12. seminář z matematiky, jaro 2020

Ukážeme si řešení 11. domácí úlohy.

1. (11. DU) Ukažte, že funkce $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{if } x \neq 0, \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

má derivaci ve všech bodech, která je však nespojitá v bodě 0.

V bodech $x \neq 0$ je derivace funkce f rovna

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Derivaci f v bodě 0 spočítáme podle definice

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

neboť $\lim\limits_{h \to 0} h = 0$ a $\left|\sin \frac{1}{h}\right| \leq 1$ pro $h \neq 0$.

Funkce $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ nemá v 0 limitu. Platí totiž, že

$$\cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - f'(x).$$

Kdyby $\lim f'(x)$ existovala, pak by

$$\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} 2x \sin \frac{1}{x} - \lim f'(x)$$
$$= 0 - \lim f'(x) = -\lim f'(x).$$

Funkce $\cos \frac{1}{x}$ však pro každé $\delta > 0$ nabývá v intervalu $(-\delta, 0)$ i $(0, \delta)$ všech hodnot z intervalu $[-1, 1]$, tedy nemá limitu. Proto ani $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ nemůže existovat.

2. (11. DU) Nechť U je reálný nebo komplexní vektorový prostor a $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný operátor. Dokažte, že pro každou reálnou funkci f, jejíž definiční obor obsahuje spektrum operátoru φ můžeme definovat samoadjungovaný operátor $f(\varphi) : U \to U$ tak, že platí:

(a) Je-li $f \equiv 1$, pak $f(\varphi) = \mathrm{id}$.
(b) Je-li $f(x) = x$, je $f(\varphi) = \varphi$.
(c) Součet funkcí se převádí na součet operátorů: $(f + g)(\varphi) = f(\varphi) + g(\varphi)$.
(d) Součin funkcí se převádí na skládání operátorů: $(f \cdot g)(\varphi) = f(\varphi) \circ g(\varphi)$.
(e) Pro skládání funkcí platí: $(f \circ g)(\varphi) = f(g(\varphi))$.

Úlohu je lepší řešit bez odkazu na matice a definici $f(A)$ z minulého semináře. Využijeme k tomu tuto základní vlastnost lineárních zobrazení.

Lemma Každé lineární zobrazení $\Phi : U \to V$ je jednoznačně určeno svými hodnotami na vektorech $u_1, u_2, \dots, u_n$ nějaké báze v prostoru U

Důkaz: Pro $u \in U$ máme jednoznačně určené souřadnice $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) v dané bázi:

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n.$$

Proto musí být

$$\Phi(u) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Phi(u_i).$$

$\Phi(u)$ je určeno hodnotami $\Phi(u_i)$ a souřadnicemi. $\blacksquare$

3

2. (11. DU) Nechť U je reálný nebo komplexní vektorový prostor a $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný operátor. Dokažte, že pro každou reálnou funkci f, jejíž definiční obor obsahuje spektrum operátoru φ můžeme definovat samoadjungovaný operátor $f(\varphi) : U \to U$ tak, že platí:

(a) Je-li $f \equiv 1$, pak $f(\varphi) = \mathrm{id}$.
(b) Je-li $f(x) = x$, je $f(\varphi) = \varphi$.
(c) Součet funkcí se převádí na součet operátorů: $(f+g)(\varphi) = f(\varphi) + g(\varphi)$.
(d) Součin funkcí se převádí na skládání operátorů: $(f \cdot g)(\varphi) = f(\varphi) \circ g(\varphi)$.
(e) Pro skládání funkcí platí: $(f \circ g)(\varphi) = f(g(\varphi))$.

Je-li φ samoadjungovaný operátor $\varphi : U \to U$, pak v U existuje ortonormální báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ tvořená vlastními vektory, tj. $\varphi(u_i) = \lambda_i u_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Pro každou reálnou funkci f s definičním oborem, který obsahuje spektrum $\{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n\}$ <u>definujeme</u> zobrazení $f(\varphi) : U \to U$ předpisem na bázi $\alpha = (u_1, u_i, \dots u_n)$, tj

$$f(\varphi)(u_i) = f(\lambda_i) u_i,$$

pro $u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ to znamená

$$f(\varphi)(u) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\lambda_i) u_i.$$

Dokážeme, že $f(\varphi)$ je samoadjungovaný operátor: $u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j$.

$$\langle f(\varphi)(u), v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i f(\lambda_i) u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y_j} f(\lambda_i) \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} f(\lambda_i)$$

Analogicky spočítáme

$$\langle u, f(\varphi)(v)\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j f(\lambda_j) u_j \Big\rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y_j}\, \overline{f(\lambda_j)} \langle u_i, u_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}\, \overline{f(\lambda_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}\, f(\lambda_i),$$

neboť f je reálná funkce, tedy $\overline{f(\lambda_i)} = f(\lambda_i)$.

Vidíme tedy, že

$$\langle f(\varphi)(u), v\rangle = \langle u, f(\varphi)(v)\rangle,$$

tedy $f(\varphi)$ je samoadjungovaný operátor.

Z dalších vlastností dokážeme např. jen (a), ostatní se dokazují analogicky.

Pro $(f\cdot g)(\varphi)$ platí podle definice

$$(f\cdot g)(\varphi)(u_i) = (f\cdot g)(\lambda_i)\, u_i = f(\lambda_i) g(\lambda_i)\, u_i.$$

Pro $f(\varphi)\circ g(\varphi)$ je podle definice

$$\{f(\varphi)\circ g(\varphi)\}(u_i) = f(\varphi)\{g(\varphi)(u_i)\} = f(\varphi)(g(\lambda_i)\, u_i)$$

$$= g(\lambda_i)\, f(\varphi)(u_i) = g(\lambda_i) f(\lambda_i)\, u_i$$

Vidíme tedy, že na bázi $u_1, \dots, u_n$ platí

$$(f\cdot g)(\varphi) = f(\varphi)\circ g(\varphi),$$

proto podle lemmatu musí rovnost platit na všech vektorech.