5. seminář z matematiky, jaro 2020

V tomto semináři dokončíme řešení úloh ze vstupních písemek.

Příklad. 1. Dokažte: Lineárního zobrazení $\varphi : U \to V$ je prosté, právě když jeho jádro $\ker \varphi$ obsahuje pouze nulový vektor.

Definice prostého zobrazení: $\varphi : U \to V$ je prosté, jestliže

$$\forall u, w \in U : \quad u \neq w \Rightarrow \varphi(u) \neq \varphi(w).$$

Praktičtější je místo implikace s nerovnostmi použít obměnu (místo $p \Rightarrow q$ použít $\neg q \Rightarrow \neg p$), tedy

$$\forall u, w \in U : \quad \varphi(u) = \varphi(w) \Rightarrow u = w.$$

(A) $\varphi : U \to V$ prosté $\Rightarrow \ker\varphi = \{\vec{o}\}$.

Nechť $u \in \ker\varphi$. Pak $\varphi(u) = \vec{o} = \varphi(\vec{o})$.

Protože je φ prosté, musí být $u = \vec{o}$.

Tedy $\ker\varphi = \{\vec{o}\}$.

(B) $\ker\varphi = \{\vec{o}\} \Rightarrow \varphi$ je prosté

Nechť $\varphi(u) = \varphi(w)$. Pak

$$\varphi(u) - \varphi(w) = \vec{o}$$

$$\varphi(u - w) = \vec{o}$$

Tedy $u - w \in \ker\varphi = \{\vec{o}\}$,

$$u - w = 0$$

$$u = w$$

Tedy φ je prosté.

2

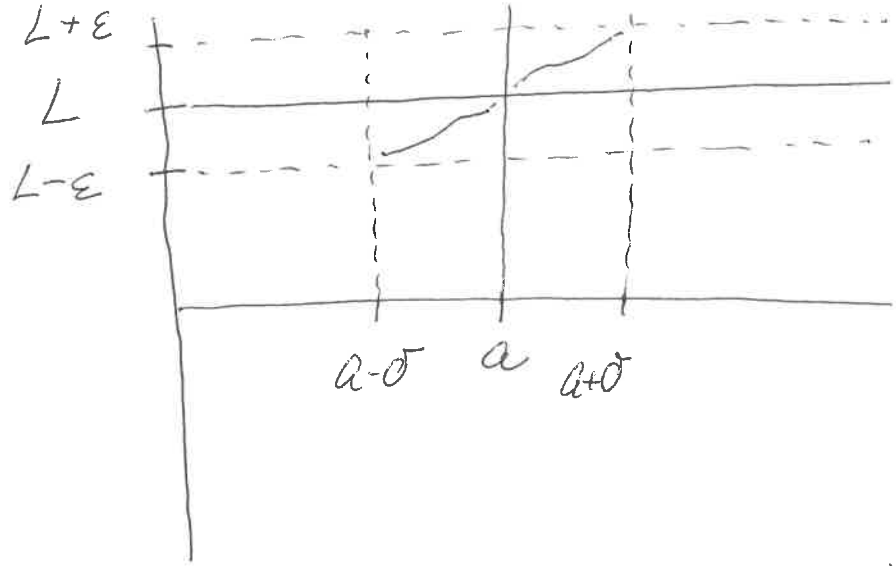
Příklad. 2. Pomocí kvantifikátorů napište negaci definice

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

Dokažte z definice limity (resp. z předchozí úlohy), že limita v bodě 2 funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = 0$ pro x iracionální a $f(x) = 1$ pro x racionální, není rovna 0.

ještě jednou definice limity

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$



(A) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \quad f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

lze psát pomocí absolutních hodnot a nerovností takto

(B) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon\right)$

Podstatné je, že f nemusí být v bodě a definována, nebo, pokud je, že na f(a) limita nezávisí.

Negace je

(C) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x-a| < \delta \ \wedge\ |f(x)-L| \geq \varepsilon$

Aplikujme negaci, abychom ukázali, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ iracionální} \\ 1 & x \text{ racionální} \end{cases}$$

nemá v bodě 2 limitu rovnou 0, tj

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 0.$$

Ukazujeme, že platí C.

Vezměme $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pro každé $\delta > 0$

existuje v intervalech

$$(2-\delta, 2) \cup (2, 2+\delta)$$

nějaké racionální číslo x. Proto $f(x) = 1$

a pro toto x platí

$$|f(x) - 0| = |1 - 0| = 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Příklad. 3. Z definice limity dokažte:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),$$

pokud limity vpravo existují.

Nejdříve si musíme uvědomit, co platí a co chceme dokázat.

Platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, tj.

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon_1$$

Dále $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, tj.

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \ \exists \delta_2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-B| < \varepsilon_2$$

Chceme dokázat $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$, tj.

$$*) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)+g(x)-(A+B)| < \varepsilon$$

Při důkazu použijeme tuto nerovnost

$$|s+t| \le |s| + |t|$$

pro

$$|f(x)+g(x)-(A+B)| = |(f(x)-A)+(g(x)-B)|$$

$$(N) \qquad \le |f(x)-A| + |g(x)-B|$$

Dokažujeme (*)

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ si vezmeme $\varepsilon_1 > 0$ a $\varepsilon_2 > 0$ tak, aby $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Např. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2$.

Nyní na ε_1 a ε_2 aplikujeme definici $\lim_{x \to a} f(x) = A$ a $\lim_{x \to a} g(x) = B$. Existuje tedy $\delta_1 > 0$ a $\delta_2 > 0$, že

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon_1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon_2$$

Nyní vezmeme. δ = menší z čísel δ_1, δ_2.

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2).$$

Potom

$$\forall \in \mathbb{R} \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon_1 \wedge |g(x) - B| < \varepsilon_2$$

Nyní aplikujeme nerovnost (N) pro tato x

$$|f(x) + g(x) - (A+B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon.$$

Tudíž pro každé $\varepsilon > 0$ jsme našli $\delta > 0$ že pro $0 < |x-a| < \delta$ je $|f(x) + g(x) - (A+B)| < \varepsilon$.

Příklad. 4. Napište definici spojitosti reálné funkce v bodě $a \in \mathbb{R}$. Dokažte z definice spojitosti: Jestliže jsou dvě funkce f a g spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak je v tomto bodě spojitý i jejich součin.

K tomu, aby funkce f byla v $a \in \mathbb{R}$ spojitá je potřeba, aby funkce f byla definována na nějakém okolí bodu a (a tedy i v bodě a). Často se definice spojitosti „odbude" tím, že se napíše

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Napišme si to přímo:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Toto budeme používat také při důkazu, že součin spojitých funkcí je spojitá funkce.

Důkaz vyžaduje jakousi zkušenost s počítáním s absolutní hodnotou a nerovnostmi. Speciálně chceme odhadnout

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)|$$

pomocí $|f(x) - f(a)|$ a $|g(x) - g(a)|$, a to shora. Použijeme následující „trik"

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| = |f(x)g(x) \underbrace{- f(a)g(x)}_{\text{ubereme}}$$

$$\underbrace{+ f(a)g(x)}_{\text{přidáme}} - f(a)g(a)| = |(f(x)-f(a))\,g(x)$$

$$+ f(a)(g(x)-g(a))| \leq |(f(x)-f(a))\,g(x)|$$

$$+ |f(a)(g(x)-g(a))| = |f(x)-f(a)|\,|g(x)|$$

$$+ |f(a)|\,|g(x)-g(a)|$$

Použili jsme $|s+t| \leq |s| + |t|$

a $|s \cdot t| = |s| \cdot |t|$.

Takže jsme odhadli shora výraz $|f(x) \cdot g(x) - f(a)g(a)|$ pomocí výrazů $|f(x)-f(a)|$, $|g(x)-g(a)|$, $|f(a)|$, $|g(x)|$.

Protože f a g jsou spojité v $\underline{a}$ budou pro $\underline{x}$ blízké $\underline{a}$ výrazy $|f(x)-f(a)|$ a $|g(x)-g(a)|$ „malé". $|f(a)|$ je konstanta. Chceme tedy odhadnout $|g(x)|$ pro $\underline{x}$ blízké $\underline{a}$ shora. Platí

$$|g(x)| = |g(a) + g(x) - g(a)| \leq |g(a)| + |g(x)-g(a)|$$

g je spojitá v a, tedy existuje $\Delta > 0$, že pro $|x-a| < \Delta$ je

$$|g(x)-g(a)|<1.$$

Tedy pro tato x je

$$|g(x)| \le |g(a)| + |g(x)-g(a)| < |g(a)| + 1.$$

Nyní dáme „dohromady" celý důkaz:

f je spojitá v <u>a</u>:

$$\forall \varepsilon_1>0 \ \exists \delta_1>0 \quad |x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon_1$$

g je spojitá v a

$$\forall \varepsilon_2>0 \ \exists \delta_2>0 \quad |x-a|<\delta_1 \Rightarrow |g(x)-g(a)|<\varepsilon_2$$

Chceme dokázat, že $f(x)g(x)$ je spojitá v a, tj

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \quad |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)g(x)-f(a)g(a)|<\varepsilon.$$

Zvolíme-li pro $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$ příslušná $\delta_1>0, \delta_2>0$ můžeme vzít $\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\Delta)$
a ještě $\Delta>0$, můžeme vzít $|x-a|<\delta$ platí
Pro všechna x taková, že

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon_1$$
$$|g(x)-g(a)|<\varepsilon_2$$
$$|g(x)| < g(a)+1.$$

Z odhadu pro $|f(x)g(x)-f(a)g(a)|$ dostaneme

$$|f(x)g(x)-f(a)g(a)| \le |f(x)-f(a)|\,|g(x)| + |f(a)|\,|g(x)-g(a)|$$
$$< \varepsilon_1\big(|g(a)|+1\big) + \varepsilon_2\,|f(a)|$$

Nyní pro každé $\varepsilon > 0$ určitě existují kladná čísla $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ taková, že

$$\varepsilon \geq \varepsilon_1 \left(|g(a)| + 1 \right) + \varepsilon_2 |f(a)|$$

(konkrétní hodnota ε_1 a ε_2 nás nezajímá!)

Pro tato $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ zvolíme $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ z definice spojitosti f a g. Vezmeme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \Delta)$ a pro všechna x taková, že $|x-a| < \delta$ dostaneme

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| < \varepsilon_1 \left(|g(a)| + 1 \right) + \varepsilon_2 |f(a)| \leq \varepsilon .$$

Tím je spojitost součinu $f(x)g(x)$ v bodě <u>a</u> dokázána.