(1)

8. seminář z matematiky, jaro 2020

Ukážeme si řešení 7. domácí úlohy. V úloze 3 si ukážeme jiný důkaz omezenosti spojité funkce na uzavřeném intervalu a v úloze 4 se podíváme na lineární algebru, konkrétně na vlastní podprostory jistého lineárního operátoru.

1. (7. DU) Mějme neprázdné uzavřené intervaly $[a_n, b_n]$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ takové, že $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ pro všechna n. Dokažte, že jejich průnik

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Návod. Dokažte, že $\sup\{a_n \, n \in \mathbb{N}\}$ leží v průniku.

Je-li navíc $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, pak je průnik jednobodový. Rovněž dokažte.

Ukažte příklad posloupnosti do sebe vnořených otevřených intervalů, pro které je průnik prázdný.

Vzhledem k inkluzím platí

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots a_{k-1} \leq a_k \leq b_k \leq b_{k-1} \leq \dots b_2 \leq b_1$$

Proto pro každé dva indexy n a k platí

$$a_n \leq b_k$$

Tedy každé b_k je horní závora množiny $A = \{a_n \in \mathbb{R} \mid n = 1, 2, \dots\}$. Tedy $\sup A = s$ jako nejmenší horní závora množiny A musí splňovat

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq s$ (neboť s je horní závora)
2. $\forall k \in \mathbb{N} \quad s \leq b_k$ (neboť s je nejmenší horní závora)

Proto pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $s \in [a_n, b_n]$ a tedy $s \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Dokážeme: je-li $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, $y > x$, pak $\lim(b_n - a_n) \neq 0$.

Položme $y - x = \varepsilon > 0$. Protože $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$,

1. (7. DU) Mějme neprázdné uzavřené intervaly $[a_n, b_n]$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ takové, že $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ pro všechna n. Dokažte, že jejich průnik

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Návod. Dokažte, že $\sup\{a_n \, n \in \mathbb{N}\}$ leží v průniku.

Je-li navíc $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, pak je průnik jednobodový. Rovněž dokažte.

Ukažte příklad posloupnosti do sebe vnořených otevřených intervalů, pro které je průnik prázdný.

musí být $x, y \in [a_n, b_n]$ pro všechna n.
Tedy $b_n - a_n \geq y - x = \varepsilon$. To ovšem znamená, že $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) \neq 0$.

Příklad posloupnosti otevřených intervalů, která splňuje $(a_n, b_n) \supseteq (a_{n+1}, b_{n+1})$, ale

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) = \emptyset.$$

Zvolme $(a_n, b_n) = (0, \frac{1}{n})$.
Pro každé x reálné, existuje číslo n tak, že buď $x \leq 0$ nebo $x \geq \frac{1}{n}$.
Tedy $x \notin (0, \frac{1}{n})$. Proto

$$x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n})$$

a tento průnik je tedy prázdný.

2. (7. DU) Najděte příklad spojité funkce na otevřeném intervalu (a, b), která není na (a, b) omezená shora ani zdola.

Najděte příklad spojité funkce na otevřeném intervalu (a, b), která je omezená shora i zdola, ale na (a, b) nenabývá svého maxima ani minima.

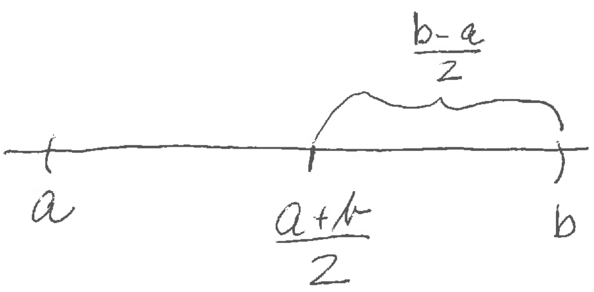
Tento příklad je velice jednoduchý, nicméně i zde se vyskytla nesprávná řešení.

Především intervalem (a, b) je míněn interval omezený, tedy s $a, b \in \mathbb{R}$, nikoliv $a = -\infty$ nebo $b = +\infty$.

Příklad spojité funkce na (a, b), která není omezená shora ani zdola je

$f(x) = \operatorname{tg} x$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Pokud bychom takovouto funkci měli napsat na předepsaném intervalu (a, b), tak můžeme vzít



$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)$$

Druhý příklad je jednoduchý. Vezmeme $f(x) = x$ na (a, b).

(4)

3. Pomocí tvrzení v příkladu 1 dokažte, že každá spojitá reálná funkce na uzavřeném intervalu $[a, b]$ je shora omezená.

Důkaz udělám sporem. Předpokládejme, že funkce f na $[a,b]$ je spojitá, ale není na něm shora omezená. Sestrojíme posloupnost intervalů $[a_n, b_n]$ takovou, že $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ a f není shora omezená na $[a_n, b_n]$.

Konstrukce indukcí:

Položíme $a_1 = a$, $b_1 = b$. f není shora omezená na $[a_1, b_1]$ podle našeho předpokladu.

$$[a_1, b_1] = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right] \cup \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

Kdyby f byla shora omezená na obou těchto intervalech, byla by omezená shora i na intervalu $[a_1, b_1]$. Proto zvolíme za $[a_2, b_2]$ ten z intervalů $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$, na němž f není shora omezená. Analogicky dostaneme intervaly $[a_3, b_3]$, $[a_4, b_4]$, atd. Tím je posloupnost intervalů s výše uvedenými vlastnostmi sestrojena.

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0.$$

5

3. Pomocí tvrzení v příkladu 1 dokažte, že každá spojitá reálná funkce na uzavřeném intervalu $[a, b]$ je shora omezená.

Podle tvrzení v 1. úloze je

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}.$$

Funkce f je v c spojitá, tedy existuje okolí bodu c o poloměru $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap [a, b]$ je

$$f(x) < f(c) + 1.$$

Tedy f je shora omezená na množině $(c-\delta, c+\delta) \cap [a, b]$. Protože $\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n$ existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ je

$$[a_n, b_n] \subset (c-\delta, c+\delta) \cap [a, b]$$

Tedy f je na intervalu $[a_n, b_n]$ shora omezená, což je spor s tím, jak jsme konstruovali $[a_n, b_n]$. (f na $[a_n, b_n]$ není shora omezená!)

(6)

4. Nechť U je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ a $\varphi: U \to U$ je lineární zobrazení s vlastností $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$, tj. $\varphi(\varphi(u)) = u$ pro všechny vektory $u \in U$. Dokažte, že pak je prostor U direktním součtem vlastních podprostorů k vlastním číslům 1 a -1, tj.

$$U = \ker(\varphi - \mathrm{id}) \oplus \ker(\varphi + \mathrm{id}).$$

Prvně chceme ukázat, že

$$U = \ker(\varphi - id) + \ker(\varphi + id)$$

Tedy chceme, aby každý vektor $u \in U$ šel napsat jako součet

(1) $\quad u = v + z \qquad \varphi(v) = v$ a $\varphi(z) = -z$

Aplikujme na rovnici (1) zobrazení φ a použijme další dva vztahy. Dostaneme

(2) $\quad \varphi(u) = \varphi(v) + \varphi(z) = v - z$

Sečtením rovnic (1) a (2) dostaneme

$$u + \varphi(u) = 2v,$$

odečtením

$$u - \varphi(u) = 2z$$

Odtud plyne, že musí platit

$$v = \frac{u + \varphi(u)}{2}, \quad z = \frac{u - \varphi(u)}{2}.$$

Skutečně máme

$$u = \frac{u + \varphi(u)}{2} + \frac{u - \varphi(u)}{2}.$$

Dokažme, že $\dfrac{u + \varphi(u)}{2} \in \ker(\varphi - id)$

(7)

4. Nechť U je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ a $\varphi: U \to U$ je lineární zobrazení s vlastností $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$, tj. $\varphi(\varphi(u)) = u$ pro všechny vektory $u \in U$. Dokažte, že pak je prostor U direktním součtem vlastních podprostorů k vlastním číslům 1 a -1, tj.

$$U = \ker(\varphi - \mathrm{id}) \oplus \ker(\varphi + \mathrm{id}).$$

a že $\dfrac{u - \varphi(u)}{2} \in \ker(\varphi - id)$

Platí

$$\varphi\left(\frac{u+\varphi(u)}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(\varphi(u) + \varphi(\varphi(u))\big) = \frac{1}{2}\big(\varphi(u) + u\big)$$

Tedy $\dfrac{u+\varphi(u)}{2}$ leží skutečně v $\ker(\varphi - id)$.

Analogicky

$$\varphi\left(\frac{u-\varphi(u)}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(\varphi(u) - \varphi(\varphi(u))\big) = -\frac{u-\varphi(u)}{2}$$

Tedy $\dfrac{u-\varphi(u)}{2} \in \ker(\varphi + id)$.

Zbývá ukázat, že

$$\ker(\varphi - id) \cap \ker(\varphi + id) = \{0\}.$$

Nechť $u \in \ker(\varphi - id) \cap \ker(\varphi + id)$. To znamená, že $\varphi(u) = u$ a současně $\varphi(u) = -u$. Tedy $u = \varphi(u) = -u$, odtud $2u = \vec{o}$, tedy $u = \vec{o}$. ∎

<u>Poznámka</u> Příkladem operátoru s vlastností $\varphi \circ \varphi = id$, jsou symetrie podle roviny nebo přímky v $\mathbb{R}^3$ (procházející počátkem). $\ker(\varphi - id)$ je rovina (nebo přímka), $\ker(\varphi + id)$ je ortogonální doplněk roviny (nebo přímky).