(1)

9. seminář z matematiky, jaro 2020

Ukážeme si řešení 8. domácí úlohy. V úloze 3 dokážeme základní tvrzení diferenciálního počtu jedné proměnné. V úloze 4 se podíváme na charakteristiku kolmých projekcí.

1. (8. DU) Nechť $a < b$ jsou dvě reálná čísla. Uvažujme množinu $M \subseteq [a, b]$ s těmito vlastnostmi:

(1) $a \in M$.
(2) Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost prvků z M, pak $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in M$.
(3) Pro každé $y \in M$, pak existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(y - \delta, y + \delta) \cap [a, b] \subseteq M.$$

Dokažte, že $M = [a, b]$.

Toto tvrzení se někdy nazývá plížívé lemma.

Uvažujme další množinu definovanou takto

$$P = \{m \in [a,b],\ [a,m] \subseteq M\}$$

Zřejmě $a \in P$, neboť $a \in M$ a tedy $[a,a] \subseteq M$. Proto $P \neq \emptyset$. Dále je P omezená shora číslem b. Proto existuje

$$s = \sup P.$$

(1) Dokážeme, že $s \in P$. Z definice s jako suprema množiny P plyne existence posloupnosti $m_k \in P$, takové, že

$$m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots \leq s$$

a $\lim_{k\to\infty} m_k = s$. Protože $m_k \in P$, je

$$[a, m_k] \subseteq M$$

pro všechna k. Proto

$$[a, s) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a, m_k] \subseteq M.$$

2

1. (8. DU) Nechť $a < b$ jsou dvě reálná čísla. Uvažujme množinu $M \subseteq [a,b]$ s těmito vlastnostmi:

(1) $a \in M$.
(2) Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost prvků z M, pak $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in M$.
(3) Pro každé $y \in M$, pak existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(y-\delta, y+\delta) \cap [a,b] \subseteq M.$$

Dokažte, že $M = [a,b]$.

Toto tvrzení se někdy nazývá plíživé lemma.

Podle vlastnosti (2) je rovněž $s \in M$. Proto $[a,s] \subseteq M$ a tudíž $s \in P$.

2 Dokážeme, že $s = b$.

Kdyby $s < b$, existovalo by podle (3) $\delta > 0$ (neboť $s \in M$) takové, že

$$(s-\delta, s+\delta) \cap [a,b] \subseteq M.$$

Tudíž z $[a,s] \subseteq M$ a

$$\left[s, s+\frac{\delta}{2}\right] \subseteq M$$

plyne $\left[a, s+\frac{\delta}{2}\right] \subseteq M$, což je spor s tím, že s je supremum množiny P.

Z 1 plyne $[a,s] \subseteq M$, z 2 plyne $[a,b] \subseteq M$, tedy $M = [a,b]$, což jsme chtěli dokázat.

2. (8. DU) Nechť U je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ a $\varphi: U \to U$ je lineární zobrazení s vlastností $\varphi \circ \varphi = \varphi$, tj. $\varphi(\varphi(u)) = \varphi(u)$ pro všechny vektory $u \in U$. Dokažte, že pak je prostor U direktním součtem vlastních podprostorů k vlastním číslům 1 a 0, tj.

$$U = \ker(\varphi - \mathrm{id}) \oplus \ker(\varphi).$$

Najděte nějaký geometrický příklad takového zobrazení v $\mathbb{R}^3$.

Prvně dokážeme, že

$$U = \ker(\varphi - id) + \ker \varphi.$$

Každé $u \in U$ chceme psát ve tvaru součtu

$$u = x + y, \quad (1)$$

kde $\varphi(x) = x$ a $\varphi(y) = 0$.

Na rovnici (1) aplikujme φ. Dostaneme

$$\varphi(u) = \varphi(x) + \varphi(y) = x + 0 = x \quad (2)$$

Z rovnic

$$u = x + y$$
$$\varphi(u) = x$$

jednoduše spočítáme x a y pomocí u a $\varphi(u)$:

$$x = \varphi(u)$$
$$y = u - \varphi(u).$$

Stačí dokázat, že $x \in \ker(\varphi - id)$ a $y \in \ker \varphi$.

$$\varphi(\varphi(u)) = \varphi(u) \quad \text{tj} \quad (\varphi - id)(\varphi(u)) = 0.$$

$$\varphi(u - \varphi(u)) = \varphi(u) - \varphi(\varphi(u)) = 0$$

2. (8. DU) Nechť U je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ a $\varphi: U \to U$ je lineární zobrazení s vlastností $\varphi \circ \varphi = \varphi$, tj. $\varphi(\varphi(u)) = \varphi(u)$ pro všechny vektory $u \in U$. Dokažte, že pak je prostor U direktním součtem vlastních podprostorů k vlastním číslům 1 a 0, tj.

$$U = \ker(\varphi - \mathrm{id}) \oplus \ker(\varphi).$$

Najděte nějaký geometrický příklad takového zobrazení v $\mathbb{R}^3$.

Nyní ukážeme, že

$$\ker(\varphi - \mathrm{id}) \cap \ker\varphi = \{0\}.$$

Nechť $u \in \ker(\varphi - \mathrm{id}) \cap \ker\varphi$. Pak $u = \varphi(u) = 0$. Tedy důkaz je hotov.

Příkladem takového zobrazení je kolmá projekce na podprostor V v U.

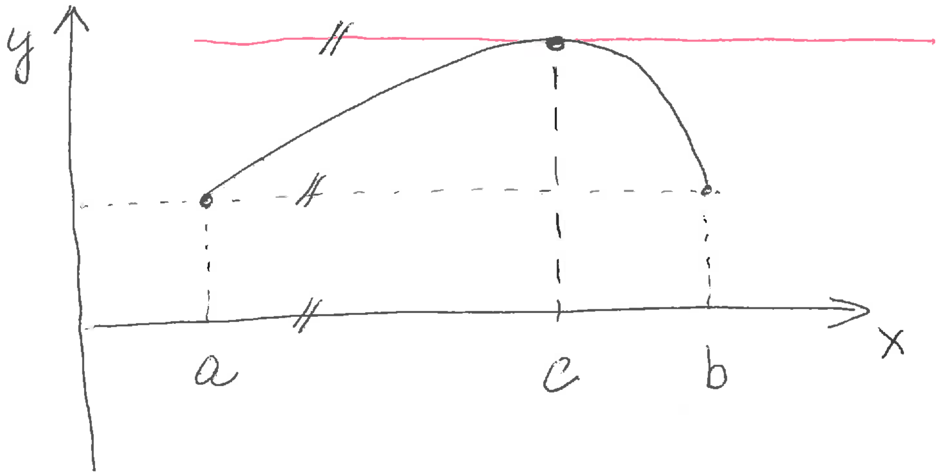
Potom $\ker(\varphi - \mathrm{id}) = V$

a $\ker\varphi = V^{\perp}$.

Více ve 4. příkladu.

3. Dokažte následující důležitou větu, které se říká Rolleova: Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má derivaci ve všech bodech otevřeného intervalu (a,b) a $f(a) = f(b)$. Pak existuje bod $c \in (a,b)$ takový, že $f(c) = 0$.

<u>Geometrická interpretace</u>: Graf funkce f s vlastnostmi v zadání má tečnu, která je rovnoběžná se spojnicí bodů $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$.



(I) Je-li f konstantní, tj $f(x) = f(a) = f(b)$, pak má nulovou derivaci ve všech bodech intervalu (a,b).

(II) Nechť existuje $x \in (a,b)$ tak, že $f(x) > f(a) = f(b)$. Nechť c je bod v $[a,b]$, v němž f nabývá svého maxima. (Používáme větu, že spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[a,b]$ nabývá svého maxima.) Protože $f(c) > f(a) = f(b)$, leží $c \in (a,b)$. Ukážeme, že $f'(c) = 0$.

(6)

3. Dokažte následující důležitou větu, které se říká Rolleova: Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má derivaci ve všech bodech otevřeného intervalu (a,b) a $f(a) = f(b)$. Pak existuje bod $c \in (a,b)$ takový, že $f'(c) = 0$.

Kdyby $f'(c) > 0$. Pak existuje $\delta > 0$, že v intervalu $(c, c+\delta) \subseteq (a,b)$ pro všechna x platí

$$\frac{f(x) - f(c)}{x-c} > f'(c) - \frac{f'(c)}{2} > 0.$$

(V definici $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c}$ vezmeme $\varepsilon = \frac{f'(c)}{2}$.) Je $x - c > 0$, proto $f(x) - f(c) > 0$, tedy $f(x) > f(c)$ a f nemůže v c nabývat svého maxima.

Kdyby $f'(c) < 0$. Pak existuje $\delta > 0$, že v intervalu $(c-\delta, c) \subseteq (a,b)$ pro všechna x platí

$$\frac{f(x) - f(c)}{x-c} < f'(c) + \frac{|f'(c)|}{2} < 0$$

(V definici $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c}$ vezmeme $\varepsilon = \frac{|f'(c)|}{2} = -\frac{f'(c)}{2}$.) Protože $x - c < 0$, musí být $f(x) - f(c) > 0$, tedy $f(x) > f(c)$.

Opět spor.

Příklad 3

(III) V případě, že (I) ani (II) nenastane, existuje $x \in (a,b)$, že $f(x) < f(a) = f(b)$. Postupujeme nyní stejně jako v případu (II) s tím rozdílem, že za c bereme bod z (a,b), v němž f nabývá svého minima.

8

4. Nechť U je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem a $\varphi : U \to U$ je lineární operátor. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní.

(A) Operátor φ je kolmá projekce na nějaký vektorový podprostor.

(B) Operátor φ je samoadjungovaný a $\varphi(\varphi(u)) = \varphi(u)$ pro každé $u \in U$.

Druhou vlastnost v tvrzení (B) můžeme zapsat také jako: $\varphi^2 = \varphi$. Druhou mocninou se zde míní složení $\varphi \circ \varphi$.

Prvně ukážeme, že (A) $\Rightarrow$ (B).

Nechť $\varphi : U \to U$ je kolmá projekce na podprostor $V \subseteq U$. Ta je charakterizována vlastností, že pro každé u je

$$\varphi(u) \in V \quad \text{a} \quad u - \varphi(u) \perp V$$

Proto platí

$$\langle \varphi(u), u \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u) + u - \varphi(u) \rangle =$$

$$= \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle + \langle \underset{V}{\underset{\cap}{\varphi(u)}}, \underset{V^\perp}{\underset{\cap}{u - \varphi(u)}} \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle + 0$$

Obdobně

$$\langle u, \varphi(u) \rangle = \langle \varphi(u) + u - \varphi(u), \varphi(u) \rangle =$$

$$= \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle + \langle u - \varphi(u), \varphi(u) \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle + 0$$

Tedy $\langle \varphi(u), u \rangle = \langle u, \varphi(u) \rangle$

a tedy φ je samoadjungovaný operátor.

Protože $\varphi(u) \in V$ a pro všechna $v \in V$ je $\varphi(v) = v$, platí

$$\varphi(\varphi(u)) = \varphi(u).$$

9

4. Nechť U je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem a $\varphi: U \to U$ je lineární operátor. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní.

(A) Operátor φ je kolmá projekce na nějaký vektorový podprostor.

(B) Operátor φ je samoadjungovaný a $\varphi(\varphi(u)) = \varphi(u)$ pro každé $u \in U$.

Druhou vlastnost v tvrzení (B) můžeme zapsat také jako: $\varphi^2 = \varphi$. Druhou mocninou se zde míní složení $\varphi \circ \varphi$.

(B) $\Rightarrow$ (A) Nechť $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný a platí $\varphi^2 = \varphi$. V 2. příkladu jsme ukázali, že

$$U = \ker(\varphi - id) \oplus \ker \varphi .$$

Ukážeme, že φ je kolmá projekce na podprostor $V = \ker(\varphi - id)$. K tomu stačí dokázat, že $\ker \varphi \perp \ker(\varphi - id)$.

Využijeme, že φ je samoadjungovaný. Nechť $v \in V = \ker(\varphi - id)$ a $z \in \ker \varphi$.

Potom $\varphi(v) = v$, $\varphi(z) = 0$ a platí

$$\langle v, z \rangle = \langle \varphi(v), z \rangle = \langle v, \varphi(z) \rangle =$$
$$= \langle v, 0 \rangle = 0.$$

Tedy $V^\perp = \ker \varphi$ a platí

$\varphi(v) = v$ pro všechna $v \in V = \ker(\varphi - id)$

$\varphi(z) = 0$ pro všechna $z \in V^\perp = \ker \varphi$.

Tedy φ je kolmá projekce na podprostor $\ker(\varphi - id)$.