11. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 30. 4. 2020

Řešení odevzdejte prostřednictvím odevzdávárny v ISu do 9. 5. 2020, 16 hodin

1. (1 bod) Ukažte, že funkce $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{if } x \neq 0, \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

má derivaci ve všech bodech, která je však nespojitá v bodě 0.

2. (1 bod) Nechť U je reálný nebo komplexní vektorový prostor a $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný operátor. Dokažte, že pro každou reálnou funkci f, jejíž definiční obor obsahuje spektrum operátoru φ můžeme definovat samoadjungovaný operátor $f(\varphi) : U \to U$ tak, že platí:

(a) Je-li $f \equiv 1$, pak $f(\varphi) = \mathrm{id}$.
(b) Je-li $f(x) = x$, je $f(\varphi) = \varphi$.
(c) Součet funkcí se převádí na součet operátorů: $(f + g)(\varphi) = f(\varphi) + g(\varphi)$.
(d) Součin funkcí se převádí na skládání operátorů: $(f \cdot g)(\varphi) = f(\varphi) \circ g(\varphi)$.
(e) Pro skládání funkcí platí: $(f \circ g)(\varphi) = f(g(\varphi))$.