8. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 8. 4. 2020

Řešení odevzdejte prostřednictvím odevzdávárny v ISu do 15. 4. 2020, 16 hodin

1. (1 bod) Nechť $a < b$ jsou dvě reálná čísla. Uvažujme množinu $M \subseteq [a, b]$ s těmito vlastnostmi:

(1) $a \in M$.
(2) Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost prvků z M, pak $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in M$.
(3) Pro každé $y \in M$, pak existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(y - \delta, y + \delta) \cap [a, b] \subseteq M.$$

Dokažte, že $M = [a, b]$.

Návod: Přečtěte si důkaz tvrzení, že spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ je shora omezená ze 7. semináře.

Toto tvrzení se někdy nazývá plíživé lemma.

2. (1 bod) Nechť U je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ a $\varphi : U \to U$ je lineární zobrazení s vlastností $\varphi \circ \varphi = \varphi$, tj. $\varphi(\varphi(u)) = \varphi(u)$ pro všechny vektory $u \in U$. Dokažte, že pak je prostor U direktním součtem vlastních podprostorů k vlastním číslům 1 a 0, tj.

$$U = \ker(\varphi - \mathrm{id}) \oplus \ker(\varphi).$$

Najděte nějaký geometrický příklad takového zobrazení v $\mathbb{R}^3$.

Návod: Přečtěte si řešení 4. úlohy v 8. semináři.