

10. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 23. 4. 2020

Řešení odevzdejte prostřednictvím odevzdávárny v ISu do 29. 4. 2020, 16 hodin

1. (1 bod) Využijte větu dokázanou v úloze 3 v textu 10. semináře k tomu, abyste dokázali tuto verzi l'Hospitalova pravidla:

Nechť $c \in (a, b)$, nechť $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou dvě spojité funkce, které mají derivaci v intervalech (a, c) a (c, b) , $f(c) = g(c) = 0$, ale $g'(x) \neq 0$ pro $x \neq c$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pak existuje rovněž limita podílu obou funkcí a platí

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. (1 bod) Nechť A je reálná symetrická matice tvaru $n \times n$ s vlastností $x^T A x \geq 0$ pro každý sloupcový vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Dokažte, že pak existuje symetrická matice B taková, že $B^2 = A$. Může být takových matic více než dvě (B a $-B$)?