7. seminář z matematiky, jaro 2020

Ukážeme si řešení 6. domácí úlohy a pak probereme další vlastnosti reálných čísel a spojitých funkcí, které závisejí na existenci suprema nebo infima.

1. (6. DU) Jednou ze základních vlastností spojitých reálných funkcí definovaných na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je "nabývání mezihodnost": jesliže je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá a $f(a) < c < f(b)$, pak existuje $y \in (a, b)$ takové, že $f(y) = c$.
Dokončete důkaz této věty, který začíná takto: Uvažujme množinu

$$M = \{x \in [a, b];\ f(x) < c\}.$$

Množina M je neprázdná ($a \in M$) a shora omezená (b je její horní závora). Proto existuje její supremum $y = \sup M$.

Chceme dokázat:

je-li $y = \sup M$, pak $f(y) = c$.

Převedeme to nepřímo, tj. dokážeme obměnu:

je-li $f(y) \neq c$, pak $y \neq \sup M$.

1) Nechť $f(y) < c$. Pak ~~[illegible]~~ určitě $y < b$, neboť $f(b) > c$. Ze spojitosti funkce f v bodě y plyne, že pro $\varepsilon = c - f(y) > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že ~~pro~~ $y + \delta < b$ a pro $x \in [y, y+\delta)$ je

$$f(x) < f(y) + \varepsilon = f(y) + c - f(y) = c$$

Tedy $[y, y+\delta) \subseteq M$ a y není horní závora množiny M, tedy $y \neq \sup M$.

2) Nechť $f(y) > c$. Pak určitě $y > a$, neboť $f(a) < c$. Ze spojitosti funkce f v bodě y plyne, že pro $\varepsilon = f(y) - c$

existuje $\delta > 0$, $y - \delta > 0$, tak, že pro $x \in (y-\delta, y]$ je

$$f(x) > f(y) - \varepsilon = f(y) - (f(y) - c) = c$$

Tedy každé $x \in (y-\delta, y)$ je horní závorou množiny M, tedy y není nejmenší horní závora množiny M, proto

$$y \neq \sup M.$$

Tím je důkaz ukončen.

2. (6. DU) Ukažte, že v oboru racionálních čísel výše uvedená věta neplatí. Najděte spojitou funkci $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takovou, že pro nějaké $a < b$ je $f(a) < 0 < f(b)$, ale $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in [a, b]$.

Vezmeme funkci $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2 - 2$, zvolíme $a = 0$, $b = 2$

$$f(a) = f(0) = -2 < 0$$

$$f(b) = f(2) = 2 > 0$$

Funkce $f : [0,2] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ je spojitá. Již dříve jsme si ukázali, že racionální čísla s vlastností

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

neexistuje.

Komentář k vašim řešením: Vyskytla se chybná řešení. Jejich hlavním nedostatkem bylo, že ste neurčila interval $[a, b]$, neukázala, že f je na $[a, b]$ spojitá (často nebyla) nebo se nepřesvědčila, že $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$.

3. (Omezenost spojitých funkcí na uzavřených intervalech.)
Každá spojitá funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je shora omezená.

Toto tvrzení lze dokázat mnoha způsoby. Vždy ale důkaz závisí na větě o supremu nebo na nějakém tvrzení, které je větě o supremu ekvivalentní. My uděláme důkaz přímo z věty o supremu.

Uvažujme množinu

$$M = \{ x \in [a,b] \mid \exists K > 0 \ \forall y \le x \ f(x) \le K \}$$

Dokážeme-li, že $b \in M$, je omezenost shora funkce f na intervalu $[a,b]$ ukázána.

Ze spojitosti funkce f v bodě a plyne, že na nějakém intervalu $[a, a+\delta)$ platí

$$f(x) \le f(a) + 1 \quad \text{pro} \quad x \in [a, a+\delta).$$

(Volíme $\varepsilon = 1$ v definici spojitosti.)

Položme

$$s = \sup M.$$

Z předchozího plyne $a < s$.

Dokážeme dvě tvrzení

(1) $\quad s = \sup M \in M$

(2) $\quad s = \sup M = b$

Jejich spojením dostaneme, že $b \in M$.

Důkaz (1)

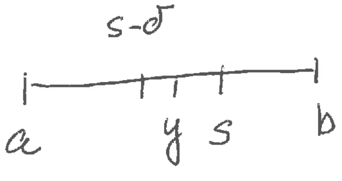
Ze spojitosti funkce f v bodě s plyne, že existuje $\delta > 0$ tak, že $s - \delta > a$ a pro všechna $x \in (s-\delta, s]$ je

$$f(x) < f(a) + 1$$

(Volíme $\varepsilon = 1$ v definici spojitosti.)

Protože však $s = \sup M$ existuje $y \in M$ takové, že $y \in (s-\delta, s)$.

Tedy $\quad f(x) \le K$ pro nějaké K a všechna $x \in [a, y]$



$f(x) \le f(s) + 1$ pro všechna $x \in (s-\delta, s]$

Protože $a < s - \delta < y < s$, platí pro všechna $x \in [a, s]$

$$f(x) \le \max\{K, f(s)+1\}$$

Tedy $s \in M$ podle definice M.

Důkaz (2) Chceme dokázat, že $s = \sup M = b$. Kdyby $s < b$, pak ze spojitosti f v bodě s plyne existence $\delta > 0$, takového, že $s+\delta < b$, $s-\delta > a$ a pro $x \in$ ~~[illegible]~~ $(s-\delta, s+\delta)$

$$f(x) < f(s)+1$$

(Opět volíme $\varepsilon = 1$ v definici spojitosti.) Dále existuje $y \in (s-\delta, s)$, které leží v M, neboť s je nejmenší horní závora množiny M. Tedy pro $x \in [a, s+\delta)$ je buď

$$f(x) \leq K, \text{ když } x \in [a, y]$$

nebo

$$f(x) \leq f(s)+1 \text{ když } x \in (s-\delta, s+\delta)$$

Tedy f je omezená shora konstantou

$$\max\{K, f(s)+1\}$$

na intervalu $[a, s+\frac{\delta}{2}]$. Tedy $s+\frac{\delta}{2} \in M$, což je spor s tím, že s je horní závora množiny M. Proto musí být $s = b$. ■

⑦

4. (Nabývání maxima spojitou funkcí na uzavřených intervalech).
Každá spojitá funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nabývá svého maxima, tj. existuje $y \in [a, b]$ takové, že pro všechna $x \in [a, b]$ je

$$f(x) \leq f(y).$$

Dokážeme pomocí předchozího tvrzení a jakéhosi „triku".

Množina hodnot funkce f

$$H(f) = \{ f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [a, b] \}$$

je evidentně neprázdná a podle předchozí věty shora omezená. Existuje tedy její supremum

$$m = \sup H(f).$$

Zřejmě $f(x) \leq m$ pro všechna $x \in [a, b]$. Pokud existuje $y \in [a, b]$, že $f(y) = m$, pak pro všechna $x \in [a, b]$ je

$$f(x) \leq m = f(y)$$

a jsme s důkazem hotovi.

Předpokládejme $f(x) < m$ pro všechna $x \in [a, b]$. Pak je funkce $g : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{1}{m - f(x)}$$

spojitá a podle předchozí věty shora omezená nějakým kladným číslem k. Pro všechna $x \in [a,b]$ je

$$0 < \frac{1}{m - f(x)} \leq k$$

Úpravou

$$m - f(x) \geq \frac{1}{k}$$

$$f(x) \leq m - \frac{1}{k}$$

To ale znamená, že $m - \frac{1}{k}$ je horní závora množiny $H(f)$, tedy $m \neq \sup H(f)$.

Jestliže $m = \sup H(f)$, musí být $m = f(y)$ pro nějaké $y \in [a,b]$. $\blacksquare$