11. seminář z matematiky, jaro 2020

Ukážeme si řešení 10. domácí úlohy. V úloze 3 si řekneme, co je Darbouxova vlastnost reálných funkcí a ve čtvrté úloze si ukážeme, jak dosazovat symetrické matice do reálných funkcí.

1. (10. DU) Využijte větu dokázanou v úloze 3 v textu 10. semináře k tomu, abyste dokázali tuto verzi l'Hospitalova pravidla:
Nechť $c \in (a,b)$, nechť $f,g : (a,b) \to \mathbb{R}$ jsou dvě spojité funkce, které mají derivaci v intervalech (a,c) a (c,b), $f(c) = g(c) = 0$, ale $g(x) \neq 0$ pro $x \neq c$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pak existuje rovněž limita podílu obou funkcí a platí

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokážeme, že $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ pro $x \to c$ zleva i zprava se rovnají $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Oba důkazy probíhají stejně, tak uděláme jen ten pro limitu zleva.

Nechť $a < x < c$. Funkce f a g jsou spojité na $[x,c]$ a mají derivaci v (x,c). Proto podle věty o střední hodnotě existuje $y_x \in (x,c)$ takové, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0 - f(x)}{0 - g(x)} = \frac{f(c) - f(x)}{g(c) - g(x)} = \frac{f'(y_x)}{g'(y_x)}.$$

Protože $y_x \to c_-$ pro $x \to c_-$, existuje

$\lim\limits_{x \to c_-} \frac{f'(y_x)}{g'(y_x)}$ a tedy existuje i

$$\lim_{x \to c_-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c_-} \frac{f'(y_x)}{g'(y_x)} = \lim_{z \to c} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

(2)

2. (10. DU) Nechť A je reálná symetrická matice tvaru $n \times n$ s vlastností $x^T A x \geq 0$ pro každý sloupcový vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Dokažte, že pak existuje symetrická matice B taková, že $B^2 = A$. Může být takových matic více než dvě (B a $-B$)?

Každou symetrickou reálnou matici A můžeme psát ve tvaru

$$A = P^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} P = P^T D P$$

kde P je ortogonální matice. Tedy $P^{-1} = P^T$.

Protože $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A a platí $x^T A x \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$, dostáváme pro vlastní vektor v_i k vlastnímu číslu λ_i:

$$0 \leq v_i^T \cdot A v_i = v_i^T \cdot \lambda_i v_i = \lambda_i \|v_i\|^2.$$

Tedy $\lambda_i \geq 0$ pro všechna i. Můžeme proto definovat matici

$$B = P^T \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P = P^T D' P$$

Tato matice je symetrická, neboť

$$B^T = (P^T D' P)^T = P^T (D')^T (P^T)^T = P^T D' P = B$$

Protože $(D')^2 = D$, dostáváme díky tomu, že P je ortogonální také

$$B^2 = (P^T D' P)(P^T D' P) = P^T D' \underbrace{P P^T}_{E} D' P =$$

③

2. (10. DU) Nechť A je reálná symetrická matice tvaru $n \times n$ s vlastností $x^T A x \geq 0$ pro každý sloupcový vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Dokažte, že pak existuje symetrická matice B taková, že $B^2 = A$. Může být takových matic více než dvě (B a $-B$)?

$$= P^T D' D' P = P^T D P = A.$$

Takových symetrických matic s vlastností

$$B^2 = A$$

může být více. Např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = E.$$

Avšak pouze pro jedinou platí

$$x^T B x \geq 0.$$

To je ta, kterou jsme definovali.

④

3. Darbouxova vlastnost derivace. Řekneme, že reálná funkce f definovaná na intervalu I má Darbouxovu vlastnost, jestliže pro každá tři čísla čísla $a, b \in I$ a $y \in \mathbb{R}$ taková, že $f(a) < y < f(b)$, existuje $c \in (\min(a,b), \max(a,b))$ takové, že $f(c) = y$. (Nakreslete si obrázek.) Říkáme také, že f nabývá všech mezihodnot.

Již víme, že každá spojitá funkce na intervalu má Darbouxovu vlastnost.

Existují diferencovatelné funkce, které nemají spojitou derivaci – viz domácí úloha. Nicméně *každá reálná funkce, která je derivací nějaké jiné funkce na intervalu I má Darbouxovu vlastnost.* To si dokážeme.

Nechť $f : I \to \mathbb{R}$ má derivaci ve všech bodech. Pak je nutně spojitá. Nechť $a, b \in I$, $a < b$, $f'(a) \neq f'(b)$

① Nechť $f'(a) < f'(b)$.

Pro $y \in (f'(a), f'(b))$ uvažujme funkci

$$g(x) = f(x) - yx.$$

Ta je diferencovatelná.

Existuje-li $x_0 \in (a,b)$, že $g'(x_0) = 0$, pak

$0 = g'(x_0) = f'(x_0) - y$, tedy $f'(x_0) = y$.

Protože $f'(a) < y < f'(b)$, je

$$g'(a) < 0 < g'(b).$$

Protože je $g'(a)$ záporná, existuje pravé okolí $(a, a+\delta)$ tak, že pro $x \in (a, a+\delta)$ je

$$g(x) < g(a). \quad (A)$$

Protože je $g'(b)$ kladná, existuje levé okolí bodu b, např. $(b-\Delta, b)$ tak, že pro $x \in (b-\Delta, b)$ je

$$g(x) < g(b). \quad (B)$$

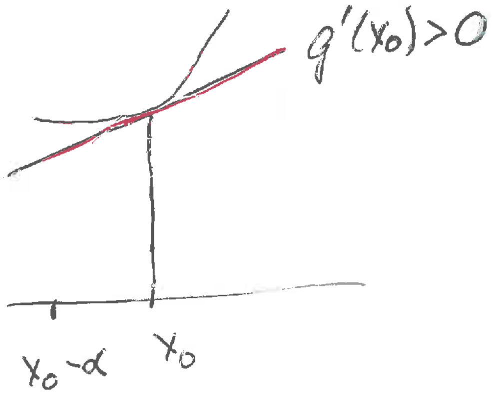
Funkce g na intervalu $[a, b]$ nabývá svého

3. Darbouxova vlastnost derivace. Řekneme, že reálná funkce f definovaná na intervalu I má Darbouxovu vlastnost, jestliže pro každá tři čísla čísla $a, b \in I$ a $y \in \mathbb{R}$ taková, že $f(a) < y < f(b)$, existuje $c \in (\min(a,b), \max(a,b))$ takové, že $f(c) = y$. (Nakreslete si obrázek.) Říkáme také, že f nabývá všech mezihodnot.

Již víme, že každá spojitá funkce na intervalu má Darbouxovu vlastnost.

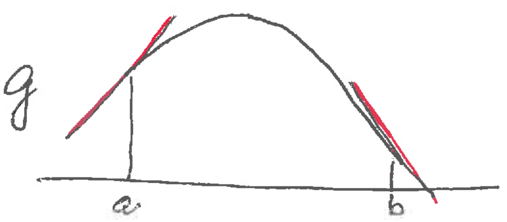
Existují diferencovatelné funkce, které nemají spojitou derivaci – viz domácí úloha. Nicméně *každá reálná funkce, která je derivací nějaké jiné funkce na intervalu I má Darbouxovu vlastnost.* To si dokážeme.

minima v bodě x_0. Vzhledem k nerovnostem (A) a (B), musí být $x_0 \in (a,b)$.
Nyní ukážeme, že $g'(x_0) = 0$.
Kdyby $g'(x_0) > 0$, pak by v nějakém okolí $(x_0 - \alpha, x_0)$ byla g menší než $g(x_0)$.
Kdyby $g'(x_0) < 0$, pak by v nějakém okolí $(x_0, x_0 + \beta)$ byla g menší než $g(x_0)$.



Tedy $g'(x_0) = 0$
a $f'(x_0) = y$.

(2) Nechť $f'(a) > f'(b)$. Postupujeme analogicky, pouze místo minima funkce g, bereme její maximum



6

4. Dosazování symetrických matic do reálných funkcí. Ukážeme si, že pro každou symetrickou matici A tvaru $n \times n$ a každou reálnou funkci f takovou, že v jejím definičním oboru leží spektrum matice A, můžeme definovat symetrickou matici $f(A)$ tvaru $n \times n$ tak, že platí:

(a) Je-li $f \equiv 1$, pak $f(A) = E$ je jednotková matice.
(b) Je-li $f(x) = x$, je $f(A) = A$.
(c) Součet funkcí se převádí na součet matic: $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$.
(d) Součin funkcí se převádí na součin matic: $(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$.
(e) Pro skládání funkcí platí: $(f \circ g)(A) = f(g(A))$.

Postupujeme analogicky jako v úloze 2. Každá symetrická matice A má reálná vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ a v $\mathbb{R}^n$ existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory. Proto

$$A = P^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} P,$$

kde $P^T = (id)_{\varepsilon\alpha}$ je ortogonální matice (α je báze tvořená ortonormálními vlastními vektory).

Je-li f reálná funkce, v jejímž definičním oboru jsou vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, pak můžeme definovat

$$f(A) = P^T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & f(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} P.$$

Ukážeme, že platí (a) až (e).

4. Dosazování symetrických matic do reálných funkcí. Ukážeme si, že pro každou symetrickou matici A tvaru $n \times n$ a každou reálnou funkci f takovou, že v jejím definičním oboru leží spektrum matice A, můžeme definovat symetrickou matici $f(A)$ tvaru $n \times n$ tak, že platí:

(a) Je-li $f \equiv 1$, pak $f(A) = E$ je jednotková matice.
(b) Je-li $f(x) = x$, je $f(A) = A$.
(c) Součet funkcí se převádí na součet matic: $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$.
(d) Součin funkcí se převádí na součin matic: $(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$.
(e) Pro skládání funkcí platí: $(f \circ g)(A) = f(g(A))$.

(a) $\mathbb{1}(A) = P^T \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} P = P^T P = E$

(b) $f(x) = x$, pak $f(A) = P^T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} P =$

$= P^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^T = A$

(c) $(f+g)(A) = P^T \begin{pmatrix} (f+g)(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & (f+g)(\lambda_n) \end{pmatrix} P =$

$= P^T \begin{pmatrix} f(\lambda_1)+g(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n)+g(\lambda_n) \end{pmatrix} P = f(A) + g(A)$

(d) $(f \cdot g)(A) = P^T \begin{pmatrix} (fg)(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & (fg)(\lambda_n) \end{pmatrix} P = P^T \begin{pmatrix} f(\lambda_1)g(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n)g(\lambda_n) \end{pmatrix} P$

$= P^T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(\lambda_n) \end{pmatrix} P =$

$$= P^T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} P P^T \begin{pmatrix} g(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(\lambda_n) \end{pmatrix} P$$

$$= f(A) \cdot g(A)$$

(e) $$(f \circ g)(A) = P^T \begin{pmatrix} f \circ g(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f \circ g(\lambda_n) \end{pmatrix} P =$$

$$= P^T \begin{pmatrix} f(g(\lambda_1)) & & \\ & \ddots & \\ & & f(g(\lambda_n)) \end{pmatrix} P =$$

$$= f\left(P^T \begin{pmatrix} g(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(\lambda_n) \end{pmatrix} P \right) = f(g(A)).$$