

## 6. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 24. 3. 2020

Řešení odevzdejte prostřednictvím odevzdáárny v ISu do 30. 3. 2020, 16 hodin

1. (1 bod) Jednou ze základních vlastností spojitých reálných funkcí definovaných na intervalu  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  je “nabývání mezihodnot”: jestliže je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá a  $f(a) < c < f(b)$ , pak existuje  $y \in (a, b)$  takové, že  $f(y) = c$ .

Dokončete důkaz této věty, který začíná takto: Uvažujme množinu

$$M = \{x \in [a, b]; f(x) < c\}.$$

Množina  $M$  je neprázdná ( $a \in M$ ) a shora omezená ( $b$  je její horní závora). Proto existuje její supremum  $y = \sup M$ .

2. (1 bod) Ukažte, že v oboru racionálních čísel výše uvedená věta neplatí. Najděte spojitou funkci  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  takovou, že pro nějaké  $a < b$  je  $f(a) < 0 < f(b)$ , ale  $f(x) \neq 0$  pro všechna  $x \in [a, b]$ .