4. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 9. 3. 2020

Řešení odevzdejte v příštím semináři 16. 3. 2020

1. (1 bod) Lineární obal budeme definovat dvěma různými způsoby a ukážeme, že obě definice určují stejnou množinu.

Nechť U je vektorový prostor. Nechť $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou vektory v U. Definujme

$$[u_1, u_2, \dots, u_k] =_{\text{def}} \{a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ku_k \in U |\ a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}$$

a

$$\langle u_1, u_2, \dots, u_k\rangle =_{\text{def}} \bigcap_{V \text{ podprostor v } U \text{obsahující vektory } u_1, u_2, \dots, u_k} V.$$

Druhá definice znamená, že děláme průnik všech podprostorů obsahujících dané vektory.

Dokažte rovnost obou množin, tj.

$$[u_1, u_2, \dots, u_k] = \langle u_1, u_2, \dots, u_k\rangle.$$

2. (1 bod) Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, jestliže platí:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_o \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_o)(\forall k \geq n_o)(|a_n - a_k| < \varepsilon).$$

Z definice limity dokažte: jetliže existuje $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, pak je posloupnost $\{a_n\}$ cauchyovská.

Pro reálnou funkci f definovanou na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ zformulujte analogickou definici cauchyovské funkce v bodě a tak, aby opět platilo: jestliže existuje $\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$, pak je f v bodě a cauchyovská. Tuto větu nedokazujte, ale využijte ji k tomu, abyste ukázali, že funkce definovaná předpisem $f(x) = 0$ pro x racionální a $f(x) = 1$ pro x iracionální nemá limitu v bodě 2.