

16. SPEKTRUM LINEÁRNÍHO OPERÁTORU

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

16. dubna 2020

Abstrakt

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu struktury lineárních operátorů na konečně rozměrných vektorových prostorech. Zavedeme důležitý, ještě v předchozí kapitole avizovaný pojem ***spektra lineárního operátoru***, jakožto i pojmy ***algebraické a geometrické násobnosti vlastní hodnoty***, které nám umožní klasifikovat případné překážky jeho diagonalizovatelnosti.

Abstrakt

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu struktury lineárních operátorů na konečně rozměrných vektorových prostorech.

Zavedeme důležitý, ještě v předchozí kapitole avizovaný pojem *spektra lineárního operátoru*, jakožto i pojmy *algebraické a geometrické násobnosti vlastní hodnoty*, které nám umožní klasifikovat případné překážky jeho diagonalizovatelnosti.

Dále si ujasníme, jaký vliv má řešitelnos polynomických rovnic v základním tělese na spektrum lineárního operátoru. Vhodným rozšířením tohoto pole lze dosáhnout, aby každý lineární operátor na n -rozměrném prostoru měl n vlastních hodnot, pokud každou z nich počítáme tolikrát, jaká je její algebraická násobnost.

Budeme pracovat s vektorovým prostorem nad tělesem K .

Obsah přednášky I

- ▶ Spektrum lineárního operátoru
 - ▶ Algebraická násobnost vlastní hodnoty.
 - ▶ Geometrická násobnost vlastní hodnoty.
 - ▶ Jordanova buňka a její vlastnosti.
 - ▶ Diagonalizovatelnost lineárního operátoru.

Obsah přednášky I

- ▶ Spektrum lineárního operátoru
 - ▶ Algebraická násobnost vlastní hodnoty.
 - ▶ Geometrická násobnost vlastní hodnoty.
 - ▶ Jordanova buňka a její vlastnosti.
 - ▶ Diagonalizovatelnost lineárního operátoru.
- ▶ Ortogonální a unitární operátory
 - ▶ Vlastnosti ortogonálních a unitárních operátorů.
 - ▶ Příklady ortogonálních a unitárních operátorů.
 - ▶ Vlastní hodnoty a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů.

Spektrum lineárního operátoru a matice I

Připomeňme, že polynom $f(x) \in K[x]$ **dělí** polynom $g(x) \in K[x]$, pokud existuje polynom $p(x) \in K[x]$ takový, že $g(x) = f(x)p(x)$.

Spektrum lineárního operátoru a matice I

Připomeňme, že polynom $f(x) \in K[x]$ **dělí** polynom $g(x) \in K[x]$, pokud existuje polynom $p(x) \in K[x]$ takový, že $g(x) = f(x)p(x)$.

Zřejmě, pokud f dělí g , tak stupeň f je menší nebo rovný stupni g .

Spektrum lineárního operátoru a matice I

Připomeňme, že polynom $f(x) \in K[x]$ **dělí** polynom $g(x) \in K[x]$, pokud existuje polynom $p(x) \in K[x]$ takový, že $g(x) = f(x)p(x)$.

Zřejmě, pokud f dělí g , tak stupeň f je menší nebo rovný stupni g .

Skalár $\lambda \in K$ je **kořenem polynomu** $f(x)$ (t. j. $f(\lambda) = 0$) právě tehdy, když polynom $x - \lambda$ dělí polynom $f(x)$.

Skalár $\lambda \in K$ je **m -násobný kořen polynomu** $f(x) \in K[x]$, pokud $(x - \lambda)^m$ je **nejvyšší** mocnina polynomu $x - \lambda$, která ještě dělí $f(x)$.

Namísto o 1-násobném kořenu mluvíme o **jednoduchém kořenu**.

Spektrum lineárního operátoru a matice I

Připomeňme, že polynom $f(x) \in K[x]$ **dělí** polynom $g(x) \in K[x]$, pokud existuje polynom $p(x) \in K[x]$ takový, že $g(x) = f(x)p(x)$.

Zřejmě, pokud f dělí g , tak stupeň f je menší nebo rovný stupni g .

Skalár $\lambda \in K$ je **kořenem polynomu** $f(x)$ (t. j. $f(\lambda) = 0$) právě tehdy, když polynom $x - \lambda$ dělí polynom $f(x)$.

Skalár $\lambda \in K$ je **m -násobný kořen polynomu** $f(x) \in K[x]$, pokud $(x - \lambda)^m$ je **nejvyšší** mocnina polynomu $x - \lambda$, která ještě dělí $f(x)$.

Namísto o 1-násobném kořenu mluvíme o **jednoduchém kořenu**.

Polynom f stupně n má nanejvýš n kořenů, pokud každý z nich počítáme s jeho násobností.

Pokud $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu f stupně n a m_1, \dots, m_k jsou jejich násobnosti, tak $m_1 + \dots + m_k \leq n$.

Spektrum lineárního operátoru a matice II

Skalár $\lambda \in K$ se nazývá ***m-násobná vlastní hodnota*** matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, pokud λ je m -násobným kořenem jejího charakteristického polynomu $\text{ch}_{\mathbf{A}}(x)$; říkáme rovněž, že ***algebraická násobnost vlastní hodnoty*** λ matice \mathbf{A} je m .

Namísto o 1-násobné mluvíme o *jednoduché vlastní hodnotě*.

Spektrum lineárního operátoru a matice II

Skalár $\lambda \in K$ se nazývá ***m-násobná vlastní hodnota*** matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, pokud λ je m -násobným kořenem jejího charakteristického polynomu $\text{ch}_{\mathbf{A}}(x)$; říkáme rovněž, že ***algebraická násobnost vlastní hodnoty*** λ matice \mathbf{A} je m .

Namísto o 1-násobné mluvíme o *jednoduché vlastní hodnotě*.

Podobně definujeme i pojem m -násobné vlastní hodnoty a algebraické násobnosti vlastní hodnoty pro lineární operátory na konečně rozměrných prostorech.

Matice řádu n má nanejvýš n vlastních hodnot, pokud každý z nich počítáme s její násobností.

Spektrum lineárního operátoru a matice II

Skalár $\lambda \in K$ se nazývá ***m-násobná vlastní hodnota*** matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, pokud λ je m -násobným kořenem jejího charakteristického polynomu $\text{ch}_{\mathbf{A}}(x)$; říkáme rovněž, že ***algebraická násobnost vlastní hodnoty*** λ matice \mathbf{A} je m .

Namísto o 1-násobné mluvíme o *jednoduché vlastní hodnotě*.

Podobně definujeme i pojem m -násobné vlastní hodnoty a algebraické násobnosti vlastní hodnoty pro lineární operátory na konečně rozměrných prostorech.

Matice řádu n má nanejvýš n vlastních hodnot, pokud každý z nich počítáme s její násobností.

Spektrum lineárního operátoru φ na konečně rozměrném vektorovém prostoru nazýváme množinu všech jeho vlastních hodnot a označujeme ji $\text{Spec}\varphi$. Stejně definujeme i ***spektrum matice*** $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, které značíme $\text{Spec}\mathbf{A}$.

Spektrum lineárního operátoru a matice III

Algebraickou váhou spektra $\text{Spec}\varphi$ nazýváme součet algebraických násobností všech vlastních hodnot $\lambda \in \text{Spec}\varphi$.

Říkáme, že lineární operátor φ má **jednoduché spektrum**, pokud se jeho algebraická váha rovná počtu jeho prvků, t. j. právě tehdy, když všechny vlastní hodnoty operátoru φ jsou jednoduché.

Spektrum lineárního operátoru a matice III

Algebraickou váhou spektra $\text{Spec}\varphi$ nazýváme součet algebraických násobností všech vlastních hodnot $\lambda \in \text{Spec}\varphi$.

Říkáme, že lineární operátor φ má **jednoduché spektrum**, pokud se jeho algebraická váha rovná počtu jeho prvků, t. j. právě tehdy, když všechny vlastní hodnoty operátoru φ jsou jednoduché.

Množina všech lineárních operátorů na vektorovém prostoru V tvoří vektorový prostor $\mathcal{L}(V, V)$ nad číselným tělesem K , jehož prvkem je i identický operátor $\text{id}_V: V \rightarrow V$.

Proto pro $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$ a $\lambda \in K$ i zobrazení $\varphi - \lambda \text{id}_V$, dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{x}$, je lineární operátor na V .

Spektrum lineárního operátoru a matice III

Algebraickou váhou spektra $\text{Spec}\varphi$ nazýváme součet algebraických násobností všech vlastních hodnot $\lambda \in \text{Spec}\varphi$.

Říkáme, že lineární operátor φ má **jednoduché spektrum**, pokud se jeho algebraická váha rovná počtu jeho prvků, t. j. právě tehdy, když všechny vlastní hodnoty operátoru φ jsou jednoduché.

Množina všech lineárních operátorů na vektorovém prostoru V tvoří vektorový prostor $\mathcal{L}(V, V)$ nad číselným tělesem K , jehož prvkem je i identický operátor $\text{id}_V: V \rightarrow V$.

Proto pro $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$ a $\lambda \in K$ i zobrazení $\varphi - \lambda \text{id}_V$, dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{x}$, je lineární operátor na V .

Zřejmě $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$ je vlastní vektor operátoru φ příslušející k jeho vlastní hodnotě λ právě tehdy, když $\mathbf{v} \in \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_V)$.

Spektrum lineárního operátoru a matice IV

Lineární podprostor $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_V) \subseteq V$ nazýváme **vlastní podprostor lineárního operátoru** $\varphi: V \rightarrow V$ příslušející k jeho vlastní hodnotě $\lambda \in K$.

Zřejmě pro všechny vektory $\mathbf{v} \in \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_V)$ platí $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, tedy $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_V)$ je invariantní podprostor operátoru φ .

Spektrum lineárního operátoru a matice IV

Lineární podprostor $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_V) \subseteq V$ nazýváme **vlastní podprostor lineárního operátoru** $\varphi: V \rightarrow V$ příslušející k jeho vlastní hodnotě $\lambda \in K$.

Zřejmě pro všechny vektory $\mathbf{v} \in \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_V)$ platí $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, tedy $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_V)$ je invariantní podprostor operátoru φ .

Geometrickou násobností vlastní hodnoty λ lineárního operátoru φ nazýváme dimenzi $\dim(\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_V))$ jeho vlastního podprostoru příslušejícího k λ .

Geometrická násobnost vlastní hodnoty λ matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ se zřejmě rovná číslu $\dim \mathcal{R}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$.

Připomínáme, že $\mathcal{R}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ označuje podprostor řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$, takže platí

$$1 \leq \dim \mathcal{R}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = n - h(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \leq n.$$

Spektrum lineárního operátoru a matice V

Geometrickou váhou spektra lineárního operátoru φ na konečně rozměrném vektorovém prostoru nazýváme **součet geometrických násobností** všech jeho vlastních hodnot.

$\lambda \in K$ je vlastní hodnota právě tehdy, když $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_V) \neq \{\mathbf{0}\}$, což je ekvivalentní s nenulovostí jak geometrické tak i algebraické násobnosti λ vzhledem k φ .

Spektrum lineárního operátoru a matice V

Geometrickou váhou spektra lineárního operátoru φ na konečně rozměrném vektorovém prostoru nazýváme **součet geometrických násobností** všech jeho vlastních hodnot.

$\lambda \in K$ je vlastní hodnota právě tehdy, když $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_V) \neq \{\mathbf{0}\}$, což je ekvivalentní s nenulovostí jak geometrické tak i algebraické násobnosti λ vzhledem k φ .

Lemma

Nechť φ je lineární operátor na konečně rozměrném vektorovém prostoru V a $S \subseteq V$ je jeho invariantní podprostor. Označme $\varphi_1 = \varphi \upharpoonright S$ zúžení lineárního operátoru φ na podprostor S . Potom charakteristický polynom $\text{ch}_{\varphi_1}(x)$ dělí charakteristický polynom $\text{ch}_{\varphi}(x)$.

Spektrum lineárního operátoru a matice VI

Příklad

Nechť je zadán lineární operátor $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ předpisem

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Charakteristický polynom $\text{ch}_\varphi(\lambda)$ je

$$\text{ch}_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^3.$$

Tedy $\lambda_{1,2,3} = 2$ je vlastní číslo algebraické násobnosti 3. Zároveň

$$\text{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^3.$$

Máme pak to, že geometrická násobnost vlastního čísla 2 je 3.

Spektrum lineárního operátoru a matice VII

Tvrzení

Nechť λ je vlastní hodnota lineárního operátoru φ na konečně rozměrném vektorovém prostoru V . Potom její geometrická násobnost je menší nebo rovná její algebraické násobnosti.

Pokud algebraická násobnost skaláru λ vzhledem k operátoru φ je ≥ 1 , tj. pokud λ je vlastní hodnota, tak i geometrická násobnost λ vzhledem k φ je alespoň 1.

Spektrum lineárního operátoru a matice VIII

Příklad

Označme $\mathbf{J}_n \in K^{n \times n}$ čtvercovou matici řádu n , jejíž prvky na místech $(i, i + 1)$ jsou rovné 1 pro $1 \leq i \leq n - 1$ a všechny ostatní prvky jsou rovné 0. Zřejmě $h(\mathbf{J}_n) = n - 1$. Dále položme

$$\mathbf{J}_n(\lambda) = \lambda \mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

pro $\lambda \in K$. Tedy $\mathbf{J}_n(\lambda)$ je tvořena diagonálou z n λ 'ů, vedlejší diagonálou vpravo od ní z $n - 1$ jednotek a zbytek jsou nuly.

Spektrum lineárního operátoru a matice IX

Například

$$\mathbf{J}_1(\lambda) = (\lambda), \quad \mathbf{J}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{J}_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ atd.}$$

Spektrum lineárního operátoru a matice IX

Například

$$\mathbf{J}_1(\lambda) = (\lambda), \quad \mathbf{J}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{J}_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ atd.}$$

Každá matice tvaru $\mathbf{J}_n(\lambda)$ se nazývá **Jordanova buňka** řádu n .
Zřejmě i $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_n(0)$ je Jordanova buňka.

Charakteristický polynom Jordanovy buňky $\mathbf{J}_n(\lambda)$ je

$$\det(\mathbf{J}_n(\lambda) - x\mathbf{I}_n) = \det \mathbf{J}_n(\lambda - x) = (\lambda - x)^n.$$

Tato matice má **jedinou vlastní hodnotu** $x = \lambda$ s algebraickou násobností n .

Spektrum lineárního operátoru a matice X

Na druhé straně, podprostor řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{J}_n(\lambda) - \lambda \mathbf{I}_n = \mathbf{J}_n$ je jednorozměrný, generovaný vlastním vektorem $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$.

Tedy geometrická násobnost vlastní hodnoty λ matice $\mathbf{J}_n(\lambda)$ je stále jen 1, bez ohledu na to, jak velké je n . Proto $\mathbf{J}_n(\lambda)$ pro $n \geq 2$ **není podobná se žádnou diagonální maticí.**

Spektrum lineárního operátoru a matice X

Na druhé straně, podprostor řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{J}_n(\lambda) - \lambda \mathbf{I}_n = \mathbf{J}_n$ je jednorozměrný, generovaný vlastním vektorem $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$.

Tedy geometrická násobnost vlastní hodnoty λ matice $\mathbf{J}_n(\lambda)$ je stále jen 1, bez ohledu na to, jak velké je n . Proto $\mathbf{J}_n(\lambda)$ pro $n \geq 2$ **není podobná se žádnou diagonální maticí**.

Tvrzení

Podobné matice mají stejné spektrum, včetně algebraické i geometrické násobnosti každé vlastní hodnoty.

Spektrum lineárního operátoru a matice XI

Věta

Nechť φ je lineární operátor na konečně rozměrném vektorovém prostoru V dimenze n . Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) φ je diagonalizovatelný;*
- (ii) geometrická váha spektra $\text{Spec}\varphi$ se rovná n ;*
- (iii) algebraická váha spektra $\text{Spec}\varphi$ se rovná n a algebraická násobnost každé vlastní hodnoty se rovná její geometrické násobnosti;*
- (iv) algebraická i geometrická váha spektra $\text{Spec}\varphi$ se rovná n .*

Spektrum lineárního operátoru a matice XII

Překážky bránící diagonalizaci lineárního operátoru φ na n -rozměrném vektorovém prostoru V se dělí do dvou kategorií:

- (1) algebraická váha spektra $\text{Spec}\varphi$ je menší než $n = \dim V$, tj. φ má "málo" vlastních hodnot v tělese K , i když každou z nich počítáme i s její algebraickou násobností (příkladem je například rotace o 90°);
- (2) geometrická váha spektra $\text{Spec}\varphi$ je menší než jeho algebraická váha, t.j. geometrická násobnost některých vlastních hodnot nedosahuje jejich algebraické násobnosti, tj. φ má "málo" vlastních vektorů jako v předchozím příkladu.

Prekážky druhého typu definitivně vylučují diagonalizaci.

Ortogonalní a unitární operátory I

Nechť U a V jsou vektorové prostory se skalárním součinem nad \mathbb{R} (resp. nad \mathbb{C}).

Zobrazení $\varphi: U \rightarrow V$ se nazývá *ortogonální* (resp. *unitární*), jestliže pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ platí

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Ortogonalní a unitární operátory I

Nechť U a V jsou vektorové prostory se skalárním součinem nad \mathbb{R} (resp. nad \mathbb{C}).

Zobrazení $\varphi: U \rightarrow V$ se nazývá *ortogonální* (resp. *unitární*), jestliže pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ platí

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Lemma

Je-li $\varphi: U \rightarrow V$ ortogonální nebo unitární, pak

- (1) $\|\varphi(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$,
- (2) $\varphi(\mathbf{u}) \perp \varphi(\mathbf{v})$ pokud $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$,
- (3) φ je prosté,
- (4) φ zobrazuje ortonormální posloupnost (bázi) na ortonormální posloupnost,
- (5) $\angle(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ pro φ ortogonální.

Ortogonální a unitární operátory II

Příklad

Otočení roviny okolo počátku o úhel α je lineární ortogonální operátor $\mathbf{R}_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, který má v kanonické bázi $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

matici

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Ortogonální a unitární operátory II

Příklad

Otočení roviny okolo počátku o úhel α je lineární ortogonální operátor $\mathbf{R}_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, který má v kanonické bázi $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

matici
$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Totíž

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}_\alpha(\mathbf{u}), \mathbf{R}_\alpha(\mathbf{v}) \rangle &= (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{u})^T (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{R}_\alpha^T \cdot \mathbf{R}_\alpha) \cdot \mathbf{v} = \\ \mathbf{u}^T \cdot \left(\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \right) \cdot \mathbf{v} &= \\ \mathbf{u}^T \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Ortogonální a unitární operátory III

Zobecnění předcházejícího příkladu:

Nechť $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je tvaru $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, kde matice \mathbf{A} splňuje $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Analogicky jako v předcházejícím příkladu máme

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})^T (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Ortogonální a unitární operátory III

Zobecnění předcházejícího příkladu:

Nechť $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je tvaru $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, kde matice \mathbf{A} splňuje $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Analogicky jako v předcházejícím příkladu máme

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})^T (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Reálná čtvercová matice \mathbf{A} se nazývá *ortogonální*, jestliže

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \quad \text{neboli} \quad \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n.$$

Ortogonální a unitární operátory III

Zobecnění předcházejícího příkladu:

Nechť $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je tvaru $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, kde matice \mathbf{A} splňuje $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Analogicky jako v předcházejícím příkladu máme

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})^T (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Reálná čtvercová matice \mathbf{A} se nazývá *ortogonální*, jestliže

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \quad \text{neboli} \quad \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n.$$

Komplexní čtvercová matice \mathbf{A} se nazývá *unitární*, jestliže

$$\mathbf{A}^{-1} = \overline{\mathbf{A}}^T \quad \text{neboli} \quad \overline{\mathbf{A}}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n.$$

(pruh znamená matici komplexně sdružených čísel).

Ortogonalní a unitární operátory IV

Jak na matici \mathbf{A} poznáme, že je ortogonální (unitární)?

- její sloupce tvoří ortonormální bázi v \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n),
- její řádky tvoří ortonormální bázi v \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n).

Ortogonální a unitární operátory IV

Jak na matici \mathbf{A} poznáme, že je ortogonální (unitární)?

- její sloupce tvoří ortonormální bázi v \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n),
- její řádky tvoří ortonormální bázi v \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n).

Věta

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze v prostoru U a necht' $\varphi: U \rightarrow U$ je lineární operátor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (1) $\varphi: U \rightarrow V$ ortogonální (nad \mathbb{R}) resp. unitární (nad \mathbb{C}),
- (2) $(\varphi(\mathbf{u}_1), \varphi(\mathbf{u}_2), \dots, \varphi(\mathbf{u}_n))$ je ortonormální báze v prostoru U ,
- (3) \mathbf{A} je reálná ortogonální matice resp. komplexní unitární matice, kde $(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \mathbf{A}$.

Ortogonální a unitární operátory V

Lemma

Nechť \mathbf{A} je ortogonální resp. unitární matice. Pak

$$|\det \mathbf{A}| = 1.$$

Speciálně je determinant ortogonální matice ± 1 .

Lemma

Nechť φ je unitární operátor. Pak

- (1) Vlastní čísla operátoru φ mají absolutní hodnotu 1.*
- (2) Vlastní vektory příslušné k různým vlastním číslům operátoru φ jsou na sebe kolmé.*

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů I

Věta

Nechť $\varphi: U \rightarrow U$ je unitární operátor. Pak v prostoru U existuje ortonormální báze $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ tvořená vlastními vektory. V této bázi

$$(\varphi)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ jsou vlastní čísla operátoru φ tvaru

$$\lambda_k = \cos \alpha_k + i \sin \alpha_k.$$

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů II

Příklad

Popišme nyní všechny ortogonální operátory $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Každý takový operátor má tvar $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, kde \mathbf{A} je ortogonální matice typu 2×2 .

Nechť první sloupec matice \mathbf{A} je tvaru $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Nutně musí platit (protože sloupce ortogonální matice mají normu 1) $a^2 + b^2 = 1$. Protože ale řádky ortogonální matice mají rovněž normu 1, máme $a_{12} = \pm b$ a $a_{22} = \pm a$.

Zároveň máme, že první sloupec musí být kolmý na druhý sloupec, tedy druhý sloupec má jeden ze dvou následujících tvarů:

$$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ nebo } \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů II

(1) Uvažme nejprve případ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Protože $a^2 + b^2 = 1$, lze zvolit $a = \cos \alpha$ a $b = \sin \alpha$. Pak $\mathbf{A} = \mathbf{R}_\alpha$ a φ je otočení roviny okolo počátku o úhel α .

Pro $\alpha \neq k\pi$ nemá φ reálná vlastní čísla (viz předcházející kapitola).

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů II

(1) Uvažme nejprve případ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Protože $a^2 + b^2 = 1$, lze zvolit $a = \cos \alpha$ a $b = \sin \alpha$. Pak $\mathbf{A} = \mathbf{R}_\alpha$ a φ je otočení roviny okolo počátku o úhel α .

Pro $\alpha \neq k\pi$ nemá φ reálná vlastní čísla (viz předcházející kapitola).

(2) Uvažme nyní případ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Pak charakteristický polynom matice \mathbf{A} je tvaru

$$\text{ch}_{\mathbf{A}}(x) = \det \begin{pmatrix} a - x & b \\ b & -a - x \end{pmatrix} = x^2 - a^2 - b^2 = x^2 - 1.$$

Tedy \mathbf{A} má vlastní hodnoty 1 a -1 s vlastními vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2$, které jsou na sebe kolmé.

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů III

Označme $\varphi_1 = \varphi \upharpoonright [\mathbf{u}_1]$ zúžení lineárního operátoru φ na podprostor $[\mathbf{u}_1]$ a $\varphi_2 = \varphi \upharpoonright [\mathbf{u}_2]$ zúžení φ na podprostor $[\mathbf{u}_2]$.

Pak φ_1 je identita na $[\mathbf{u}_1]$ ($\varphi_1(\mathbf{u}_1) = \varphi(\mathbf{u}_1) = 1\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1$) a φ_2 je $-$ identita na $[\mathbf{u}_2]$ ($\varphi_2(\mathbf{u}_2) = \varphi(\mathbf{u}_2) = (-1)\mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_2$).

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů III

Označme $\varphi_1 = \varphi \upharpoonright [\mathbf{u}_1]$ zúžení lineárního operátoru φ na podprostor $[\mathbf{u}_1]$ a $\varphi_2 = \varphi \upharpoonright [\mathbf{u}_2]$ zúžení φ na podprostor $[\mathbf{u}_2]$.

Pak φ_1 je identita na $[\mathbf{u}_1]$ ($\varphi_1(\mathbf{u}_1) = \varphi(\mathbf{u}_1) = 1\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1$) a φ_2 je $-$ identita na $[\mathbf{u}_2]$ ($\varphi_2(\mathbf{u}_2) = \varphi(\mathbf{u}_2) = (-1)\mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_2$).

Položíme-li $a = \cos 2\alpha$ a $b = \sin 2\alpha$, lze snadno ověřit, že chceme-li normované (a správně orientované) \mathbf{u}_1 a \mathbf{u}_2 , nutně bude $\mathbf{u}_1 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ a $\mathbf{u}_2 = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$.

Obdržíme pak nám známou souměrnost roviny podle osy procházející počátkem a svírající s osou x úhel α , tj. určené vektorem $\mathbf{u}_1 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$.

Tedy φ je lineární operátor $\mathbf{S}_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, který má vzhledem na kanonickou bázi $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ matici

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů IV

$$\mathbf{u}_1 = (\cos 135^\circ, \sin 135^\circ),$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1),$$
$$\lambda_1 = 1$$

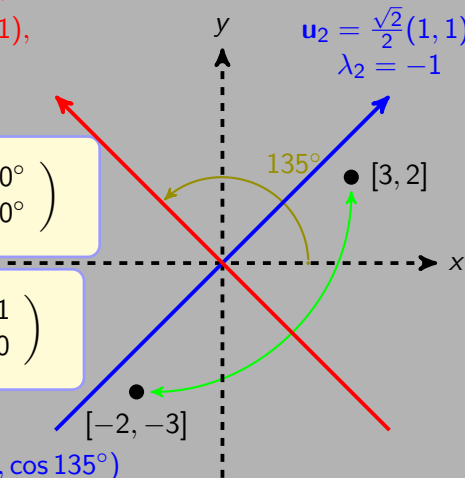
$$\mathbf{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1),$$
$$\lambda_2 = -1$$

$$\mathbf{S}_{135^\circ} = \begin{pmatrix} \cos 270^\circ & \sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & -\cos 270^\circ \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{135^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = (-\sin 135^\circ, \cos 135^\circ)$$

Překlopení podle přímky $y = -x$



Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů V

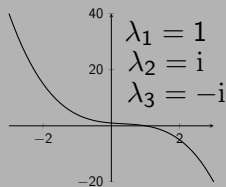
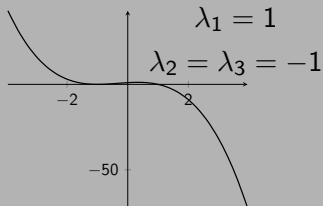
Příklad

Popišme nyní všechny ortogonální operátory $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Operátor φ je tvaru $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ a jeho charakteristický polynom je pak tvaru

$$\text{ch}_{\mathbf{A}}(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Protože jde o polynom lichého stupně, má alespoň jeden reálný kořen λ_1 o absolutní hodnotě 1 (jedná se o ortogonální operátor). Tedy $\lambda_1 \in \{-1, 1\}$.



Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů VI

Další kořeny charakteristického polynomu mohou být komplexní. Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ kořen polynomu s reálnými koeficienty, je i $\bar{\lambda}$, tj. komplexně sdružené číslo k $\lambda \in \mathbb{C}$ rovněž kořenem.

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů VI

Další kořeny charakteristického polynomu mohou být komplexní. Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ kořen polynomu s reálnými koeficienty, je i $\bar{\lambda}$, tj. komplexně sdružené číslo k $\lambda \in \mathbb{C}$ rovněž kořenem.

Totíž, pokud $-\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, pak i

$$\overline{-\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c} = \bar{0}. \quad \text{Odtud}$$

$$-\bar{\lambda}^3 + \bar{a}\bar{\lambda}^2 + \bar{b}\bar{\lambda} + \bar{c} = 0. \quad \text{Tedy celkem}$$

$$-\bar{\lambda}^3 + a\bar{\lambda}^2 + b\bar{\lambda} + c = 0.$$

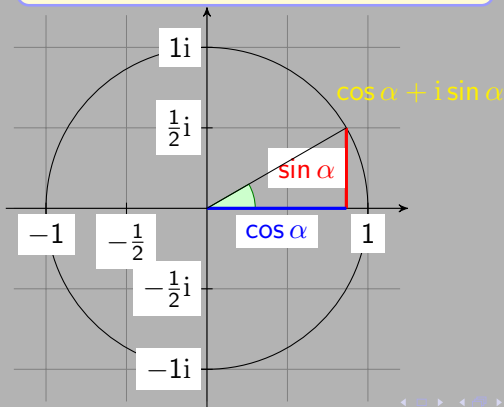
Protože je \mathbf{A} reálná ortogonální matice, je nutně i unitární.

$$\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{I}_3.$$

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů VII

Vlastní čísla matice \mathbf{A} v \mathbb{C} mají absolutní hodnotu 1. Každé takové číslo lze psát jako $\cos \alpha + i \sin \alpha$. Tedy všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou

$$\pm 1, \cos \alpha + i \sin \alpha, \cos \alpha - i \sin \alpha$$



Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů VIII

Pro $\alpha = 0$ máme vlastní čísla

$$\pm 1, 1, 1,$$

pro $\alpha = \pi$ máme vlastní čísla

$$\pm 1, -1, -1$$

pro jiná $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ máme **dvě** vlastní čísla s nenulovou imaginární částí. Rozlišíme dva případy.

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů VIII

Pro $\alpha = 0$ máme vlastní čísla $\pm 1, 1, 1$,

pro $\alpha = \pi$ máme vlastní čísla $\pm 1, -1, -1$

pro jiná $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ máme **dvě** vlastní čísla s nenulovou imaginární částí. Rozlišíme dva případy.

(1) Vlastní čísla ortogonální matice \mathbf{A} tvaru 3×3 jsou

$$1, \cos \alpha + i \sin \alpha, \cos \alpha - i \sin \alpha.$$

Nechť $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ je vlastní vektor k vlastnímu číslu 1. Pak $\mathbb{R}^3 = [\mathbf{u}_1] \oplus [\mathbf{u}_1]^\perp$. Přitom jak $[\mathbf{u}_1]$ tak $[\mathbf{u}_1]^\perp$ jsou invariantní vůči zobrazení $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. Totiž

$$\varphi(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 \text{ a } \mathbf{u}_1 \perp [\mathbf{u}_1]^\perp \text{ implikuje } \varphi(\mathbf{u}_1) \perp \varphi([\mathbf{u}_1]^\perp).$$

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů IX

Toto zobrazení je tedy v rovině $[\mathbf{u}_1]^\perp = \varphi([\mathbf{u}_1]^\perp)$ otočení o úhel α . Odtud pak v celém \mathbb{R}^3 to je otočení o úhel α kolem osy dané vektorem $[\mathbf{u}_1]$. Velikost a směr otáčení určíme tak, že vezmeme vektor $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}_1]^\perp$, zobrazíme ho do $\varphi(\mathbf{v})$ a následně určíme odchylku těchto dvou vektorů. Úhel otáčení α je

$$\alpha = \angle(\mathbf{v}, \varphi(\mathbf{v})) = \arccos \frac{\langle \mathbf{v}, \varphi(\mathbf{v}) \rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\varphi(\mathbf{v})\|}.$$

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů X

(2) Vlastní čísla ortogonální matice \mathbf{A} tvaru 3×3 jsou

$$-1, \cos \alpha + i \sin \alpha, \cos \alpha - i \sin \alpha.$$

Opět $\mathbb{R}^3 = [\mathbf{u}_1] \oplus [\mathbf{u}_1]^\perp$, kde $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ je vlastní vektor k vlastnímu číslu -1 .

Výsledné zobrazení je pak složení symetrie podle roviny $[\mathbf{u}_1]^\perp = \varphi([\mathbf{u}_1]^\perp)$ a otočení kolem osy dané vektorem $[\mathbf{u}_1]$.

Velikost a směr otáčení určují vektory $\mathbf{v}, \varphi(\mathbf{v}) \in [\mathbf{u}_1]^\perp$ a opět úhel otáčení α je

$$\alpha = \angle(\mathbf{v}, \varphi(\mathbf{v})) = \arccos \frac{\langle \mathbf{v}, \varphi(\mathbf{v}) \rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\varphi(\mathbf{v})\|}.$$

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů XI

Lemma

Nechť $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lineární operátor zadáný maticí \mathbf{A} , tj. $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. Tato matice zadává lineární operátor $\varphi^{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ stejným předpisem $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.

Jestliže $\lambda = a + ib$ je vlastní číslo matice \mathbf{A} nad \mathbb{C} s vlastním vektorem $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2 \in \mathbb{C}^n$, kde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$, pak $\bar{\lambda} = a - ib$ je rovněž vlastním číslem s vlastním vektorem $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - i\mathbf{u}_2$.

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů XI

Lemma

Nechť $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lineární operátor zadáný maticí \mathbf{A} , tj. $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. Tato matice zadává lineární operátor $\varphi^{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ stejným předpisem $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.

Jestliže $\lambda = a + ib$ je vlastní číslo matice \mathbf{A} nad \mathbb{C} s vlastním vektorem $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2 \in \mathbb{C}^n$, kde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$, pak $\bar{\lambda} = a - ib$ je rovněž vlastním číslem s vlastním vektorem $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - i\mathbf{u}_2$.

Každou ortogonální matici \mathbf{A} můžeme chápat rovněž jako unitární matici, která zadává unitární operátor $\varphi^{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, kde $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů XII

Lemma

Nechť $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je ortogonální operátor zadaný ve standardní bázi ortogonální maticí \mathbf{A} , tj. $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. Nechť $\lambda = a + ib$ je vlastní číslo matice \mathbf{A} nad \mathbb{C} s vlastním vektorem

$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2 \in \mathbb{C}^n$, kde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \neq \pm 1$, tj. \mathbf{u} je vlastním vektorem unitárního operátoru $\varphi^{\mathbb{C}}$, $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.

Potom platí

- 1. $\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\|$ a $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$.*
- 2. Dvourozměrný podprostor $\mathbf{V} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \subseteq \mathbb{R}^n$ je invariantní vůči φ a φ je na tomto podprostoru otočením o úhel α od vektoru \mathbf{u}_2 k vektoru \mathbf{u}_1 .*

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů XIII

Věta

Nechť $\varphi: U \rightarrow U$ je ortogonální operátor. Potom U je direktním součtem navzájem kolmých invariantních podprostorů dimenze 1 a 2. V podprostorech dimenze 1 působí φ jako identita nebo -identita, v podprostorech dimenze 2 působí φ jako otáčení.