10. seminář z matematiky, jaro 2020

Ukážeme si řešení 9. domácí úlohy. V úloze 3 dokážeme další zobecnění věty o střední hodnotě a v úloze 4 se podíváme na "odmocninu" z lineárního operátoru.

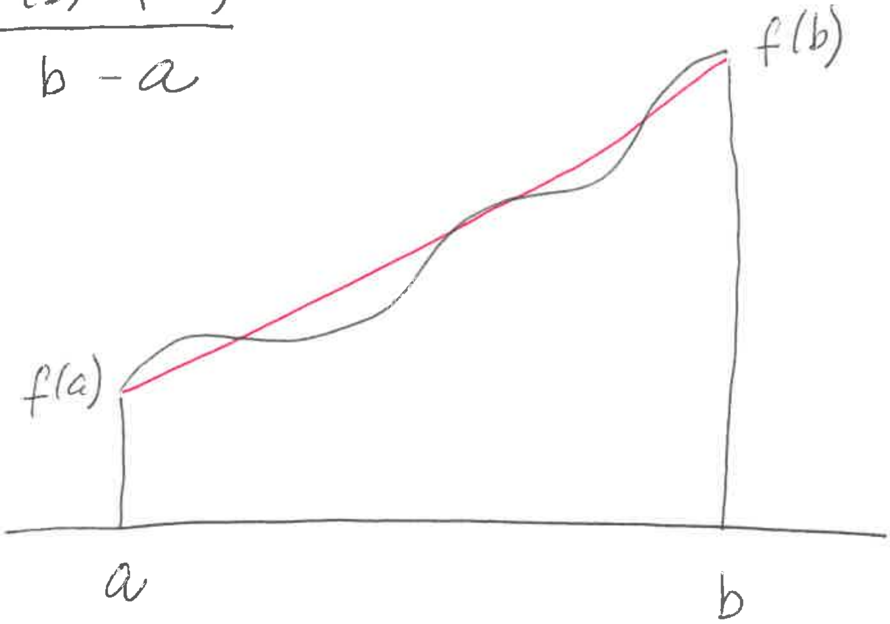
1. (9. DU) Pomocí Rolleovy věty (úloha 3 v 9. semináři) dokažte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má derivaci ve všech bodech otevřeného intervalu (a, b). Pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Napište její geometrickou i fyzikální interpretaci.

Od funkce $f(x)$ odečteme lineární funkci $g(x) = \lambda x$ se směrnicí λ stejnou jako je směrnice přímky spojující body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$, tj

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Pak pro funkci

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\, x \quad \text{platí}$$

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\, a = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a}$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\, b = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a}$$

1. (9. DU) Pomocí Rolleovy věty (úloha 3 v 9. semináři) dokažte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má derivaci ve všech bodech otevřeného intervalu (a,b). Pak existuje bod $c \in (a,b)$ takový, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Napište její geometrickou i fyzikální interpretaci

Tj. $F(a) = F(b)$. F je spojitá na $[a,b]$ a má derivaci v (a,b). Podle Rolleovy věty existuje $c \in (a,b)$ tak, že

$$F'(c) = 0$$

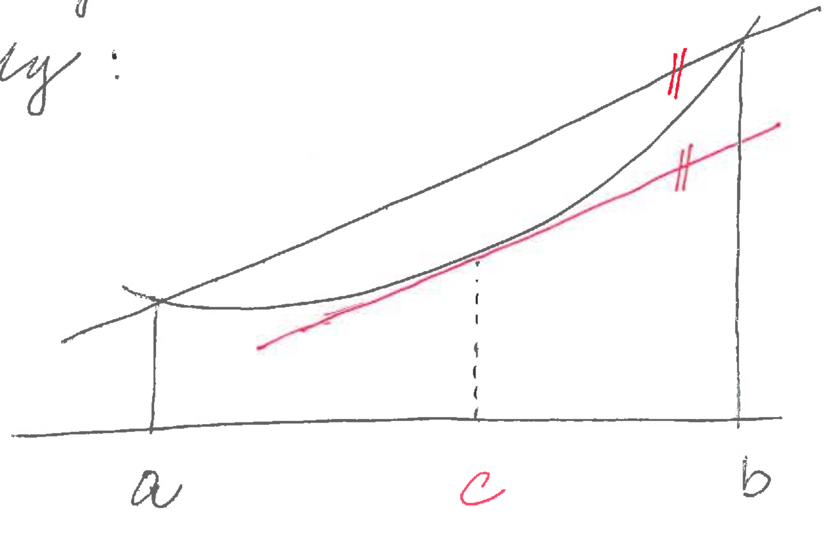
To znamená

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

tj.

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

<u>Geometrický význam</u> Spojíme-li dva body na grafu funkce f, pak existuje mezi těmito body na grafu bod, v němž tečna bude mít stejnou směrnici jako přímka spojující tyto dva body:



1. (9. DU) Pomocí Rolleovy věty (úloha 3 v 9. semináři) dokažte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má derivaci ve všech bodech otevřeného intervalu (a, b). Pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Napište její geometrickou i fyzikální interpretaci

Fyzikální interpretace:

Při pohybu bodu na přímce je v nějakém okamžiku okamžitá rychlost rovna průměrné rychlosti.

4

2. (9. DU) Pomocí věty o střední hodnotě dokažte:

(1) Má-li reálná funkce f na otevřeném intervalu I ve všech bodech kladnou derivaci, je rostoucí.

(2) Má-li reálná funkce f na otevřeném intervalu I ve všech bodech nulovou derivaci, je konstantní.

Důkaz (1)

Jestliže $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in I$, pak je f na I rostoucí. Nechť $x_1 < x_2$ leží v I. Pak podle Lagrangeovy věty existuje $c \in (x_1, x_2)$ tak, že

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0.$$

Odtud plyne, že $f(x_2) - f(x_1) > 0$, tj.

$$f(x_2) > f(x_1)$$

a f je rostoucí na intervalu I.

Pozor Opačné tvrzení, tj.: je-li f na I rostoucí, pak $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in I$. neplatí.

Protipříklad Vezmeme $f(x) = x^3$ na intervalu $(-\infty, \infty)$. f je rostoucí, ale $f'(0) = 0$. Nicméně platí: je-li f na I rostoucí, pak $f'(x) \geq 0$ pro všechna x.

Důkaz lze provést nepřímo z definice derivace.

5

2. (9. DU) Pomocí věty o střední hodnotě dokažte:

(1) Má-li reálná funkce f na otevřeném intervalu I ve všech bodech kladnou derivaci, je rostoucí.

(2) Má-li reálná funkce f na otevřeném intervalu I ve všech bodech nulovou derivaci, je konstantní.

Důkaz (2)

Jestliže $f'(x)=0$ pro všechna $x \in I$, pak je f na I konstantní.

Vezměme $x_1 < x_2$ v intervalu I.

Podle Lagrangeovy věty existuje $c \in (x_1, x_2)$ takové, že

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) = 0$$

Odtud $f(x_1) = f(x_2)$ pro všechny dvojice x_1, x_2, tedy f je konstantní.

V tomto případě obrácené tvrzení platí: Je-li f konstantní, tak $f'(x)=0$ pro všechna $x \in I$.

To je pouhý výpočet derivace.

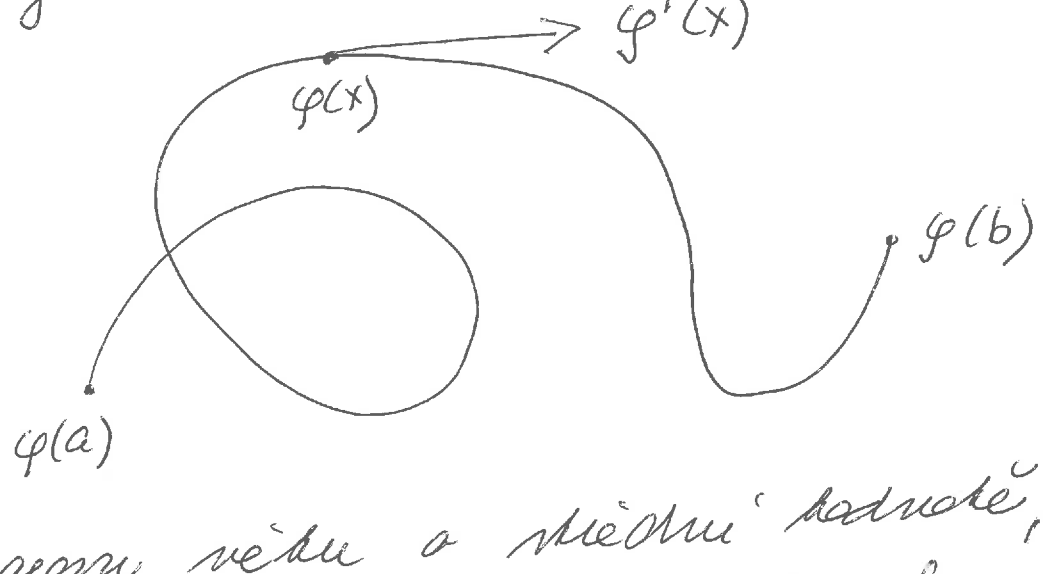
3. Další zobecnění Lagrangeovy věty o střední hodnotě. Budeme definovat křivku v rovině, její derivaci a tečný vektor v bodě. Dokážeme větu, jejíž geometrický význam je, že pro dané dva různé body křivky existuje jiný její bod, v němž bude tečna rovnoběžná s přímkou spojující dané dva body:
Nechť $\varphi(\cancel{x}) = (f(x), g(x)) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je spojitá křivka, která má (nenulovou) derivaci ve všech bodech intervalu (a,b) a $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Pak existuje $c \in (a,b)$ takové, že

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Křivka je zobrazení $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, první složku označíme f, druhou g. Spojitá křivka je taková, že f i g jsou spojité. Derivace křivky v bodě x existuje, jestliže existuje derivace $f'(x)$ i derivace $g'(x)$. Značíme

$$\varphi'(x) = (f'(x), g'(x)).$$

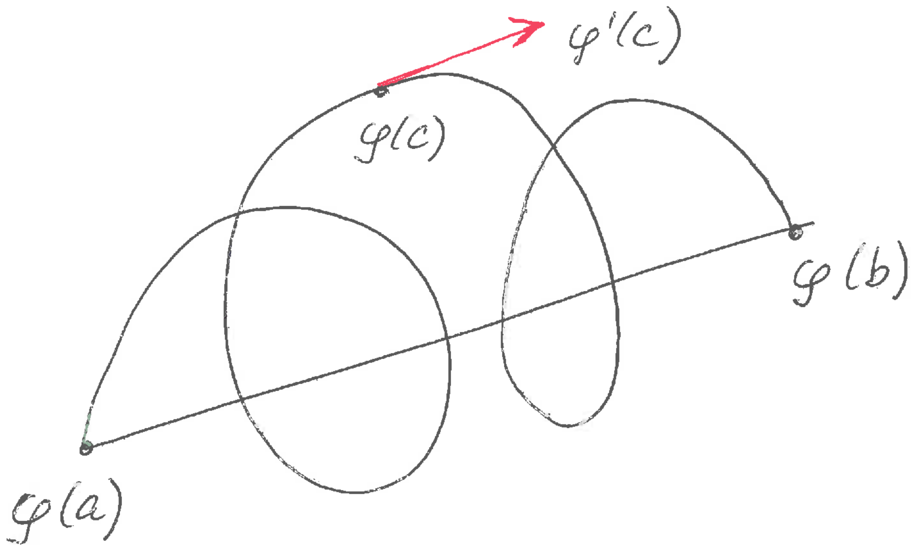
Ta je vektor tečný ke křivce φ, pokud je nenulový.



Lagrangeovu větu o střední hodnotě, která říká cosi o grafu funkce f, což je speciální křivka $[x, f(x)]$, můžeme zobecnit na křivky.

3. Další zobecnění Lagrangeovy věty o střední hodnotě. Budeme definovat křivku v rovině, její derivaci a tečný vektor v bodě. Dokážeme větu, jejíž geometrický význam je, že pro dané dva různé body křivky existuje jiný její bod, v němž bude tečna rovnoběžná s přímkou spojující dané dva body:
Nechť φ ~~(x)~~ $= (f(x), g(x)) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je spojitá křivka, která má nenulovou derivaci ve všech bodech intervalu (a,b) a $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Pak existuje $c \in (a,b)$ takové, že

$$f'(c)(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a)).$$



Dokážeme tvrzení: Funkce

$$F(x) = f(x)(g(b)-g(a)) - g(x)(f(b)-f(a))$$

je spojitá na $[a,b]$, má derivaci v (a,b) a platí

$$F(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = F(b).$$

Proto existuje $c \in (a,b)$, že platí

$F'(c) = 0$, což dává

$$f'(c)(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a)).$$

Protože $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, je buď $g(b) \neq g(a)$ nebo $f(b) \neq f(a)$. V případě, že $g(b) \neq g(a)$ dostaneme

$$f'(c) = g'(c)\,\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Úloha 3 Protože $\varphi'(c) \neq 0$, musí být buď $f'(c) \neq 0$ nebo $g'(c) \neq 0$. Jestliže $f'(c) \neq 0$, musí být vzhledem k rovnosti

$$f'(c) = g'(c)\,\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

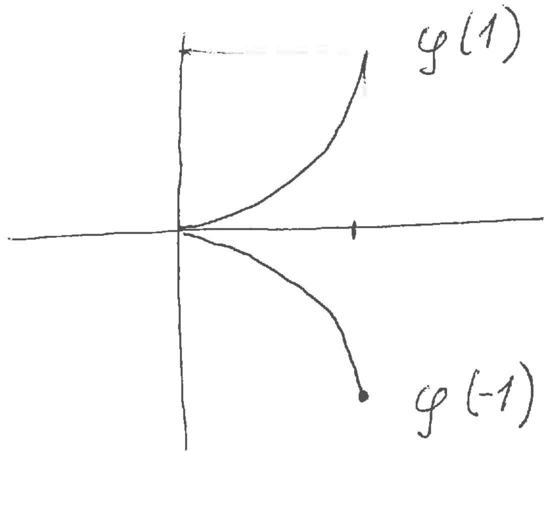
i $g'(c) \neq 0$. Tedy když $g(b) \neq g(a)$ tak i $g'(c) \neq 0$ a dostaneme (pouze pro nalezené c nikoliv pro všechna $x \in (a,b)$)

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Křivka s nulovou derivací

Uvažujme křivku $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi = (f, g)$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$.

Křivka vypadá takto



Její derivace v parametru 0 je

$f'(x) = 2x$, $x = 0$

$g'(x) = 3x^2$, $x = 0$

$\varphi'(0) = (f'(0), g'(0)) = (0,0)$

Vidíme, že křivka vytváří hrot v počátku. V tomto případě nemůžeme mluvit o tečně.

(9)

4. Nechť U je reálný vektorový prostor se skalárním součinem a $\varphi:\ U \to U$ je samoadjungovaný lineární operátor s vlastností $\langle\varphi(u), u\rangle \geq 0$. (Říkáme, že je pozitivně semidefinitní.) Dokažte, že pak existuje lineární samoadjungovaný operátor $\psi:\ U \to U$ takový, že $\psi^2 = \psi \circ \psi = \varphi$.

Vzhledem k tomu, že φ je samoadjungovaný, existuje v U ortonormální báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ tvořená vlastními vektory:
$$\varphi(u_i) = \lambda_i u_i$$

Platí
$$\lambda_i = \lambda_i \langle u_i, u_i\rangle = \langle \lambda_i u_i, u_i\rangle = \langle\varphi(u_i), u_i\rangle \geq 0.$$

Tedy všechna vlastní čísla jsou nezáporná.

Definujme $\psi: U \to U$ na vektorech ortonormální báze α takto
$$\psi(u_i) = \sqrt{\lambda_i}\, u_i.$$

Pro libovolný vektor $u \in U$, $u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ definujeme
$$\psi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i u_i$$

Na vektorech u_i platí
$$\psi^2(u_i) = \psi(\psi(u_i)) = \psi(\sqrt{\lambda_i} u_i) = \sqrt{\lambda_i}(\sqrt{\lambda_i} u_i) =$$
$$= \lambda_i u_i = \varphi(u_i).$$

Vzhledem k tomu, že lin. zobrazení je svými hodnotami na vektorech báze jednoznačně určeno, platí $\psi^2 = \varphi$.

(10)

4. Nechť U je reálný vektorový prostor se skalárním součinem a $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný lineární operátor s vlastností $\langle \varphi(u), u \rangle \geq 0$. (Říkáme, že je pozitivně semidefinitní.) Dokažte, že pak existuje lineární samoadjungovaný operátor $\psi : U \to U$ takový, že $\psi^2 = \psi \circ \psi = \varphi$.

Dokážeme ještě, že ψ je samoadjungované. K tomu je potřeba dokázat, že pro všechna $u \in U$ platí

$$\langle \psi(u), u \rangle = \langle u, \psi(u) \rangle.$$

Pro $u = \sum x_i u_i$ počítejme

$$\langle \psi(u), u \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i x_i x_j \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{\substack{0 \; i \neq j \\ 1 \; i = j}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

Stejně spočítáme, že

$$\langle u, \psi(u) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 .$$