprostor a  $P_V: U \rightarrow U$  kolmá projekce na podprostor  $V$ . Nechť  $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  je ortonormální báze  $U$  a  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$  je báze  $V$ . Pak matice kolmé projekce je

$$P_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k$

# Samoadjungované operátory X

## Lemma

*Nechť lineární operátor  $\varphi : U \rightarrow U$  na unitárním (euklidovském) prostoru  $U$  je samoadjungovaný s invariantním podprostorem  $V$ . Pak  $V^\perp$  je rovněž invariantní.*

# Samoadjungované operátory X

## Lemma

*Nechť lineární operátor  $\varphi : U \rightarrow U$  na unitárním (euklidovském) prostoru  $U$  je samoadjungovaný s invariantním podprostorem  $V$ . Pak  $V^\perp$  je rovněž invariantní.*

## Věta

*Nechť  $\varphi : U \rightarrow U$  je samoadjungovaný operátor na unitárním (euklidovském) prostoru  $U$ . Pak platí:*

- 1. Vlastní čísla zobrazení  $\varphi$  jsou reálná.*
- 2. Vlastní vektory příslušné k různým vlastním číslům jsou navzájem kolmé.*

# Samoadjungované operátory XI

## Věta

**O spektrálním rozkladu.** *Pro každý samoadjungovaný operátor  $\varphi : U \rightarrow U$  na unitárním (euklidovském) prostoru  $U$  existuje ortonormální báze  $\alpha$  prostoru  $U$  tvořená vlastními vektory, v níž má  $\varphi$  diagonální matici s reálnými vlastními čísly na diagonále.*

# Samoadjungované operátory XI

## Věta

**O spektrálním rozkladu.** Pro každý samoadjungovaný operátor  $\varphi : U \rightarrow U$  na unitárním (euklidovském) prostoru  $U$  existuje ortonormální báze  $\alpha$  prostoru  $U$  tvořená vlastními vektory, v níž má  $\varphi$  diagonální matici s reálnými vlastními čísly na diagonále.

## Důsledek

Bud'  $\varphi : U \rightarrow U$  lineární operátor na unitárním (euklidovském) prostoru  $U$ . Pak  $\varphi$  je samoadjungovaný operátor právě tehdy, když

$$\varphi = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k,$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$  jsou všechna navzájem různá vlastní čísla operátoru  $\varphi$  a  $P_1, \dots, P_k$  jsou kolmé projekce do navzájem kolmých vlastních podprostorů  $\text{Ker}(\varphi - \lambda_i \text{id}_U)$ ,  $i = 1, \dots, k$ .



## Samoadjungované operátory XII

### Důsledek

Pro každou reálnou symetrickou matici  $\mathbf{A}$  existuje ortogonální matice  $\mathbf{P}$  tak, že matice

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$$

je diagonální.

## Samoadjungované operátory XII

### Důsledek

Pro každou reálnou symetrickou matici  $\mathbf{A}$  existuje ortogonální matice  $\mathbf{P}$  tak, že matice

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$$

je diagonální.

### Důsledek

Každá kvadratická forma na euklidovském prostoru  $U$  dimenze  $n$  má ve vhodné ortonormální bázi analytický tvar

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

# Singulární rozklad matice I

## Příklad

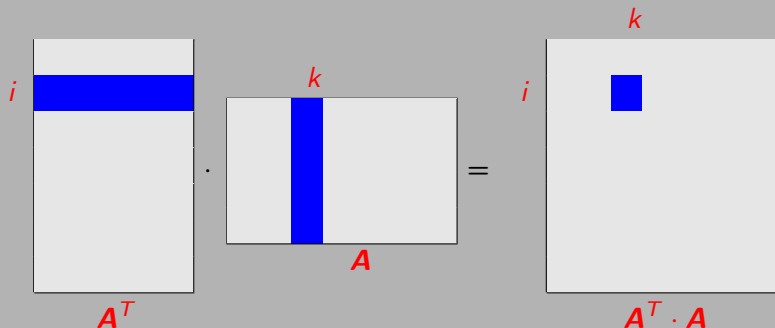
Je-li  $\mathbf{A}$  reálná matice typu  $m \times n$ , pak matice

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A}$$

je reálná symetrická matice typu  $n \times n$ .

Snadno pak ověříme následující rovnost

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}.$$



# Singulární rozklad matice II

## Příklad

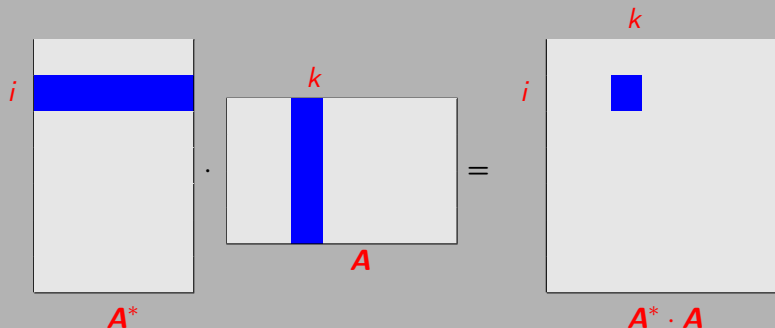
Je-li  $\mathbf{A}$  komplexní matice typu  $m \times n$ , pak matice

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A}$$

je komplexní hermitovská matice typu  $n \times n$ .

Snadno pak ověříme následující rovnost

$$(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^* = \mathbf{A}^* \cdot (\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}.$$



# Singulární rozklad matice III

## Lemma

*Nechť  $\varphi: U \rightarrow V$  je lineární zobrazení mezi prostory se skalárním součinem. Pak  $\varphi^* \circ \varphi: U \rightarrow U$  (a  $\varphi \circ \varphi^*: V \rightarrow V$ ) jsou samoadjungované, pozitivně semidefinitní, tj.*

$$\forall \mathbf{u} \in U : \langle (\varphi^* \circ \varphi)(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle \geq 0.$$

*Speciálně, všechna vlastní čísla jsou nezáporná a platí*

$$\text{Ker}(\varphi^* \circ \varphi) = \text{Ker}(\varphi).$$

# Singulární rozklad matice IV

## Věta

Nechť  $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{k \times n}$ , kde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Pak existují unitární (případně ortogonální nad  $\mathbb{R}$ ) matice  $\mathbf{P}$  typu  $k \times k$  a  $\mathbf{Q}$  typu  $n \times n$  takové, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*,$$

kde

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_r \end{matrix}}^n & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} \\ \hline \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}_r & \underbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}}_{n-r} \end{pmatrix}$$

a čísla  $s_1, s_2, \dots, s_r$  jsou druhé odmocniny kladných vlastních čísel hermitovské matice  $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$ .

# Pseudoinverzní matice I

**Motivace č. 1:** Buď  $\varphi: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k$  lineární zobrazení, tj.  
 $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ . Platí

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &= \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Ker}(\varphi)^\perp, \mathbb{K}^k = \text{Im}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi)^\perp, \\ \varphi \upharpoonright \text{Ker}(\varphi)^\perp &: \text{Ker}(\varphi)^\perp \rightarrow \text{Im}(\varphi). \end{aligned}$$

## Pseudoinverzní matice I

**Motivace č. 1:** Bud'  $\varphi: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k$  lineární zobrazení, tj.  
 $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ . Platí

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &= \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Ker}(\varphi)^\perp, \mathbb{K}^k = \text{Im}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi)^\perp, \\ \varphi \upharpoonright \text{Ker}(\varphi)^\perp &: \text{Ker}(\varphi)^\perp \rightarrow \text{Im}(\varphi). \end{aligned}$$

Lineární zobrazení  $\varphi \upharpoonright \text{Ker}(\varphi)^\perp$  je prosté (jeho jádro je triviální) a na  $(\text{Im}(\varphi) = \text{Im}(\varphi \upharpoonright \text{Ker}(\varphi)^\perp))$  z důvodu stejné dimenze). Tedy k  $\varphi \upharpoonright \text{Ker}(\varphi)^\perp$  existuje inverze.



# Pseudoinverzní matice I

**Motivace č. 1:** Buď  $\varphi: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k$  lineární zobrazení, tj.  
 $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ . Platí

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &= \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Ker}(\varphi)^\perp, \mathbb{K}^k = \text{Im}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi)^\perp, \\ \varphi \upharpoonright \text{Ker}(\varphi)^\perp &: \text{Ker}(\varphi)^\perp \rightarrow \text{Im}(\varphi). \end{aligned}$$

Lineární zobrazení  $\varphi \upharpoonright \text{Ker}(\varphi)^\perp$  je prosté (jeho jádro je triviální) a na  $(\text{Im}(\varphi) = \text{Im}(\varphi \upharpoonright \text{Ker}(\varphi)^\perp))$  z důvodu stejné dimenze). Tedy k  $\varphi \upharpoonright \text{Ker}(\varphi)^\perp$  existuje inverze.

Má-li být  $\mathbf{B}$  pseudoinverzní matice k  $\mathbf{A}$ , položme  $\psi(\mathbf{y}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}$ . Pak  $\psi: \mathbb{K}^k \rightarrow \mathbb{K}^n$  a určitě by kompozice

$$\psi \circ \varphi \upharpoonright \text{Ker}(\varphi)^\perp: \text{Ker}(\varphi)^\perp \rightarrow \text{Ker}(\varphi)^\perp$$

měla být identita na  $\text{Ker}(\varphi)^\perp$ .

## Pseudoinverzní matice II

Tedy lineární zobrazení  $\psi \circ \varphi: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  by mělo být kolmou projekcí na podprostor  $\text{Ker}(\varphi)^\perp$ .

## Pseudoinverzní matice II

Tedy lineární zobrazení  $\psi \circ \varphi: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  by mělo být kolmou projekcí na podprostor  $\text{Ker}(\varphi)^\perp$ .

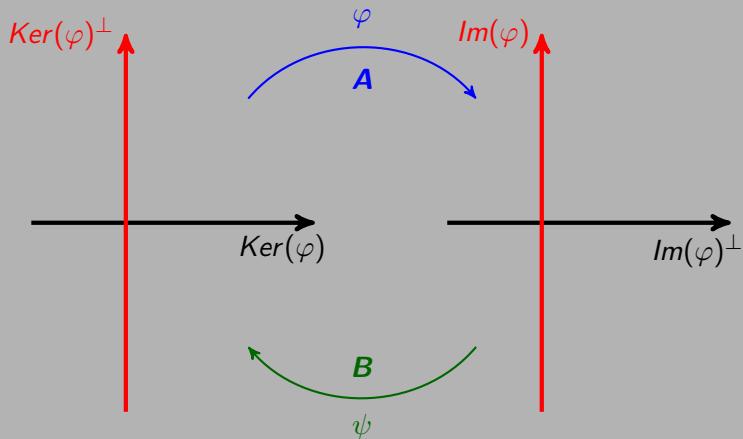
Podobně by lineární zobrazení  $\varphi \circ \psi: \mathbb{K}^k \rightarrow \mathbb{K}^k$  mělo být identita na podprostoru  $\text{Im}(\varphi)$ , tj. kompozice

$$\varphi \upharpoonright \text{Ker}(\varphi)^\perp \circ \psi: \text{Im}(\varphi) \rightarrow \text{Im}(\varphi)$$

by měla být identita na  $\text{Im}(\varphi)$ .

Tedy lineární zobrazení  $\varphi \circ \psi: \mathbb{K}^k \rightarrow \mathbb{K}^k$  by mělo být kolmou projekcí na podprostor  $\text{Im}(\varphi)$ .

# Pseudoinverzní matice III



## Pseudoinverzní matice IV

**Motivace č. 2:** Necht'  $\mathbf{A}$  je matice typu  $n \times n$ , která je invertibilní.  
Pro její singulární rozklad platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*,$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \overbrace{s_1 & 0 & \dots & 0}^n \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{pmatrix}, s_i > 0$$

## Pseudoinverzní matice IV

**Motivace č. 2:** Necht'  $\mathbf{A}$  je matice typu  $n \times n$ , která je invertibilní.  
Pro její singulární rozklad platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*,$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \overbrace{s_1 & 0 & \dots & 0}^n \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{pmatrix}, s_i > 0$$

Pak pro inverzní matici k  $\mathbf{A}$  platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*)^{-1} = (\mathbf{Q}^*)^{-1} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{Q}^*)^* \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P}^* \\ &= \mathbf{Q} \cdot \begin{pmatrix} s_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2^{-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_n^{-1} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^*. \end{aligned}$$

# Pseudoinverzní matice V

## Definice

Nechť  $\mathbf{A}$  je matice typu  $k \times n$  se singulárním rozkladem

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \left( \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{0}_{n-r,r}} \mid \frac{\mathbf{0}_{r,n-r}}{\mathbf{0}_{n-r,n-r}} \right) \cdot \mathbf{Q}^*, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_r \end{pmatrix}, s_i > 0$$

Potom se matice

$$\mathbf{A}^{(-1)} = \mathbf{Q} \cdot \left( \frac{\mathbf{D}^{-1}}{\mathbf{0}_{n-r,r}} \mid \frac{\mathbf{0}_{r,n-r}}{\mathbf{0}_{n-r,n-r}} \right) \cdot \mathbf{P}^*$$

typu  $n \times k$  nazývá *pseudoinverzní matice* k matici  $\mathbf{A}$ .

## Pseudoinverzní matice VI - Základní vlastnosti

- (1) Je-li  $\mathbf{A}$  invertibilní, je  $\mathbf{A}^{(-1)} = \mathbf{A}^{-1}$ .
- (2)  $(\mathbf{A}^{(-1)})^{(-1)} = \mathbf{A}$ .
- (3)  $\mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{A}$  a  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{(-1)}$  jsou samoadjungované matice.
- (4) Bud'  $\varphi: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k$  lineární zobrazení tvaru  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ . Dále položme  $\varphi^{(-1)}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^k$  a definujme tak lineární zobrazení  $\varphi^{(-1)}: \mathbb{K}^k \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Pak kompozice  $\varphi^{(-1)} \circ \varphi$  tvaru

$$(\varphi^{(-1)} \circ \varphi)(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

je kolmá projekce  $\mathbb{K}^n$  do podprostoru  $(\text{Ker}(\varphi))^\perp$  (viz Motivace 1) a kompozice  $\varphi \circ \varphi^{(-1)}$  tvaru

$$(\varphi \circ \varphi^{(-1)})(\mathbf{y}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{y}$$

je kolmá projekce  $\mathbb{K}^k$  do podprostoru  $\text{Im}(\varphi)$ .



## Pseudoinverzní matice VII - Základní vlastnosti

(5)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A},$

$$\mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{(-1)} = \mathbf{A}^{(-1)}.$$

(6) Důležitá pro počítání:

$$\mathbf{A}^{(-1)} = (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{(-1)} \cdot \mathbf{A}^*.$$

(7) Důsledek (6) a (1): Existuje-li k matici  $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$  typu  $n \times n$  inverzní matice, pak

$$\mathbf{A}^{(-1)} = (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^*.$$

Vlastnost (7) lze často použít při počítání, když  $n \leq k$ .

## Pseudoinverzní matice VIII

### Příklad

Spočtěte  $\mathbf{A}^{(-1)}$  k matici  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Platí:

$$\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \det \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = 6.$$

$$(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(-1)} &= (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Pseudoinverzní matice IX - Aplikace (opakování)

Nechť  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

a označme  $S = [\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})]$  lineární podprostor v  $\mathbb{R}^m$  generovaný sloupci matice  $\mathbf{A}$ .

## Pseudoinverzní matice IX - Aplikace (opakování)

Nechť  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

a označme  $S = [\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})]$  lineární podprostor v  $\mathbb{R}^m$  generovaný sloupci matice  $\mathbf{A}$ .

Podle Frobeniova kritéria má naše soustava nějaké řešení  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  právě tehdy, když  $\mathbf{b} \in S$ . Složky řešení  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  jsou pak koeficienty lineární kombinace

$$x_1 \mathbf{s}_1(\mathbf{A}) + \dots + x_n \mathbf{s}_n(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Ale i v případě, kdy  $\mathbf{b} \notin S$ , tj. řešení soustavy neexistuje, se můžeme pokusit nahradit její pravou stranu  $\mathbf{b}$  co nejbližším vektorem z podprostoru  $S$ . Takto získaná nová soustava už má řešení, které můžeme právem považovat za nejlepší možné přibližné řešení původní soustavy.

# Pseudoinverzní matice $X$ - Aplikace

## Věta

Pro  $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$  funkce

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$$

nabývá svého minima v bodě

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{(-1)}\mathbf{b}.$$

Body v  $\mathbf{K}^n$ , kde  $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$  nabývá svého minima, tvoří afinní podprostor

$$\mathbf{A}^{(-1)}\mathbf{b} + \{\mathbf{z} \in \mathbf{K}^n \mid \mathbf{Az} = \mathbf{0}\}.$$

# Pseudoinverzní matice $X$ - Aplikace

## Věta

Pro  $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$  funkce

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$$

nabývá svého minima v bodě

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{(-1)}\mathbf{b}$$

Body v  $\mathbf{K}^n$ , kde  $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$  nabývá svého minima, tvoří afinní podprostor

$$\mathbf{A}^{(-1)}\mathbf{b} + \{\mathbf{z} \in \mathbf{K}^n \mid \mathbf{Az} = \mathbf{0}\}.$$

V úlohách **lineární regrese** máme zadané hodnoty  $y_1, \dots, y_m$  neznámé funkce  $f$  v bodech  $x_1, \dots, x_m$  jejího definičního oboru, získané většinou měření. Funkci  $f$  chceme aproximovat lineární kombinací funkcí  $f_1, \dots, f_n$ , které známe, či alespoň jsou nám známé jejich hodnoty  $a_{ij} = f_j(x_i)$  v bodech  $x_1, \dots, x_m$ .

## Pseudoinverzní matice XI - Aplikace - opakování

Obvykle je  $m$  podstatně větší než  $n$ . V optimálním případě se nám může podařit sestavit funkci  $f = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$  přímo jako lineární kombinaci funkcí  $f_j$  tak, aby  $f$  v bodech  $x_i$  nabývala předem předepsané hodnoty  $y_i$ , tj.

$$y_i = f(x_i) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j.$$

## Pseudoinverzní matice XI - Aplikace - opakování

Obvykle je  $m$  podstatně větší než  $n$ . V optimálním případě se nám může podařit sestavit funkci  $f = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$  přímo jako lineární kombinaci funkcí  $f_j$  tak, aby  $f$  v bodech  $x_i$  nabývala předem předepsané hodnoty  $y_i$ , tj.

$$y_i = f(x_i) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j.$$

Pokud označíme  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , vidíme, že vlastně hledáme řešení  $\mathbf{c}$  soustavy

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}.$$



## Pseudoinverzní matice XI - Aplikace - opakování

Obvykle je  $m$  podstatně větší než  $n$ . V optimálním případě se nám může podařit sestavit funkci  $f = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$  přímo jako lineární kombinaci funkcí  $f_j$  tak, aby  $f$  v bodech  $x_i$  nabývala předem předepsané hodnoty  $y_i$ , tj.

$$y_i = f(x_i) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j.$$

Pokud označíme  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , vidíme, že vlastně hledáme řešení  $\mathbf{c}$  soustavy

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}.$$

Tato soustava je v typickém případě neřešitelná.

## Pseudoinverzní matice XII - Aplikace

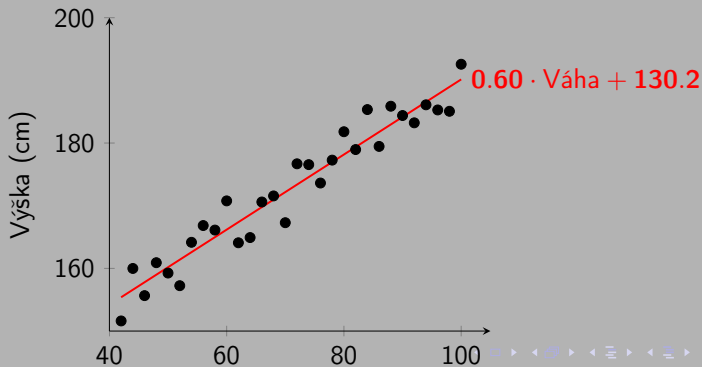
Uvažme následující úlohu: Předpokládejme, že mezi veličinami  $x$  a  $y$  je vztah

$$y = a + bx.$$

Naměříme hodnoty  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  pro  $x_i \neq x_j, i \neq j$ . Chceme najít  $a$  a  $b$  tak, aby součet čtverců

$$(y_1 - a - bx_1)^2 + (y_2 - a - bx_2)^2 + \dots + (y_n - a - bx_n)^2$$

byl minimální.



## Pseudoinverzní matice XIII - Aplikace

To vede k řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot a + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ tj.}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_z = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_b.$$

## Pseudoinverzní matice XIV - Aplikace

Tedy  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  najdeme jako vektor (pseudořešení naší soustavy)

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}^{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Nutně  $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$  je matice typu  $2 \times 2$ , která je invertibilní. Odtud

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^* \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

# Polární rozklad matice I

Motivace: Na polární rozklad matice se můžeme dívat jako na zobecnění exponenciálního tvaru komplexního čísla.

Vezměme lineární zobrazení  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(z) = (a + ib) \cdot z$ ,

$a, b \in \mathbb{R}$ . Pak

$$a + ib = r \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha), r \geq 0.$$

Na tuto rovnost se můžeme dívat jako na vyjádření bodu  $z$  komplexní roviny v polárních souřadnicích. Odtud zřejmě název **polární rozklad**.

# Polární rozklad matice I

Motivace: Na polární rozklad matice se můžeme dívat jako na zobecnění exponenciálního tvaru komplexního čísla.

Vezměme lineární zobrazení  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(z) = (a + ib) \cdot z$ ,

$a, b \in \mathbb{R}$ . Pak

$$a + ib = r \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha), r \geq 0.$$

Na tuto rovnost se můžeme dívat jako na vyjádření bodu  $z$  komplexní roviny v polárních souřadnicích. Odtud zřejmě název **polární rozklad**.

Matice typu  $1 \times 1$  s prvkem  $\cos \alpha + i \sin \alpha$  je vždy unitární, matice typu  $1 \times 1$  s prvkem  $r \in \mathbb{R}$  je samoadjungovaná, pro  $r > 0$  pak pozitivně definitní. Totiž,

$$\begin{aligned}(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)^* &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha - i \sin \alpha) \\ &= \cos 0 - i \sin 0 = 1 \\ r^* &= r.\end{aligned}$$

# Polární rozklad matice II

## Věta

### **Věta o polárním rozkladu matice**

Nechť  $\mathbf{A}$  je čtvercová matice nad  $\mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{C}$ . Pak existuje samoadjungovaná ( $\mathbf{R} = \mathbf{R}^*$ ) pozitivně semidefinitní ( $\langle \mathbf{R}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ )

matice  $\mathbf{R}$  a unitární matice  $\mathbf{U}$  tak, že  $\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ .

Navíc platí, že  $\mathbf{R}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*$  (píšeme  $\mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*}$ ).

Je-li  $\mathbf{A}$  invertibilní, je tento rozklad jednoznačný.

## Gramův-Schmidtův OP a QR-rozklad I - opakování

Nechť  $\mathbf{A}$  je invertibilní čtvercová matice nad  $\mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{C}$ . Tedy její sloupce  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n$  jsou lineárně nezávislé vektory. Víme, že pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu můžeme najít ortogonální (a tedy nenulové) vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 = R_{11}\mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2 = R_{12}\mathbf{u}_1 + R_{22}\mathbf{u}_2$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_3 = R_{13}\mathbf{u}_1 + R_{23}\mathbf{u}_2 + R_{33}\mathbf{u}_3$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n = R_{1n}\mathbf{u}_1 + R_{2n}\mathbf{u}_2 + R_{3n}\mathbf{u}_3 + \dots + R_{nn}\mathbf{u}_n$$



# Gramův-Schmidtův OP a QR-rozklad II - opakování

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2, \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n) \cdot \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1n} \\ 0 & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{2n} \\ 0 & 0 & R_{33} & \dots & R_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\underbrace{\left( \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}, \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|}, \dots, \frac{\mathbf{u}_n}{\|\mathbf{u}_n\|} \right)}_Q \begin{pmatrix} (\|\mathbf{u}_1\| R_{11}) & (\|\mathbf{u}_2\| R_{12}) & (\|\mathbf{u}_3\| R_{13}) & \dots & (\|\mathbf{u}_n\| R_{1n}) \\ 0 & \|\mathbf{u}_2\| R_{22} & (\|\mathbf{u}_3\| R_{23}) & \dots & (\|\mathbf{u}_n\| R_{2n}) \\ 0 & 0 & (\|\mathbf{u}_2\| R_{33}) & \dots & (\|\mathbf{u}_n\| R_{3n}) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (\|\mathbf{u}_n\| R_{nn}) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Q}$  unitární nebo ortogonální matice,  $\mathbf{R}$  horní trojúhelníková matice.

# Gramův-Schmidtův OP a QR-rozklad III - opakování

Aplikace QR-rozkladu:

Platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{R} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{b}.$$

Poslední rovnice lze snadno spočítat bez použití Gaussovy eliminace, protože  $\mathbf{R}$  je horní trojúhelníková matice.