7. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 1. 4. 2020

Řešení odevzdejte prostřednictvím odevzdávárny v ISu do 7. 4. 2020, 16 hodin

1. (1 bod) Mějme neprázdné uzavřené intervaly $[a_n, b_n]$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ takové, že $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ pro všechna n. Dokažte, že jejich průnik

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Návod. Dokažte, že $\sup\{a_n\, n \in \mathbb{N}\}$ leží v průniku.

Je-li navíc $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, pak je průnik jednobodový. Rovněž dokažte.

Ukažte příklad posloupnosti do sebe vnořených otevřených intervalů, pro které je průnik prázdný.

2. (1 bod) Najděte příklad spojité funkce na otevřeném intervalu (a, b), která není na (a, b) omezená shora ani zdola.

Najděte příklad spojité funkce na otevřeném intervalu (a, b), která je omezená shora i zdola, ale na (a, b) nenabývá svého maxima ani minima.