6. seminář z matematiky, jaro 2020

Ukážeme si řešení 4. a 5. domácí úlohy.

1. (4. DU) Lineární obal budeme definovat dvěma různými způsoby a ukážeme, že obě definice určují stejnou množinu.
Nechť U je vektorový prostor. Nechť $u_1, u_2, \ldots, u_k$ jsou vektory v U. Definujme

$$[u_1, u_2, \ldots, u_k] =_{\text{def}} \{a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ku_k \in U |\ a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}$$

a

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_k\rangle =_{\text{def}} \bigcap_{V \text{ podprostor v } U \text{obsahující vektory } u_1, u_2, \ldots, u_k} V.$$

Druhá definice znamená, že děláme průnik všech podprostorů obsahujících dané vektory.
Dokažte rovnost obou množin, tj.

$$[u_1, u_2, \ldots, u_k] = \langle u_1, u_2, \ldots, u_k\rangle.$$

Dokázat rovnost množin znamená dokázat dvě inkluze. Prvně ukážeme, že

- $[u_1, u_2, \ldots, u_k] \supseteq \langle u_1, u_2, \ldots, u_k\rangle$.

Množina $[u_1, u_2, \ldots, u_k]$ je vektorový podprostor v U obsahující vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Proto se vyskytuje mezi podprostory V, jejichž průnik definuje $\langle u_1, u_2, \ldots, u_k\rangle$. Tedy nutně $\langle u_1, u_2, \ldots, u_k\rangle \subseteq [u_1, u_2, \ldots, u_k]$.

- $[u_1, u_2, \ldots, u_k] \subseteq \langle u_1, u_2, \ldots, u_k\rangle$

Nechť V je libovolný podprostor obsahující vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Pak musí obsahovat i všechny jejich lineární kombinace $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ku_k$. Tedy $[u_1, u_2, \ldots, u_k] \subseteq V$.
Proto $[u_1, u_2, \ldots, u_k] \subseteq \bigcap_{\substack{\text{podprostory} \\ \text{obsahující } u_1, \ldots, u_k}} V = \langle u_1, u_2, \ldots, u_k\rangle$.

2

2. (4. DU) Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, jestliže platí:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_o \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_o)(\forall k \geq n_o)(|a_n - a_k| < \varepsilon).$$

Z definice limity dokažte: jetliže existuje $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, pak je posloupnost $\{a_n\}$ cauchyovská.

Pro reálnou funkci f definovanou na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ zformulujte analogickou definici cauchyovské funkce v bodě a tak, aby opět platilo: jestliže existuje $\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$, pak je f v bodě a cauchyovská. Tuto větu nedokazujte, ale využijte ji k tomu, abyste ukázali, že funkce definovaná předpisem $f(x) = 0$ pro x racionální a $f(x) = 1$ pro x iracionální nemá limitu v bodě 2.

Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, pak je posloupnost $\{a_n\}$ cauchyovská.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak existuje n_0 že pro všechna $n, k \geq n_0$ platí

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|a_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Rozdíl $|a_n - a_k|$ v absolutní hodnotě odhadneme takto

$$|a_n - a_k| = |(a_n - L) + (L - a_k)| \leq |a_n - L| + |L - a_k|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tím je důkaz proveden.

<u>Cauchyovská funkce f v bodě a</u>

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \ \forall y \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$

platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Funkce $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ racionální} \\ 1 & x \text{ iracionální} \end{cases}$

není Cauchyovská v bodě 2, neboť existuje ε, např. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje v intervalu $(a, a+\delta)$ racionální číslo x a iracionální číslo y, pro která platí

$$|f(x) - f(y)| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Proč v $(a, a+\delta)$ existuje racionální číslo? Je-li n přirozené takové, že

$$\frac{1}{\delta} < n,$$

pak

$$\frac{1}{n} < \delta$$

a v $(a, a+\delta)$ leží nějaké číslo $\frac{k}{n}$, kde k je celé. Toto číslo je racionální.

Proč v $(a, a+\delta)$ existuje iracionální číslo?

Víme, že $\sqrt{2}$ je iracionální. Ukážeme, že v $(a, a+\delta)$ leží nějaké číslo tvaru $\frac{k}{m}\sqrt{2}$, kde $m \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{Z}$.

To musí být také iracionální.

Zvolme $m \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$\frac{\sqrt{2}}{\delta} < m$$

Pak
$$\frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$$

Tedy nějaké $\frac{k}{n}\sqrt{2} \in (a, a+\delta)$.

5

3. (5. DU) Z definice spojitosti dokažte. Je-li funkce f spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a $f(a) \neq 0$, pak je funkce

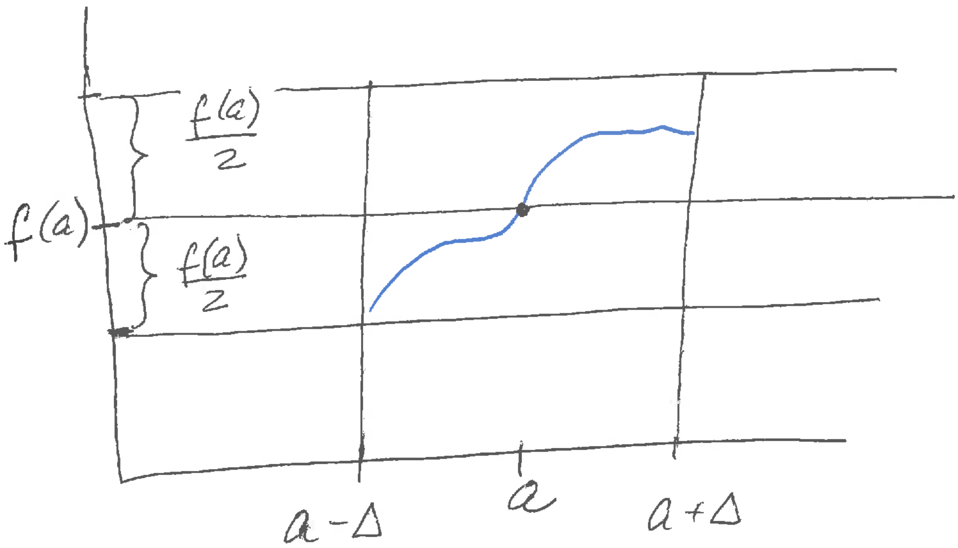
$$\frac{1}{f(x)}$$

omezená na nějakém okolí bodu a. Pro důkaz můžete předpokládat, že $f(a) > 0$.

Nechť $f(a) > 0$ a f je spojitá v a.

Platí

$\forall \varepsilon_1 > 0 \; \exists \delta_1 > 0 \; \forall x \in (a-\delta_1, a+\delta_2) \; |f(x)-f(a)| < \varepsilon_1$.



Dokážeme, že existuje $\Delta > 0$, že pro $x \in (a-\Delta, a+\Delta)$ je $f(x) > \frac{f(a)}{2}$. Pak

$$0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{2}{f(a)}$$

Tedy $\frac{1}{f(x)}$ je omezená.

Pro $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$ existuje $\Delta > 0$, že pro $x \in (a-\Delta, a+\Delta)$ je

$$|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$$

tj.

$$-\frac{f(a)}{2} < f(x) - f(a) < \frac{f(a)}{2}$$

K levé nerovnosti přičteme $f(a)$.
Dostaneme

$$\frac{f(a)}{2} = -\frac{f(a)}{2} + f(a) < f(x),$$

což jsme chtěli dokázat.

7

4. (5. DU) Pomocí výsledku předchozí úlohy dokažte z definice spojitosti: Je-li funkce f spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a $f(a) \neq 0$, pak je funkce

$$\frac{1}{f(x)}$$

spojitá v bodě a.

Platí

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \ \forall x \in (a-\delta_1, a+\delta_1) \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon_1.$$

Z příkladu 3 víme, že

$$\exists K > 0 \ \exists \Delta > 0 \ \forall x \in (a-\Delta, a+\delta) \ \frac{1}{|f(x)|} < K.$$

Chceme dokázat:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \ \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}\right| < \varepsilon.$$

Proto si vezmeme $\min(\delta_1, \Delta)$. Pro všechna $x \in (a - \min(\delta_1, \Delta), a + \min(\delta_1, \Delta))$ platí

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon_1$$

$$\frac{1}{|f(x)|} < K.$$

Odhadujme na tomto intervalu

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}\right| = \frac{|f(a) - f(x)|}{|f(a)|\,|f(x)|} < \frac{\varepsilon_1 \cdot K}{|f(a)|}$$

Pro dané $\varepsilon > 0$ najdi zvolme $\varepsilon_1 > 0$ takové, že $\frac{\varepsilon_1 K}{|f(a)|} < \varepsilon.$

Pro toto ε_1 zvolme $\delta_1 > 0$ z definice spojitosti funkce f a vezmeme

$$\delta = \min(\delta_1, \Delta) > 0.$$

Pro $x \in (a-\delta, a+\delta)$ pak platí

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} \right| = \frac{|f(a)-f(x)|}{|f(a)|\,|f(x)|} < \frac{\varepsilon_1 \cdot K}{|f(a)|} < \varepsilon,$$

což jsme chtěli dokázat.