Domácí úkoly ke cvičení č. 8

1. V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_5$ zjistěte v obou následujících případech odchylku vektoru $\mathbf{u}$ od vektorového podprostoru $\mathbf{V}$ zadaného pokaždé jako lineární obal uvedeného souboru vektorů:

(a) $\mathbf{u} = (1, 1, 3, 5, 6)$,
$\mathbf{V} = [(1, 7, -1, -1, -6), (1, -5, 5, 5, 6)]$,

(b) $\mathbf{u} = (4, 4, 4, 1, 1)$,
$\mathbf{V} = [(1, 1, 3, -4, 4), (1, -3, -3, 4, -4), (1, 3, 5, -5, 9)]$.

(Doporučení: Vypočtěte nejprve ortogonální projekci vektoru $\mathbf{u}$ do toho z vektorových podprostorů $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}^{\perp}$ euklidovského prostoru $\mathbf{E}_5$, který má nižší dimenzi.)

2. V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_5$ zjistěte v obou následujících případech odchylku vektoru $\mathbf{u}$ od vektorového podprostoru $\mathbf{V}$ zadaného pokaždé implicitně jako množina všech řešení uvedené homogenní soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$:

(a) $\mathbf{u} = (2, 2, 2, 2, 3)$,

$$\mathbf{V}: \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 13x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 13x_4 + 2x_5 &= 0, \end{aligned}$$

(b) $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 3, 3)$,

$$\mathbf{V}: \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 \phantom{{}- 7x_4} - x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 - 7x_4 + 7x_5 &= 0, \\ 5x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 7x_4 \phantom{{}+ 7x_5} &= 0. \end{aligned}$$

(Doporučení: Totéž jako v předchozí úloze. Ortogonální doplněk $\mathbf{V}^{\perp}$ vektorového podprostoru $\mathbf{V}$ euklidovského prostoru $\mathbf{E}_5$ zadaného implicitně jako množina všech řešení dané homogenní soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$ je lineárním obalem vektorů tvořících řádky matice dotyčné homogenní soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$.)

3. V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_5$ zjistěte v obou následujících případech odchylku vektorového podprostoru $\mathbf{V}$ zadaného pokaždé jako lineární obal uvedeného souboru vektorů od nadroviny $\mathbf{N}$ zadané vždy implicitně jako množina všech řešení jedné homogenní lineární rovnice nad $\mathbb{R}$:

(a) $\mathbf{V} = [(1,-1,1,1,3),(1,-3,-3,-3,-9)]$,
$\mathbf{N}:\ \ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 \ =\ 0.$

(b) $\mathbf{V} = [(1,2,-1,-3,-1),(1,2,-1,1,3),(5,-2,1,1,1)]$,
$\mathbf{N}:\ \ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 3x_5 \ =\ 0.$

(Návod: Ortogonálním doplňkem $\mathbf{N}^{\perp}$ nadroviny $\mathbf{N}$ v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_5$ je jednorozměrný vektorový podprostor tohoto euklidovského prostoru, takže $\mathbf{N}^{\perp} = [\mathbf{u}]$ pro nějaký vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^5$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$. Pak v případě, že $\{\mathbf{o}\} \neq \mathbf{V} \neq \mathbb{R}^5$, mezi hledanou odchylkou $\measuredangle(\mathbf{V},\mathbf{N})$ a odchylkou $\measuredangle(\mathbf{u},\mathbf{V})$ vektoru $\mathbf{u}$ od vektorového podprostoru $\mathbf{V}$ platí vztah $\measuredangle(\mathbf{V},\mathbf{N}) = \frac{\pi}{2} - \measuredangle(\mathbf{u},\mathbf{V})$.)

4. V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_5$ zjistěte v obou následujících případech odchylku vektorového podprostoru $\mathbf{V}$ zadaného pokaždé implicitně jako množina všech řešení uvedené homogenní soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$ od nadroviny $\mathbf{N}$ zadané rovněž vždy implicitně jako množina všech řešení jedné homogenní lineární rovnice nad $\mathbb{R}$:

(a)
$$\begin{aligned} \mathbf{V}:\ \ & 2x_1 + x_2 - x_3 - 6x_4 + 4x_5 = 0,\\ & 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0,\\ \mathbf{N}:\ \ & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \mathbf{V}:\ \ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0,\\ & 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0,\\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0,\\ \mathbf{N}:\ \ & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{aligned}$$

(Návod: Tentýž jako v předchozí úloze. Opět ortogonálním doplňkem $\mathbf{N}^{\perp}$ nadroviny $\mathbf{N}$ v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_5$ je jednorozměrný vektorový podprostor tohoto euklidovského prostoru.

Zde je možné využít též faktu, že pokud $\{\mathbf{o}\} \neq \mathbf{V} \neq \mathbb{R}^5$, pak mezi hledanou odchylkou $\measuredangle(\mathbf{V}, \mathbf{N})$ zmíněných vektorových podprostorů a odchylkou $\measuredangle(\mathbf{V}^\perp, \mathbf{N}^\perp)$ jejich ortogonálních doplňků v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_5$ platí vztah $\measuredangle(\mathbf{V}, \mathbf{N}) = \measuredangle(\mathbf{V}^\perp, \mathbf{N}^\perp)$. Je vhodné zde připomenout též doporučení k úloze 2.)

5. V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_5$ zjistěte ve všech následujících případech odchylku vektorových podprostorů $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$. Každý z vektorových podprostorů $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ je v prvním případě zadán jako lineární obal uvedeného souboru vektorů, zatímco ve zbývajících dvou případech je každý z těchto vektorových podprostorů zadán implicitně jako množina všech řešení uvedené homogenní soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$:

(a) $\mathbf{V} = [(1,1,-2,1,-1),(1,-3,2,1,3)]$,
$\mathbf{W} = [(1,1,2,1,-1),(1,-3,-2,1,3),(1,-1,-3,-1,1)]$.

(b) $$\mathbf{V}: \begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0,\\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 0, \end{aligned}$$
$$\mathbf{W}: \begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0,\\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 &= 0,\\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 &= 0. \end{aligned}$$

(c) $$\mathbf{V}: \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 0,\\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 &= 0, \end{aligned}$$
$$\mathbf{W}: \begin{aligned} 6x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 0,\\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 &= 0. \end{aligned}$$

(Návod: Splňují-li vektorové podprostory $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ euklidovského prostoru $\mathbf{E}_5$ podmínky $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} \neq \{\mathbf{o}\}$, $\mathbf{V} \not\subseteq \mathbf{W}$, $\mathbf{W} \not\subseteq \mathbf{V}$, pak jejich odchylka $\measuredangle(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_5$ je rovna odchylce $\measuredangle(\overline{\mathbf{V}}, \overline{\mathbf{W}})$ vektorových podprostorů $\overline{\mathbf{V}} = \mathbf{V} \cap (\mathbf{V} \cap \mathbf{W})^\perp$ a $\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{W} \cap (\mathbf{V} \cap \mathbf{W})^\perp$. Tímto způsobem lze ve všech výše uvedených případech převést daný problém na problém obdobný problémům z úloh 1 a 2.)