

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Diplomová práce

BRNO 2016

KATEŘINA REBENDOVÁ



MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY



Interaktivní výukové materiály v PDF formátu

Diplomová práce

Kateřina Rebendová

Vedoucí práce: RNDr. Roman Plch, Ph.D. Brno 2016

Bibliografický záznam

Autor:	Bc. Kateřina Rebendová Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Interaktivní výukové materiály v PDF formátu
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Učitelství matematiky pro střední školy Učitelství deskriptivní geometrie pro střední školy Učitelství geografie a kartografie pro střední školy
Vedoucí práce:	RNDr. Roman Plch, Ph.D.
Akademický rok:	2015/2016
Počet stran:	vii + 56
Klíčová slova:	kombinatorika; pravděpodobnost; statistika; AcroT _E X; dps; jeopardy; ocgx; pdfscreen; interaktivní výukové ma- teriály

Bibliographic Entry

- Author:** Bc. Kateřina Rebendová
Faculty of Science, Masaryk University
Department of Mathematics and Statistics
- Title of Thesis:** Interactive teaching materials in PDF format
- Degree Programme:** Mathematics
- Field of Study:** Upper Secondary School Teacher Training in Mathematics
Secondary School Teacher Training in Descriptive
Upper Secondary School Teacher Training in Geography
and Cartography
- Supervisor:** RNDr. Roman Plch, Ph.D.
- Academic Year:** 2015/2016
- Number of Pages:** vii + 56
- Keywords:** combinatorics; probability; statistics; AcroT_EX; dps; jeopardy; ocgx; pdfscreen; interactive teaching materials

Abstrakt

V této diplomové práci se věnujeme tvorbě interaktivních výukových materiálů v PDF formátu pomocí pdfL^AT_EXu a jeho balíčků (AcroT_EX, dps, jeopardy, ocgx a pdfscreen). Interaktivní výukové materiály se věnují kombinatorice, pravděpodobnosti a statistice v gymnaziálním rozsahu učiva. Součástí práce jsou výukové prezentace, interaktivní testy, párovací hry, hry Riskuj! a Poznej!, které jsou k dispozici na příložením CD.

Abstract

In this thesis, we study the design of interactive teaching materials in PDF format using pdfL^AT_EX and its packages (AcroT_EX, dps, jeopardy, ocgx, and pdfscreen). The interactive teaching materials are dedicated to Combinatorics, Probability, and Statistics for the grammar school. It includes teaching presentations, interactive tests, matching games, games Riskuj! and Poznej!, which are to be found on the attached CD.



MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Akademický rok: 2014/2015

Ústav: Ústav matematiky a statistiky
Studentka: Bc. Kateřina Rebendová
Program: Matematika
Obor: Učitelství matematiky pro střední školy
Učitelství deskriptivní geometrie pro střední školy
Učitelství geografie a kartografie pro střední školy

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PŘF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s tématem:

Téma práce: Interaktivní výukové materiály v PDF formátu

Téma práce anglicky: Interactive teaching materials in PDF format

Oficiální zadání:

Pomocí pdfTeXu a jeho balíčků připravte interaktivní materiály pro podporu výuky témat Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika na střední škole a vyzkoušejte možnosti jejich využití prostřednictvím interaktivních tabulí. Téma je vhodné pro učitelské kombinace s matematikou.

Literatura:

Matematika pro gymnázia (Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika), ISBN: 9788071963653.

Jazyk závěrečné práce:


Vedoucí práce: RNDr. Roman Plch, Ph.D.


Datum zadání práce: 1. 8. 2014

V Brně dne: 23. 10. 2014

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):


.....
Bc. Kateřina Rebendová
studentka


.....
RNDr. Roman Plch, Ph.D.
vedoucí práce


.....
prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a
statistiky

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla především poděkovat vedoucímu mé diplomové práce RNDr. Romanovi Plchovi, Ph.D. za ochotu, připomínky, rady, odborné vedení, pevné nervy a čas, který mi věnoval při zpracování této práce. Děkuji paní Mgr. Haně Ondrouchové a jejím žákům, se kterými jsem si vyzkoušela výuku s interaktivními výukovými materiály. Velké díky patří mé rodině a přátelům, kteří mne po celou dobu mých studií podporovali a pomáhali mi.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 11. května 2016

.....
Kateřina Rebendová

Obsah

Úvod	8
Kapitola 1. Tvorba interaktivních výukových materiálů	9
1.1 AcroTeX	9
1.2 Dps	12
1.3 Jeopardy	14
1.4 Ocgx	15
1.5 Formátování vzhledu prezentací	18
Kapitola 2. Interaktivní výukové materiály	20
2.1 Interaktivní osnova na Schoology	21
Kapitola 3. Metodický návod	26
3.1 Rámcový vzdělávací program pro gymnázia	26
3.2 Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika	27
3.3 Doporučený tematický plán	34
Kapitola 4. Výsledky z praxe	40
Kapitola 5. Klíč správných řešení	43
5.1 Kombinatorika	43
5.2 Pravděpodobnost	47
5.3 Statistika	48
5.4 Příklady pro hlavy mazané	50
5.5 Statistický výzkum	53
Závěr	57
Příloha	58
Seznam použité literatury	60

Úvod

Cílem této diplomové práce je připravit interaktivní materiály pro podporu výuky kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky na střední škole. Vybranými interaktivními materiály jsou výukové prezentace, interaktivní testy, párovací hry, hry Riskuj! a Poznej!

Text práce je dělen do pěti kapitol s přílohou. První kapitola se věnuje tvorbě interaktivních výukových materiálů. Jsou zde uvedeny technologie, kterých bylo použito. K tvorbě materiálů v pdfLaTeXu byly využity balíčky AcroTeX, dps, jeopardy, ocgx, pdfscreen a beamer. Jednotlivé balíčky nejsou nijak blíže popisovány, neboť o nich již existují podrobné práce v českém jazyce. Každý balíček je krátce představen a jsou uvedeny vlastní zkušenosti s jejich použitím. Součástí absolventské práce [17] jsou vzorové kódy s komentáři, které předně doporučujeme začátečnickům. Ve druhé kapitole uvádíme přehled všech vytvořených výukových materiálů a interaktivní osnovu v systému Schoology, která byla zřízena z důvodu lepší dostupnosti výukových materiálů pro všechny zájemce. V další kapitole je zmíněn Rámcový vzdělávací plán pro gymnázia a revidovaná Bloomova taxonomie, podle kterých byly interaktivní materiály tvořeny. Zmiňují se zde možnosti používání interaktivních materiálů ve vyučování a v procesu učení žáků. Stěžejní částí této kapitoly je doporučený tematický plán, který nabízí časové rozvržení učiva, seřazení interaktivních výukových materiálů a jejich charakterizaci. Čtvrtá kapitola se zabývá výsledky z dotazníkového šetření, které proběhlo po výuce s interaktivními materiály v septimě gymnázia Hodonín. Byla odučena pouze jedna vyučovací hodina na novou látku úvod do kombinatoriky a základní kombinatorická pravidla. Cílem dotazníkového šetření bylo zjistit poptávku žáků po výuce matematiky s interaktivními materiály. V závěru kapitoly zmiňujeme používání interaktivních materiálů na interaktivních tabulích. Poslední kapitola obsahuje správná řešení ke všem vytvořeným materiálům.

Příloha obsahuje zdrojový kód navigačního panelu balíčku pdfscreen a evaluační dotazník pro výuku s interaktivními výukovými materiály.

Všechny vytvořené interaktivní výukové materiály jsou k dispozici na příloženém CD nebo v interaktivní osnově (viz kapitola 2). Obsahem příloženého CD jsou i ukázkové zdrojové dokumenty pro práci s balíčkem ocgx a pdfscreen.

Kapitola 1

Tvorba interaktivních výukových materiálů

Tato práce i interaktivní výukové materiály byly vytvořeny v systému $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, resp. v jeho nadstavbě $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$. Základní instalaci $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ u lze doplňovat o další balíčky maker. Zde byly použity balíčky $\text{AcroT}_{\text{E}}\text{X}$, dps , jeopardy , ocgx , pdfscreen a beamer , kterým se věnujeme níže.

Vytvořené materiály jsou ve formátu PDF, který byl v systému $\text{LaT}_{\text{E}}\text{X}$ získán přímým překladem zdrojového souboru $\text{pdfL}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ em. Formát PDF¹ vyvinula firma Adobe. Existuje nepřeborné množství programů, jimiž lze formát PDF otevírat, např. Adobe Reader, Foxit Reader, PDF-XChange Viewer, Sumatra PDF, Nitro PDF Reader a jiné. Dokumenty PDF formátu uchovávají text, grafické objekty i aktivní obsah. Dokumenty s aktivním obsahem je doporučováno otevírat v oficiálním prohlížeči firmy Adobe – nejnovější verze Adobe Acrobat Reader DC, neboť ostatní prohlížeče plně nepodporují aktivní obsah. Adobe Reader je volně šiřitelný a je možno jej získat na <https://get.adobe.com/cz/reader/>. Dokumenty PDF formátu s aktivním obsahem nejsou zatím podporovány mobilními operačními systémy, ale jsou plně podporovány operačním systémem Windows.

1.1 $\text{AcroT}_{\text{E}}\text{X}$

Název balíčku $\text{AcroT}_{\text{E}}\text{X}$ vznikl složením slov Acrobat a $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$. Tento systém $\text{LaT}_{\text{E}}\text{X}$ -ových maker v kombinaci s programem Adobe Reader umožňuje vytvářet interaktivní PDF soubory. Tvůrcem balíčku je profesor D. P. Story z Ohia (University of Akron, USA). $\text{AcroT}_{\text{E}}\text{X}$ se skládá ze dvou nezávislých systémů: $\text{AcroT}_{\text{E}}\text{X}$ Presentation Bundle a $\text{AcroT}_{\text{E}}\text{X}$ eEducation Bundle. K vytvoření interaktivních výukových materiálů byl využit druhý uvedený systém, jemuž se budeme dále věnovat.

Balíček $\text{AcroT}_{\text{E}}\text{X}$ umožňuje vytvářet interaktivní testy a vyhodnocuje správně zadané odpovědi bez nutnosti posílat vyplněný test k dalšímu zpracování. Vše se tedy odehrává na lokálním počítači bez nutnosti připojení k internetu. Balíček

¹Specifikace PDF formátu <http://www.computerhope.com/jargon/p/pdf.htm><https://acrobat.adobe.com/us/en/products/about-adobe-pdf.html>

je volně dostupný na adrese <http://www.AcroTeX.net>. K dispozici je zde podrobný manuál a vzorové ukázky. Instalace balíčku a základní tvorba testů je popsána v několika příručkách i v češtině, např. [17] a [20].

Vytváříme-li interaktivní testy systémem AcroT_EX, načítáme do preambule dokumentu balíčky *hyperref* (umožňuje hypertextové propojení dokumentu) a *exerquiz* s volitelnými parametry *pdftex* (udává způsob překladu dokumentu) a *czech* (umožňuje správnou sazbu češtiny). AcroT_EX je používán s balíčkem *dps* pro tvorbu párovacích her a balíčkem *jeopardy* pro hry Riskuj! a Poznej!

Systém umožňuje tvorbu testů těchto typů:

- samostatná otázka (*oQuestion*),
- test s okamžitým ověřením správnosti odpovědi (*shortquiz*),
- test s ověřením správnosti odpovědi po ukončení testu (*quiz*).

Systém umožňuje tvorbu otázek těchto typů:

- otázky s výběrem z nabízených možností – jedna správná odpověď,
- otázky s výběrem z nabízených možností – více správných odpovědí,
- otázky s tvořenou odpovědí – textový řetězec,
- otázky s tvořenou odpovědí – matematický výraz.

Balíčkem AcroT_EX bylo vytvořeno 11 testů. Všechny testy jsou vytvořeny v prostředí *quiz*, jsou většího rozsahu a vyhodnocování správnosti otázek probíhá tedy až po ukončení testu. Test se spouští tlačítkem *Start testu* a ukončuje tlačítkem *Konec testu*. Dále se zobrazuje počet správných odpovědí, počet získaných bodů a procentuální úspěšnost. Správné výsledky zobrazujeme tlačítkem *Výsledky*. Správné odpovědi doplňovacích otázek zobrazíme tlačítkem ? v pravém dolním rohu v kolonce *Správná odpověď*. České názvy tlačítek nejsou samozřejmostí. Stejný princip kódování českých znaků byl použit u párovacích her a který je popsán v charakteristice balíčku *dps* (viz podkapitola 1.2).

V testech byly použity všechny nabízené možnosti otázek. Pro lepší orientaci byly rozlišeny otázky s výběrem z nabízených možností s jednou či více správnými odpověďmi. V případě otázek s jednou správnou odpovědí jsou nabízené možnosti odpovědí zobrazovány symbolem ○. Správná odpověď je hodnocena 1 bodem, špatná 0 body, žádná 0 body. U otázek s více správnými odpověďmi jsou nabízené odpovědi zobrazovány se symbolem □. U těchto otázek jsou alespoň dvě odpovědi správné. Každá správná odpověď je hodnocena 1 bodem, špatná –1 bodem, žádná 0 body. Celkové hodnocení otázky s více správnými odpověďmi je nezáporné. Toto opatření zakazuje záporné hodnocení celého testu a omezuje demotivaci žáků.

Velkou pozornost musíme věnovat při odpovídání na otázky s tvořenou odpovědí. Je-li odpovědí textový řetězec, je nutné odpovědi zapisovat bez diakritiky. Velká a malá písmena se nerozlišují.

Start testu

- [1b.] Určete, z kolik prvků je možné vytvořit 66 dvojčlenných kombinací s opakováním.
 8 11 12 10
- [1b.] Určete, kolika způsoby je možné rozmístit 25 triček do 4 zásuvek.
- [1b.] Kolika způsoby může babička rozdělit deset stejných bonbonů mezi svých šest vnoučat?
 120 120 8 008 360 360 3 003
- [1b.] Určete, kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit 5 stejných čokolád, 4 stejné sáčky sušenek, 4 stejné sáčky bonbonů a 5 stejných balíčků oplatek.
- [1b.] V novinovém stánku mají 10 druhů časopisů, přičemž každý časopis mají ve 13 kusech. Kolika způsoby lze zakoupit 14 časopisů?
 817 190 900 000 817 180 880 850

Správná odpověď:

KOMBINATORIKA

Strana 2 z 4

Konec

Obr. 1.1: Ukázka testu Kombinace s opakováním.

Otázky s odpovědí ve formě textového řetězce jsou tvořeny příkazem o třech parametrech. Ve všech vytvořených materiálech je použita stejná syntaxe. První parametr je nastaven na hodnotu 0 a udává, jak se text vepsaný autorem a řešitelem bude filtrovat a upravovat. Všechna vepsaná písmena se upraví na malá, odstraní se všechny mezery a nepísmenné znaky. Druhý parametr má hodnotu 0, tedy za správnou odpověď je považována ta odpověď, která se absolutně shoduje s vepsanou odpovědí autora a řešitele. Třetí parametr odpovídá počtu variant odpovědí, které autor uvádí jako správné.

Otázky s odpovědí ve formě matematického řetězce jsou tvořeny příkazem o čtyřech nezbytných povinných parametrech. Celkem příkaz může obsahovat až deset parametrů. Ve vytvořených materiálech jsme použily pouze příkazy o čtyřech povinných parametrech. První povinný parametr udává správný výsledek, druhý počet referenčních bodů, v nichž bude odpověď vyhodnocována, třetí přesnost a čtvrtý interval, ve kterém se řešení bude ověřovat.

Výsledky není nutné zapisovat ve vyčíslené podobě, ale např. ve formě součtu, součinu, rozdílu a podílu. Zápis matematických výrazů v otázkách s tvořenou odpovědí vyžaduje následující syntaxi:

- Matematické operace zapisujeme: sčítání +, odčítání −, násobení *, dělení /.

- K zápisu desetinných čísel používáme tečku. Např. 0.5 je zápis čísla 0,5.
- Zlomky zapisujeme pomocí /, např. $\frac{3}{4}$ je zápis zlomku $\frac{3}{4}$.

1.2 Dps

Název balíčku `dps` je zkratka německé hry „Das Puzzle Spiel“ a lze v tomto označení spatřit i iniciály autora, jímž je profesor D. P. Story. Balíček `dps` umožňuje vytvářet párovací hry. Párovací hra je založena na principu párování odpovědí s otázkami. Ke každé otázce patří právě jedna správná odpověď. Za správně utvořenou dvojici je odkryta část tajenky, za špatně určené dvojice jsou přiděleny trestné body. Cílem hry je správně přiřadit otázku k její odpovědi, získat co nejméně trestných bodů a odkrýt celou tajenku.

Balíček `dps` je volně dostupný na adrese <http://www.AcroTeX.net> pod záložkou *Games*. K dispozici je podrobný manuál a vzorové ukázky. Instalace balíčku a tvorba testů je popsána v češtině v absolventských pracích [17] a [25].

Vytváříme-li párovací hru, musí být v preambuli načteny balíčky pro AcroTeX a balíček `eforms` (aktivace formulářových políček). K vytvoření párovacích her byla použita předdefinovaná šablona studenta Fakulty informatiky Masarykovy univerzity Filipa Sonty [27].

Stěžejní částí párovací hry je tajenka a její jednoznačné propojení s otázkami a odpověďmi. Každý znak tajenky je doplněn jednoznačným identifikátorem, pomocí něhož se dále odkazuje na příslušné otázky a odpovědi. Balíček je původně deklarován pro anglickou a německou jazykovou verzi a pro sazbu diakritiky využívá oktál-kódování. Toto kódování nepodporuje sazbu většiny akcentovaných znaků české abecedy. RNDr. Petr Olšák se ve své práci [23] zabývá akcenty v PDF záložkách a jeho poznatků bylo použito při tvorbě tajenek. Podařilo se tak správně vysázet akcentované znaky české abecedy.

Specifikace PDF formátu vymezuje pro PDF stringy dvě možná kódování. Jednobytové kódování se nazývá `PDFDocEncoding` a nepodporuje akcentované znaky české abecedy. Druhou možností kódování PDF stringů nabízí kódování `UTF-16BE Unicode`. Použití tohoto kódování se pozná tak, že první dva byty stringu mají hodnotu 254, 255, což je prefix pro přepínání do tohoto kódování. Princip správné sazby českých znaků s diakritikou je zápis textu oktálově v kódování `UTF-16BE Unicode`. Uvedme si příklad „klikni pro správnou odpověď“:

```
{\string\376\string\377\string\000k\string\000l\string\000i
\string\000k\string\000n\string\000i\string\000\string\040
\string\000p\string\000r\string\000o\string\000\string\040
\string\000s\string\000p\string\000r\string\000\string\341
\string\000v\string\000n\string\000o\string\000u\string\000
\string\040\string\000o\string\000d\string\000p\string\000o
\string\000v\string\001\string\033\string\001\string\017}
```

Nejdříve vidíme byty 254, 255 zapsané oktálově. Dále je oktálově zapsána nula následovaná písmenem „k“ (tyto dva byty reprezentují písmeno „k“ v UTF-16

kódování), . . . , \string\000\string\040 značí mezeru mezi slovy, . . . , \string\001\string\033 je 01,1B hexadecimálně a reprezentuje znak „ě“ v UTF-16BE Unicode.

Zápis českého textu oktalogově v kódování UTF-16BE Unicode byl vytvářen postupně. Nejdříve pomocí konvertoru [46] byl zjištěn decimální kód v UTF-16BE Unicode akcentovaných znaků české abecedy. Následně byla čísla z decimální soustavy převedena do oktalogové soustavy a tato číselná vyjádření již byla použita v syntaxi příkazu.

Určete pravděpodobnost, že náhodně vybrané přirozené číslo od 1 do 50 bude splňovat následující podmínky.

Bude násobkem sedmi.

Nebude násobkem pěti a současně nebude násobkem sedmi.

Nebude násobkem pěti.

Nebude násobkem sedmi.

Nebude násobkem pěti nebo nebude násobkem sedmi.



Bude násobkem pěti.

Bude násobkem pěti nebo sedmi.

Bude násobkem pěti a současně sedmi.

$\frac{43}{50}$ $\frac{8}{25}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{50}$

$\frac{49}{50}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{7}{50}$ $\frac{17}{25}$

Obr. 1.2: Ukázka párovací hry Klasická pravděpodobnost.

Párovací hru zahájíme výběrem otázky, na kterou chceme odpovídat. Následně zvolíme odpověď. Opačné pořadí není možné. Postupně je odkrývána tajenka ukrývající citáty slavných osobností. Po zodpovězení poslední otázky jsme hláškou v dolním rámečku vyzváni k zobrazení finálního výsledku. V hodnocení je zpracován počet správných odpovědí a počet trestných bodů v dané hře. Jejich kombinace zobrazí informaci o úrovni hráčových znalostí. Tyto hlášky jsou předdefinovány v použité šabloně. V dolní části obrazovky je zmíněn autor odkrytého citátu.

Párovací hry obsahují 4, 5, 6 nebo 8 otázek. Každá správná odpověď je ohodnocena 10 body, maximálně lze získat 40, 50, 60 nebo 80 bodů. Obsahuje-li párovací hra 4 otázky, za každou špatnou odpověď je hráči ještě jeden bod odečten. Má-li

párovací hra 5 a 6 otázek, za každou špatnou odpověď se odečítají dva body. Je-li ve hře 8 otázek, za každou nesprávně zodpovězenou otázku jsou hráči odečteny tři body.

1.3 Jeopardy


Profesor D. P. Story je autorem balíčku `jj_game`, jímž lze vytvářet hru Jeopardy. Česká verze této hry je definována v balíčku `jeopardy`, jejímž autorem je docent Robert Mařík z Mendelovy univerzity v Brně. Balíček `jeopardy` umožňuje tvorbu hry Poznej! pro jednoho hráče a hry Riskuj! pro dva i jednoho hráče.

Balíček `jeopardy` lze získat na <https://www.ctan.org/pkg/jeopardy>, kde je k dispozici manuál a vzorové ukázky. Návod v češtině mohou poskytovat absolventské práce [17] a [25].

Preambule dokumentu musí obsahovat balíčky `jeopardy`, `exerquiz` s volitelnými parametry `pdftex` a `czech`, `dljslib` (funkce v JavaScriptu) a `pdfscreen`.

Na hrací ploše si hráč vybírá políčko, ke kterému je jednoznačně přiřazena otázka. Po odkliknutí políčka je hráč přesměrován na obrazovku s otázkou. Každá otázka je vysázena na samostatnou stránku. Po odpovězení otázky je hráč vrácen zpět na hrací plochu. Následuje výběr další otázky. Hra je skončena po zodpovězení všech otázek.

B za 200.



Student opakovaně měřil hmotnost tělesa v kilogramech. Naměřené hodnoty měl statisticky zpracovat a vypočítat aritmetický průměr, směrodatnou odchylku, rozptyl a variační koeficient měření. Která z těchto charakteristik má jednotku kg^2 ?

- a variační koeficient
- b směrodatná odchylka
- c rozptyl
- d aritmetický průměr

Zdroj: http://imageproxy.jxs.cz/~nd01/jxs/cz-/631/271/7be42c41ad_28676490_o2.jpg

Obr. 1.3: Ukázka hry Riskuj! Statistika.

Všechny vytvořené hry Riskuj! jsou určeny pro dva hráče. Hrací plocha je pokryta políčky, pod nimiž se ukrývají otázky. Otázky jsou rozděleny do tří kategorií a jsou ohodnoceny daným bodovým ziskem. Bodové hodnocení odpovídá obtížnosti jednotlivých otázek. Hráči se střídají ve vybírání otázek, na které okamžitě odpovídají. Odpoví-li hráč správně, získá daný počet bodů, odpoví-li špatně, je mu stejné množství bodů odečteno. Vyhrává ten, který má na svém kontě vyšší počet bodů. Ve hře Riskuj! jsme se rozhodli použít pouze uzavřené otázky s jednou správnou odpovědí.

Hra Poznej! je určena pro jednoho hráče. Jedná se o modifikaci hry Riskuj! Jednotlivá políčka nejsou ohodnocena body a pod herní plochou se skrývá obrázek. Odpoví-li hráč správně na otázku, odkryje se část obrázku. Odpoví-li špatně, část obrázku zůstává skryta až do konce hry. Úkolem hráče je uhodnout, co je na obrázku. Ve hře Poznej! jsme použili uzavřené otázky s jednou správnou odpovědí a otázky s odpovědí ve formě textového i matematického řetězce. V doplňovacích otázkách platí stejná pravidla zápisu jako u testů AcroT_EX. Na skrytých obrázcích jsou významná místa Moravy.

V pravém dolním rohu obrazovky se nachází tlačítko *Solution*. První odkliknutí tlačítka zobrazí skrytý obrázek a druhým odkliknutím se zobrazí hláška nad hrací plochou s názvem významného místa na obrázku. Bohužel balíček jeopardy neumožňuje sazbu akcentovaných znaků české abecedy ani s použitím kódování UTF-16BE Unicode. Uvedené názvy významných míst jsou proto bez diakritiky.

1.4 Ocgx

Autorem balíčku *ocgx* je Paul Gaborit z Albi (École des Mines, Francie). Balíček *ocgx* rozšiřuje balíček *ocg-p*, který umožňuje tvorbu vrstev OCG (Optimal Content Group) v PDF formátu. Vytváří se další vrstva v dokumentu, kterou lze skrývat a odkrývat po odkliknutí daného odkazu. Ve vrstvě může být text, tabulka, matematický zápis nebo grafický objekt. Odkaz může být tvořen barevným textem nebo obrázkem. Balíček *ocgx* spolupracuje s balíčkem *tikz*. Ve spolupráci s tímto balíčkem umožňuje *ocgx* skrývání/odkrývání částí obrázků a tvorbu odkazů ve formě vytvořených obrázků.

Balíček *ocgx* nepoužívá JavaScripty. PDF soubory s vrstvami jsou podporovány prohlížeči Adobe Reader, Foxit Reader a PDF-XChange Viewer. Balíček je volně dostupný na adrese <https://www.ctan.org/pkg/ocgx>, kde je k dispozici manuál a vzorové ukázky.

Nyní si popíšeme základy práce s balíčkem *ocgx*. Pro tyto účely je na přiloženém CD k dispozici vzorový zdrojový dokument s označením *Vzorové_ocgx.tex* i *Vzorové_ocgx.pdf*.

Minimální hlavička pro tvorbu vrstev v PDF má tvar:

```
\documentclass{article}
\usepackage[czech]{babel}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage{ocgx}
```


Každá vrstva je tvořena zvlášť v prostředí `ocg`. Ukažme si syntaxi vrstvy na následujícím příkladu:

```
\begin{ocg}{jmeno1}{odkaz1}{1}
Text ve vrstvě.
\end{ocg}
```

Prostředí `ocg` vyžaduje 3 povinné parametry. První parametr je pojmenování vrstvy a zobrazuje se v nástrojích PDF prohlížeče. Druhý parametr je označení vrstvy, kterým se na ni odkazujeme ve zdrojovém souboru. Třetí parametr určuje prvotní viditelnost vrstvy při otevření souboru a může nabývat hodnot 1 (odkrytá vrstva) a 0 (skrytá vrstva).

Odkaz na vrstvu (druhý parametr) může obsahovat pouze písmena A–Z, a–z a číslice 0–9. Odkaz na vrstvu je možné použít v jednom dokumentu opakovaně, umožní nám to pracovat s více vrstvami současně a stejně. Všechny vrstvy se stejným odkazem mají stejnou viditelnost a jsou sloučeny do jedné společné vrstvy. V nástrojích PDF dokumentu je název společné vrstvy převzat z jména první vrstvy v seznamu.

```
\begin{ocg}{jmeno2}{odkaz2}{1}
První vrstva.
\end{ocg}
```

```
\begin{ocg}{jmeno3}{odkaz2}{1}
Druhá vrstva.
\end{ocg}
```

Obsah vrstvy v jednom prostředí `ocg` je nutné umístit na jedinou stránku, neumožňuje přechod mezi jednotlivými stránkami.

Do vrstvy lze vnořit další vrstvu. Vnořená vrstva je viditelná pouze v případě, že všechny nadřazené vrstvy jsou také viditelné.

Prozatím jsme vysvětlili samotnou tvorbu vrstev, nikoliv jejich odkrývání a skrývání. S viditelností vrstev lze manipulovat klikacími odkazy v PDF dokumentu. Ukažme si syntaxi odkazu na následujícím příkladu:

```
\switchocg{odkaz1}{Tlačítko 1}
```

Touto syntaxí jsme vytvořili odkaz *Tlačítko 1* na vrstvu značky *odkaz1* (obsahující „Text ve vrstvě“).

Jedním odkazem lze manipulovat s více vrstvami současně. Všechny vrstvy mají jedinečné pojmenování i jedinečný odkaz. Do prvního parametru příkazu pro tvorbu odkazu vypíšeme seznam druhých parametrů vybraných vrstev, které oddělujeme mezerou. Viditelnost vybraných vrstev může mít libovolná.

```
\begin{ocg}{jmeno4}{odkaz4}{1}
První vrstva je viditelná.
\end{ocg}
```

```
\begin{ocg}{jmeno5}{odkaz5}{0}
Druhá vrstva je neviditelná.
\end{ocg}
```

```
\hfill \switchocg{odkaz4 odkaz5}{Tlačítko 2}
```

Následuje přehled nabízených příkazů.

- `\switchocg` Takto vytvořený odkaz je univerzální. Je-li vrstva v PDF skrytá při otevření souboru, tímto odkazem se zobrazí. Odkaz funguje i pro odkryté vrstvy, kdy se vrstva skryje. Opětovným použitím odkazu lze skrýt/odkrýt danou vrstvu.
- `\showocg` Takto vytvořený odkaz funguje jen u vrstev, které jsou při otevření souboru zakryty. Odkliknutím tohoto odkazu se vrstva objeví a dalším odklikáváním odkazu se již neskryje.
- `\hideocg` Takto vytvořený odkaz funguje jen u vrstev, které jsou při otevření souboru odkryty. Odkliknutím odkazu se vrstva skryje a dalším odklikáváním odkazu se již vrstva znovu neobjeví.
- `\actionsocg` Takto vytvořený odkaz slučuje několik vrstev dohromady. Tvoří jej 4 argumenty, přičemž první 3 argumenty tvoří seznam použitých vrstev a čtvrtý argument název odkazu. První vrstva v seznamu je při otevření souboru odkryta, lze ji libovolně skrývat a odkrývat. Druhá vrstva v seznamu je při otevření souboru zobrazena a s prvním kliknutím na odkaz je skryta. Třetí vrstva v seznamu je při otevření souboru skryta a s prvním kliknutím na odkaz se objeví. Druhou a třetí vrstvu již nelze vrátit zpět do původního stavu.

```
\begin{ocg}{jmeno6}{odkaz6}{1}
Odkrytý text při otevření souboru, po odkliknutí tlačítka
zmizí a znovu jej lze libovolně odkrývat a skrývat.
\end{ocg}
```

```
\begin{ocg}{jmeno7}{odkaz7}{1}
Odkrytý text při otevření souboru, po odkliknutí tlačítka
zmizí a znovu se již neobjeví.
\end{ocg}
```

```
\begin{ocg}{jmeno8}{odkaz8}{0}
Skrytý text při otevření souboru, který se objeví po prvním
odkliknutí tlačítka a již nezmizí.
\end{ocg}
```

```
\hfill \actionsocg{ocg6}{ocg8}{ocg7}{Tlačítko 3}
```

Balíčku `ocgx` bylo použito k vytvoření 11 výukových prezentací. Ve všech výukových prezentacích jsou nastaveny parametry tak, aby při otevření PDF souboru byly všechny vrstvy zakryté. Vrstvy lze odkrýt kliknutím na odkaz ve formě obrázků – oranžový otazník v kroužku a modrý vykřičník v kroužku (viz obrázek 1.4). Výklad učiva ve výukových prezentacích je doplněn otázkami, jednoduchými úkoly a shrnutími. Oranžový otazník skrývá/odkrývá odpovědi na otázky a modrý vykřičník řešení jednoduchých úkolů a shrnutí početních postupů.

Kombinatorika **Příklad 1** Pravidlo součtu Příklad 2 Pravidlo součinu Závěr

Zjistěme počet čtverců v jednotlivých skupinách.

Kolik je čtverců ve skupině A_1 ?

pink	purple	red	green
grey	yellow	brown	yellow
purple	light green	orange	blue
yellow	cyan	brown	red

$A_1 = 16$

Kolik je čtverců ve skupině A_2 ?

Obr. 1.4: Ukázka výukové prezentace Začínáme s kombinatorikou.

1.5 Formátování vzhledu prezentací

Výukové prezentace byly vytvořeny ve třídě dokumentu `beamer`. Autory jsou Till Tantau, Joseph Wright a Vedran Miletić. Podrobný manuál je k dispozici zde <https://www.ctan.org/pkg/beamer>.

Vzhled interaktivních testů byl formátován balíčkem `pdfscreen`, jehož autorem je C. V. Radhakrishnan. Balíček umožňuje lehké formátování obsahu dokumentu. Příkazy nastavujeme okraje, výšku, šířku a celou řadu jiných parametrů tak, aby se každá stránka na monitoru zobrazovala podle našich představ. Balíček umožňuje definici navigačního panelu s hypertextovými tlačítky.

V preambuli zdrojového kódu musí být načten balíček `pdfscreen`. Podrobný manuál a ukázky lze nalézt na <https://www.ctan.org/pkg/pdfscreen>.

Tímto balíčkem byl ve všech testech AcroTeX nadefinován navigační panel pro lepší orientaci v testech (viz příloha 5.5). Každý učební celek má své barevné odlišení navigačního panelu, kombinatorika je modrá, pravděpodobnost oranžová a statistika čokoládová.

Kapitola 2

Interaktivní výukové materiály

V této kapitole si uvedeme přehled všech vytvořených výukových materiálů. Tyto materiály jsou k dispozici na přiloženém CD. Aby materiály byly snadno dostupné pro všechny zájemce, jsou uloženy v interaktivní osnově systému Schoology. Tento systém byl vybrán, protože je lehce přístupný pro žáky i učitele a práce s ním je intuitivní.

Schoology je Learning Management System (LMS). Jedná se o nástroj, jehož hlavním účelem je spravování vzdělávacího obsahu. Umožňuje komunikaci mezi žáky a jejich učiteli, kontrolu práce žáků rodiči, zpřístupňování učebních materiálů, vytváření kurzů, tvorbu testů aj. Schoology je přístupné z kteréhokoliv počítače s připojením k internetu. Tento systém lze používat i na mobilních zařízeních a tabletech, je podporován mobilními operačními systémy Android a iOS. K přihlášení do systému je zapotřebí uživatelské jméno a heslo.

Výhody při správném používání LMS:

1. přístup k učebním materiálům učitelům a žákům nezávisle na čase a místě,
2. možnost sledování aktivity žáků,
3. zefektivnění komunikace a spolupráce,
4. rozvoj různých metod učení a respektování individuálních schopností a dovedností každého žáka.

Nevýhody při nesprávném používání LMS:

1. orientace na střední školy, vysoké školy a vzdělávání dospělých,
2. eliminace role učitele,
3. plné nahrazení „klasické“ výuky e-learningovými nástroji [40].

Obr. 2.1: Titulní strana kurzu Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika.

2.1 Interaktivní osnova na Schoology

V systému Schoology byl vytvořen kurz Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika. Pro vstup do tohoto kurzu je nutné použít tuto cestu: *Courses* → *Join* → napsat kód kurzu W53HS-9FRRH → *Join*. Součástí kurzu je interaktivní osnova (viz obrázek 2.1). V interaktivní osnově jsou k dispozici všechny vytvořené interaktivní výukové materiály. Interaktivní osnova kurzu je pro lepší orientaci rozdělena do 11 složek podle jednotlivých témat. Každé téma je představováno v krátkém motivačním textu, aby se zvýšil zájem žáků. Interaktivní výukové materiály jsou podle témat uloženy do složek. Uspořádání složek odpovídá pořadí kapitol a podkapitol v učebnici [4]. Složky *Kombinatorika aneb pojďme si hrát!*, *Pravděpodobnost a statistika aneb pojďme si hrát!* jsou určeny pro souhrnné opakování. Složka *Příklady pro hlavy mazané* obsahuje těžší příklady z kombinatoriky a pravděpodobnosti pro nadané žáky, dále úkoly ze statistiky a datový soubor pro práci s MS Excelem.

Následuje přehled témat v interaktivní osnově s motivačními texty a interaktivními výukovými materiály. Typ výukového materiálu lze rozpoznat z názvu souboru. Název výukových materiálů končí `_prez.pdf` označuje výukové prezentace, `_hra.pdf` párovací hry, `_test.pdf` interaktivní testy, `_Poznej.pdf` hry *Poznej!* a `_Riskuj.pdf` hry *Riskuj!*

Základní kombinatorická pravidla

V odvětví matematiky zvané **kombinatorika** nejde o nějaké sčítání dlouhého sloupce čísel z paměti. Častá otázka zní: „Kolik?“ Problémy často bývají nastoleny jednoduše, bez nějaké doprovodné rozsáhlé matematické teorie – do jejich řešení se můžete pustit rovnou, nepotřebujete žádnou větší přípravu.

Dětská říkanka *Příběh ze St Ives* ukrývá kombinatorickou otázku:
Když jsem šel do St Ives, potkal jsem muže se sedmi ženami, každá žena nesla sedm pytlů,

v každém pytli bylo sedm koček, každá kočka měla sedm koťat. Koťata, kočky, pytle a ženy. Kolik jich šlo do St Ives? (Převzato z [6].)

Název souboru (1 až 3)

Začínáme_s_kombinatorikou_prez.pdf

Základní_kombinatorická_pravidla_hra.pdf

Kombinatorická_pravidla_Poznej.pdf

Variace

První poznávací značky u automobilů byly zavedeny za vlády císaře Františka Josefa I. Jednalo se o bílou tabulku s ručně psanými černými písmeny N (Praha), O (Čechy) nebo P (Morava) doplněnými trojmístným číslem (převzato z [30]). Do konce roku 2015 byla státní poznávací značka tvořena sedmimístným kódem, který byl sestavován ze znaků 0 až 9, A až Z. Druhá pozice kódu byla vyhrazena pro označení kraje (ABCEHJKLMPSTUZ), kde měl majitel vozidla trvalé bydliště (převzato z [44]). Kolik různých poznávacích značek mohlo být vydáno na úradě za vlády císaře Františka Josefa I. a před koncem roku 2015? Změní se počet možných poznávacích značek, zakážeme-li opakování znaků?

Název souboru (4 až 7)

Začínáme_s_variacemi_prez.pdf

Začínáme_s_variacemi_s_opakováním_prez.pdf

Variace_bez_opakování_test.pdf

Variace_s_opakováním_Poznej.pdf

Permutace

Steganografie je věda zabývající se utajením komunikace, ukrýváním zpráv a zatajováním probíhající komunikace. Do této oblasti patří třeba neviditelné inkousty. Pomocí steganografie dosáhneme jistého stupně utajení, ale když se ukrytou zprávu podaří odhalit, je celý její obsah prozrazen. Aby nedošlo k prozrazení obsahu zprávy, zpravidla se steganografické postupy kombinují s kryptografií. To znamená, že ukrytá zpráva je navíc ještě zašifrovaná šifrovacím klíčem, pomocí šifrovacího systému, který přeskupí nebo jinak zašifruje znaky ve větě podle předem dohodnutého hesla nebo jinak (převzato z [36]). Příkladem může být Caesarova šifra (IGKYGXUBG YOLXG), jejímž klíčem je číslo 7, tedy abeceda je posunuta o 7 míst (převzato z [11]). Bez klíče by bylo nutné použít hrubou sílu, tedy zkoušet všechna možná pořadí písmen. Jedná se o lehký nebo těžký úkol?

Název souboru (8 až 11)

Začínáme_s_permutacemi_prez.pdf

Začínáme_s_permutacemi_s_opakováním_prez.pdf

Permutace_bez_opakování_hra.pdf

Permutace_s_opakováním_Poznej.pdf

Kombinace

Stala se vražda! Bohatý pán Fortescue byl otráven bobulemi tisu! V podezření jsou úplně všichni: hospodyně slečna Doveová, služebná Gladys, kuchařka paní Crumpová, komorník pan Crump, sekretářka slečna Grosvenorová, účetní slečna Griffithová, nejstarší syn Percy, mladší syn Lance, dcera Elain, manželka Judy, její milenec Vivian, snacha Jennifer, tetička Effie. Šlo o pomstu, majetek, věno či to byla vražda ze žárlivosti? Na tuto záhadu musí přijít inspektor Neel. Jeho skvělou pomocnicí je slečna Marplová, která má nespočet životních zkušeností a poznala už mnoho lidí (převzato z [10]). Pokud by vraždu pana Fortescua spáchal jen jeden člověk, možných vrahů by bylo 13. Pokud by vraždu bohatého pána spáchala dvojice lidí, jaký je počet všech možných dvojic vrahů? Na tuto otázku panu inspektorovi Neelovi a slečně Marplové lehce odpoví kombinace.

Název souboru (12 až 15)

Začínáme_s_kombinacemi_prez.pdf

Začínáme_s_kombinacemi_s_opakováním_prez.pdf

Kombinace_bez_opakování_Poznej.pdf

Kombinace_s_opakováním_test.pdf

Počítání s faktoriály a kombinačními čísly

Nyní se seznámíme s matematickými symboly $n!$ a $\binom{n}{k}$.

Symbolem $n!$ budeme rozumět **faktoriál**. Faktoriál je definován pro každé přirozené číslo, $n!$ čteme „ n faktoriál“ a platí:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Symbolem $\binom{n}{k}$ budeme rozumět **kombinační číslo**. Kombinační číslo je definováno pro všechna celá nezáporná čísla n, k , za předpokladu, že $k \leq n$. $\binom{n}{k}$ čteme „ n nad k “ a platí:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Název souboru (16 až 18)

Počítání_s_faktoriály_test.pdf

Počítání_s_kombinačními_čísly_test.pdf

Faktoriály_a_kombinační_čísla_Poznej.pdf

Binomická věta

Vzorec pro výpočet druhé mocniny mnohočlenu $(a + b)$ známe již ze základní školy:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Pokud bychom chtěli zjistit, čemu se rovná výraz $(a + b)^5$, jak bychom postupovali? Násobili bychom $(a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$ nebo existuje snazší cesta? Ano, **binomická věta!**

Binomická věta je zobecnění vzorce $(a + b)^n$ pro všechna přirozená n . Šikovnou pomůckou při počítání binomické věty je Pascalův trojúhelník. Tento trojúhelník zřejmě poprvé sestavit Ťian Sien v 11. století v Číně, ale nese jméno po francouzském filozofovi, matematikovi a fyzikovi – Blaise Pascal (1623–1662). (Převzato z [6].)

Jak Pascalův trojúhelník při výpočtech binomické věty využijeme? Čísla jednotlivých řádků trojúhelníků odpovídají binomickým koeficientům. Pokud tedy chceme zjistit koeficienty výrazu $(a + b)^5$, stačí se podívat na pátý řádek v Pascalově trojúhelníku. Už víme, bez dlouhého počítání, že

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Název souboru (19 až 20)

Binomická_věta_1_hra.pdf

Binomická_věta_2_test.pdf

Kombinatorika aneb pojďme si hrát!

Název souboru (21 až 26)

Variace_a_kombinace_hra.pdf

Kombinatorika_bez_opakování_1_hra.pdf

Kombinatorika_bez_opakování_2_Riskuuj.pdf

Kombinatorika_s_opakováním_1_hra.pdf

Kombinatorika_s_opakováním_2_Riskuuj.pdf

Kombinatorika_vše_Riskuuj.pdf

Pravděpodobnost

Jaká je pravděpodobnost, že zítra bude sněžit? Jakou mám šanci, že stihnu první ranní vlak? Jakou mám naději, že vyhraji v loterii?

Matematická teorie pravděpodobnosti se dostala do popředí v 17. století během rozhovoru o problémech týkajících se hazardních her, jež mezi sebou vedli Blaise Pascal, Pierre de Fermat a Antoine Gombaud (známý též pod jménem Chevalier de Méré). Lámali si hlavu nad jednoduchou hrou. Chevalier de Méré se ptal: „Co je pravděpodobnější, že při 4 hodech kostkou padne šestka, nebo dvě šestky při 24 hodech dvěma kostkami? Na co byste vsadili poslední peníze?“ (Převzato z [6].)

Název souboru (27 až 37)

Začínáme_s_pravděpodobností_prez.pdf

Začínáme_s_pravděpodobností_jevů_prez.pdf

Pravděpodobnosti_jevů_1_test.pdf

Pravděpodobnost_jevů_2_hra.pdf

Pravděpodobnost_jevů_3_hra.pdf
Věty_o_pravděpodobnosti_1_test.pdf
Věty_o_pravděpodobnosti_2_Poznej.pdf
Nezávislé_jevy_hra.pdf
Binomické_rozdělení_hra.pdf
Binomické_rozdělení_a_nezávislé_pokusy_Poznej.pdf
Podmíněná_pravděpodobnost_test.pdf

Statistika

Florence Nightingalová je připomínána jako ošetřovatelka, ale za svůj úspěch vděčí své znalosti statistiky. Sbírala data o úmrtích ve vojenské nemocnici Selimiye na okraji Istanbulu během krymské války. Na základě nashromážděných dat ukázala, jak její hygienická opatření předešla mnoha úmrtím. Na své prezentaci v Londýně své výsledky předváděla v podobě růžového grafu. Tato působivá vizuální pomůcka byla později přejmenována na koláčový graf. Na počest jejího narození 12. května 1820 se slaví Mezinárodní den ošetřovatelství (převzato z [11]).

Název souboru (38 až 45)

Začínáme_se_statistikou_prez.pdf
Začínáme_s_korelací_prez.pdf
Statistický_soubor_jednotka_znak_hra.pdf
Statistika_a_rozdělení_četností_test.pdf
Charakteristiky_polohy_1_hra.pdf
Charakteristiky_polohy_2_test.pdf
Charakteristiky_variability_a_korelace_test.pdf
Práce_s_daty_Poznej.pdf

Pravděpodobnost a statistika aneb pojďme si hrát!

Název souboru (46 až 47)

Pravděpodobnost_Riskuj.pdf
Statistika_Riskuj.pdf

Příklady pro hlavy mazané

Název souboru (48 až 50)

Kombinatorika_a_pravděpodobnost.pdf
Statistický_výzkum.pdf
Statistický_výzkum_data.xlsx

Kapitola 3

Metodický návod

Tato kapitola se věnuje vytvořeným výukovým materiálům z kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky z didaktického hlediska. Vytvořené materiály jsou primárně určeny pro žáky gymnázií. Obsahově odpovídají požadavkům Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia. Očekávané výstupy žáků a okruhy v probíraném učivu jsou zmíněny v první podkapitole. Dále se věnujeme kombinatorice, pravděpodobnosti a statistice a vytvořeným výukovým materiálům. Nejdříve zmiňujeme zařazení tohoto tematického celku do učebních osnov středoškolské matematiky a základní literaturu. Podrobně se věnujeme otázkám ve výukových materiálech a zmiňujeme naši představu používání výukových materiálů. V závěru kapitoly uvádíme doporučený tematický plán s výukovými materiály.

3.1 Rámcový vzdělávací program pro gymnázia

Podle Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia [21] očekávanými výstupy žáka ve vzdělávacím obsahu práce s daty, kombinatorika a pravděpodobnost jsou:

- Řeší reálné problémy s kombinatorickým podtextem (charakterizuje možné případy, vytváří model pomocí kombinatorických skupin a určuje jejich počet).
- Využívá kombinatorické postupy při výpočtu pravděpodobnosti, upravuje výrazy s faktoriály a kombinačními čísly.
- Diskutuje a kriticky zhodnotí statistické informace a daná statistická sdělení.
- Volí a užívá vhodné statistické metody k analýze a zpracování dat (využívá výpočetní techniku).
- Reprezentuje graficky soubory dat, čte a interpretuje tabulky, diagramy a grafy, rozlišuje rozdíly v zobrazení obdobných souborů vzhledem k jejich odlišným charakteristikám.

V probíraném učivu by měly být zahrnuty tyto okruhy:

- Kombinatorika: elementární kombinatorické úlohy, variace, permutace, kombinace (bez opakování), binomická věta, Pascalův trojúhelník.
- Pravděpodobnost: náhodný jev a jeho pravděpodobnost, pravděpodobnost sjednocení a průniku jevů, nezávislost jevů.
- Práce s daty: analýza a zpracování dat v různých reprezentacích, statistický soubor a jeho charakteristiky (vážený aritmetický průměr, medián, modus, percentil, kvartil, směrodatná odchylka, mezikvartilová odchylka).

3.2 Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika

Tematický celek kombinatorika, pravděpodobnost a statistika bývá obvykle zařazován do osnov 3. nebo 4. ročníku čtyřletého gymnázia. Vytvořené interaktivní výukové materiály jsou tedy určeny pro žáky těchto ročníků čtyřletého a vyššího stupně víceletého gymnázia. Předpokládáme-li tří hodinovou dotaci týdně, je této látce věnováno asi 30 hodin matematiky. Učebnice Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika z nakladatelství Prometheus [4] byla vybrána jako základní literatura. Podle ní bylo dodrženo pořadí témat. Učebnice je schválena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky a je zařazena do seznamu učebnic pro střední vzdělávání pro vzdělávací obor matematika.

Cílem této práce bylo vytvořit komplexní výukové materiály z kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky. Výukové prezentace obsahují výklad látky, řešené příklady a úkoly, které mají žákům pomoci pochopit probíranou látku a naučit je přemýšlet nad jednotlivými kroky řešení. Interaktivní testy, párovací hry, hry Riskuj! a Poznej! obsahují standardní příklady. Soubor `Kombinatorika_a_pravděpodobnost.pdf` obsahuje náročnější příklady pro šikovné a nadané žáky. K vytváření mezipředmětových vztahů s informačními technologiemi slouží `Statistický_výzkum.pdf`, jehož součástí jsou úkoly a data určená ke zpracování v MS Excelu. Žák tak využívá svých znalostí ze statistiky a dovedností s MS Excelem.

Ve vytvořených materiálech používáme uzavřené otázky s jednou správnou odpovědí, uzavřené otázky s více správnými odpověďmi a otázky s tvořenou odpovědí. Uzavřené otázky s jednou správnou odpovědí jsou voleny u příkladů, u nichž nás zajímá výsledek. Cílem těchto otázek je, aby žák provedl výpočet příkladu a dopočítal se ke správné odpovědi. Dále rozlišujeme tvar odpovědí v uzavřených otázkách. Ve vytvořených materiálech se můžeme setkat s vyčíslenými výsledky a s výsledky bez závěrečného vyčíslení. Časově náročnější je zjišťovat správnou odpověď na uzavřené otázky s vyčíslenými výsledky, neboť žák musí celý příklad dopočítat. Naopak uzavřené otázky s výsledky bez závěrečného vyčíslení jsou méně časově náročné, protože žák může odpovídat z paměti. Odpovědi na otázky s tvořenou odpovědí je nutné zapisovat dle syntaxe. Doplňujeme-li matematický řetězec, výsledek je možno zapsat ve tvaru součinu, součtu, rozdílu a podílu, tedy

v nevyčíslené podobě. Upozorňujeme, že v tomto případě nedochází k vytváření představy o velikosti výsledku.

Před samotnou tvorbou výukových materiálů byly stanoveny vzdělávací cíle. Rozumíme tím obsah samotného učiva (pojmy) a úroveň aplikace nových poznatků. K vytyčení vzdělávacích cílů jsme vycházeli z revidované Bloomovy taxonomie (2001). Ve vytvořených materiálech jsou obsaženy různě náročné úlohy, aby bylo možné zjistit, jaké úrovně vzdělávacích cílů žák dosáhl [5].

Následuje přehled očekávaných vzdělávacích cílů žáka na základě úloh ve vytvořených materiálech zařazených do revidované Bloomovy taxonomie.

Kategorie	Očekávané vzdělávací cíle žáka
1. Zapamatování	Správně utvoří dvojice z nabízených pojmů. Doplní pojem na základě definice. Správně určí druh grafu z obrázku či popisu.
2. Porozumění	Rozpoznává nedefinované výrazy faktoriálů a kombinačních čísel. Pozná bez výpočtu kombinační čísla se stejnou hodnotou. Upravuje výrazy s faktoriály a kombinačními čísly. Rozhoduje o správnosti tvrzení. Rozumí symbolickému zápisu zadání příkladu. Vypočítá lehké příklady.
3. Aplikace	Používá správných postupů při výpočtech slovních úloh. Řeší příklady. Řeší faktoriály a kombinační čísla s neznámými. Aplikuje znalosti Pascalova trojúhelníku při binomickém rozvoji. Řeší příklad s různými podmínkami. Správně používá vzorec pro podmíněnou pravděpodobnost.
4. Analýza	Určuje vhodná řešení u rovnic s neznámými. Rozlišuje variace, permutace a kombinace. Rozeznává jednotlivé druhy pravděpodobností. Interpretuje grafy a tabulky. Řeší příklady ze zadaných grafů a tabulek. Rozhoduje o správnosti tvrzení z předložených informací.
5. Hodnocení	Posuzuje míru závislosti dvou znaků z grafu či tabulky.
6. Tvoření	Vytváří vlastní postupy při řešení těžkých příkladů určené pro nadané žáky. Vytváří přehledné zpracování poskytnutých údajů. Údaje zpracovává v MS Excelu.

Očekáváme, že žák dokáže okamžitě odpovědět na otázky z kategorie zapamatování. U dalších otázek předpokládáme nutnost použít psací potřeby, případně kalkulačku.

Používá-li výukové materiály žák k samostudiu, sám si volí pořadí otázek u všech her a testů. Jsou-li výukové materiály používány ve třídě s učitelem, doporučujeme dodržovat pořadí otázek v interaktivních testech. Pořadí otázek u párovacích her a Poznej! může volit sám učitel nebo volbu může přenechat žákům. Hry Riskuj! jsou určeny pro souhrnné opakování již probraného učiva. Doporučujeme, aby formát hry byl zachován a opravdu mezi sebou soutěžila dvě družstva, eventuálně dvojice žáků. Mají-li všichni žáci ve třídě k dispozici svůj počítač, může každý žák pracovat samostatně, popřípadě hrát Riskuj! ve dvojicích.

Ukázky použitých příkladů

Příklad uzavřené otázky s jednou správnou odpovědí ve vyčíslené formě

Příklad 1: Určete $x \in \mathbb{R}$ tak, aby pátý člen binomického rozvoje $\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^9$ byl roven 2016.

10. [1b.] Určete $x \in \mathbb{R}$ tak, aby pátý člen binomického rozvoje $\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^9$ byl roven 2016.
- $2\sqrt{2}$
 $\sqrt{2^{-1}}$
 8
 $\sqrt[3]{2}$

Obr. 3.1: Zadání příkladu v testu *Binomická věta*.

Řešení: K určení $x \in \mathbb{R}$ použijeme binomickou větu. Pro k -tý člen binomického rozvoje $(a + b)^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, platí:

$$\binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1}.$$

Dosazením získáváme:

$$\binom{9}{4} \left(\frac{2}{x}\right)^5 (\sqrt{x})^4.$$

Víme, že hodnota pátého členu je rovna 2016, tedy:

$$\begin{aligned} \binom{9}{4} \left(\frac{2}{x}\right)^5 (\sqrt{x})^4 &= 2016 \\ \frac{9!}{4!5!} \frac{32}{x^5} x^2 &= 2016 \\ 126 \frac{32}{x^3} &= 2016 \\ 2 &= x^3 \\ x &= \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Všechny provedené úpravy jsou ekvivalentní, neboť ze zadání víme, že $x > 0$.

Pokud neznáme tvar k -tého členu obecného binomického rozvoje, použijeme binomickou větu pro $\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^9$ a určíme tvar pátého členu, který následně použijeme při výpočtu x .

Binomická_věta_2_test.pdf

Příklad uzavřené otázky s jednou správnou odpovědí v nevyčíslené formě

Příklad 2: V zásilce je 20 výrobků, z nichž jsou 3 vadné. Vybereme namátkou 5 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že:

- a) to nebudou zmetky?
- b) mezi nimi bude právě jeden zmetek?
- c) mezi nimi budou všechny vadné výrobky?

1. [3b.] V zásilce je 20 výrobků, z nichž jsou 3 vadné. Vybereme namátkou 5 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že:

(a) to nebudou zmetky?

$\frac{\binom{15}{5}}{\binom{20}{5}}$
 $\frac{1}{\binom{17}{5}}$
 $\frac{\binom{17}{4}\binom{3}{1}}{\binom{20}{5}}$
 $\frac{\binom{17}{5}}{\binom{20}{5}}$

(b) mezi nimi bude právě jeden zmetek?

$\frac{\binom{17}{4}\binom{3}{1}}{\binom{19}{5}}$
 $\frac{\binom{17}{4}\binom{3}{1}}{\binom{20}{5}}$
 $\frac{\binom{17}{4}}{\binom{20}{5}}$
 $\frac{\binom{17}{5}}{\binom{20}{5}}$

(c) mezi nimi budou všechny vadné výrobky?

$\frac{\binom{17}{3}\binom{3}{2}}{\binom{20}{5}}$
 $\frac{1}{\binom{17}{5}}$
 $\frac{\binom{17}{2}}{\binom{20}{5}}$
 $\frac{\binom{17}{5}}{\binom{20}{5}}$

Obr. 3.2: Zadání příkladu v testu *Pravděpodobnosti jevů*.

Řešení: Ve všech třech případech budeme pracovat se stejným počtem všech možných výsledků. Z dvaceti výrobků v zásilce vybíráme náhodně pět, jedná se o pětičlenné kombinace z dvaceti prvků a jejich počet je $\binom{20}{5}$.

- a) Ve výběru pěti výrobků ze dvaceti se nesmí vyskytovat vadné kusy. Ze všech možných dvaceti výrobků odebereme tři vadné, zbude nám sedmnáct nezávadných výrobků. Z těchto nezávadných sedmnácti výrobků namátkou taháme pět. Jedná se o pětičlenné kombinace ze sedmnácti prvků, jejich počet je $\binom{17}{5}$. Nyní podělíme počet příznivých výsledků počtem všech možných výsledků. Pravděpodobnost, že ve výběru nebudou vadné výrobky, je:

$$\frac{\binom{17}{5}}{\binom{20}{5}}.$$

- b) Ve výběru pěti výrobků ze dvaceti se vyskytuje právě jeden zmetek. Nejdříve ze tří vadných výrobků vybereme právě jeden, počet takových výběrů je roven $\binom{3}{1}$. Jeden výrobek již máme vybrán a čtyři zbývající výrobky vybereme z nezávadných. Jedná se o čtyřčlenné kombinace ze sedmnácti prvků a jejich počet je $\binom{17}{4}$. Použitím pravidla součinu dostáváme počet příznivých výsledků $\binom{3}{1} \binom{17}{4}$. Pravděpodobnost, že ve výběru bude právě jeden zmetek je:

$$\frac{\binom{3}{1} \binom{17}{4}}{\binom{20}{5}}.$$

- c) Počet vadných výrobků je roven třem a všechny musí být obsaženy v náhodném výběru pěti výrobků ze dvaceti. Zbývá nám vybrat dva výrobky z nezávadných, jedná se o dvoučlenné kombinace ze sedmnácti prvků a jejich počet je roven $\binom{17}{2}$. Pravděpodobnost, že ve výběru budou všechny vadné výrobky, je

$$\frac{\binom{17}{2}}{\binom{20}{5}}.$$

Pravděpodobnosti_jevů_1_test.pdf

Příklad uzavřené otázky s více správnými odpověďmi

Příklad 3: Vyjádřete součet jedním kombinačním číslem

$$\binom{17}{17} + \binom{18}{17} + \binom{19}{17} + \binom{20}{17}.$$

4. [2b.] Vyjádřete součet jedním kombinačním číslem

$$\binom{17}{17} + \binom{18}{17} + \binom{19}{17} + \binom{20}{17}$$

$$\square \binom{20}{2} \quad \square \binom{21}{3} \quad \square \binom{21}{18} \quad \square \binom{21}{17}$$

Obr. 3.3: Zadání příkladu v testu *Počítání s kombinačními čísly*.

Řešení: Uvědomme si, že platí $\binom{17}{17} = 1 = \binom{18}{18}$, tedy součet má tvar:

$$\binom{18}{18} + \binom{18}{17} + \binom{19}{17} + \binom{20}{17}.$$

K výpočtu součtu použijeme vzorec pro přirozená čísla $n, k, k < n$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} & \left[\binom{18}{18} + \binom{18}{17} \right] + \binom{19}{17} + \binom{20}{17} = \\ & = \left[\binom{19}{18} + \binom{19}{17} \right] + \binom{20}{17} = \\ & = \binom{20}{18} + \binom{20}{17} = \\ & = \binom{21}{18} \end{aligned}$$

Dále si uvědomíme, že pro všechna celá nezáporná čísla $n, k, k \leq n$ platí:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Správná odpověď je:

$$\binom{21}{18} \text{ a } \binom{21}{3}.$$

Počítání s kombinačními čísly test.pdf

Příklad otázky s tvořenou odpovědí ve formě textového řetězce

Příklad 4: Který člen binomického rozvoje $(7 - 3x)^8$ obsahuje x^3 ?

Řešení: K určení členu rozvoje obsahující x^3 použijeme binomickou větu. Začneme psát binomický rozvoj výrazu $(7 - 3x)^8$:

$$\binom{8}{0}7^8 + \binom{8}{1}7^7(-3x) + \binom{8}{2}7^6(-3x)^2 + \binom{8}{3}7^5(-3x)^3 + \dots$$

Dál psát binomický rozvoj nemusíme, vidíme, že čtvrtý člen obsahuje x^3 .

Binomická věta 2 test.pdf

Příklad otázky s tvořenou odpovědí ve formě matematického řetězce

Příklad 5: Klenotník vybírá do prstenu čtyři drahokamy. K dispozici má pět rubínů, šest diamantů, dva smaragdy a tři safíry. Kolika způsoby může tento výběr provést, považujeme-li kameny téhož druhu za stejné?

Řešení: Klenotník vybírá do prstenu čtyři drahokamy. Nezáleží na pořadí, ve kterém drahokamy vybírá, a ve výběru se mohou vyskytovat drahokamy téhož druhu.

Nejdříve uvažujme dostatečný počet drahokamů každého druhu. Počet výběrů čtyř drahokamů jsou čtyřčlenné kombinace s opakováním ze čtyř prvků, to je

$$K'(4, 4) = \binom{7}{4}.$$

Smaragdů a safírů je nedostatečný počet. Zjistíme počet výběrů drahokamů, které nejsou možné a odečteme je od počtu výběrů drahokamů s dostatečným počtem. Klenotník má k dispozici tři safíry a dva smaragdy. Označíme-li rubíny R , diamanty D , smaragdy M a safíry F , zakázanými výběry jsou:

$$\{M, M, M, M\}, \{M, M, M, R\}, \{M, M, M, D\}, \{M, M, M, F\}, \{F, F, F, F\}.$$

Celkový počet výběrů čtyř drahokamů do prstenu je:

$$\binom{7}{4} - 5 = 30.$$

Kombinace_s_opakováním_test.pdf

Celkem bylo vytvořeno 50 výukových materiálů: 11 interaktivních testů, 12 párovacích her, 5 her Riskuj!, 8 her Poznej!, 11 výukových prezentací, 1 soubor obsahující příklady z kombinatoriky a pravděpodobnosti pro nadané žáky, 1 soubor obsahující úkoly ze statistiky a 1 datový soubor pro práci s MS Excelem. V testech, párovacích hrách, Riskuj! a Poznej! bylo použito a upraveno 122 příkladů z kombinatoriky, 56 z pravděpodobnosti a 69 ze statistiky. Úkoly a příklady ve výukových prezentacích nejsou započítány. Příklady byly čerpány z nejrůznějších sbírek a zdrojů, všechny jsou uvedeny v seznamu použité literatury (viz 5.5).

Použití interaktivních výukových materiálů

Nabízíme tři možnosti využití vytvořených interaktivních výukových materiálů.

I Součást výuky

Předpokládáme technickou vybavenost třídy: počítač, interaktivní tabule či dataprojektor s tabulí. Výuka probíhá s pomocí vybraných interaktivních výukových materiálů (viz doporučený tematický plán 3.3). Práce s učebnicí je převážně nechána žákům jako domácí samostudium.

II Samostudium pro žáky

Interaktivní výukové materiály nejsou používány ve vyučování, ale slouží jako učební pomůcka žákům při domácím samostudiu. Příklady ve vytvořených materiálech jsou převážně čerpány z jiných zdrojů než z doporučené učebnice a mohou tak tvořit sbírku příkladů pro přípravu na zkoušení.

III Občasné využívání ve výuce

Základním zdrojem teorie a příkladů je učebnice doplněná sbírkou příkladů. Dle uvážení učitele jsou hodiny matematiky zpestřovány interaktivními výukovými materiály. Opět předpokládáme technickou vybavenost třídy.

3.3 Doporučený tematický plán

Nyní se budeme zabývat doporučeným tematickým plánem. Cílem vyučování pomocí interaktivních výukových materiálů je učinit hodiny matematiky zajímavými. Nežádoucím jevem je ztráta učiva a smysluplnosti hodin. Doporučujeme pracovat s interaktivní tabulí a zároveň s klasickou tabulí na zaznamenávání postupů s výpočty. Je možno nahradit interaktivní tabuli dataprojektorem s klasickou tabulí.

Doporučujeme začít novou látku výukovými prezentacemi s výkladem učitele. Dále následuje procvičování příkladů a domácí samostudium. V doporučeném tematickém plánu neuvažujeme o žádném ústním ani písemném zkoušení. V pravé části se nachází doporučená hodinová dotace pro jednotlivé tematické celky a témata. Hodinová dotace pro jednotlivá témata je pouze hrubý odhad. Časová náročnost výukových materiálů nebyla stanovena a žádáme učitele, aby se řídili podle možností své třídy. Doporučený tematický plán tedy není závazný a lze jej libovolně upravit.

Učivo je rozdělena do tří tematických celků: kombinatorika, pravděpodobnost a statistika. Každý tematický celek je dále dělen na témata. V jednotlivých tématech jsou vypsány soubory, které se danou problematikou zabývají a jsou krátce charakterizovány. V tabulkách nejsou uvedeny názvy souborů, ale pouze jejich číselné označení. Tato číselná označení jsou k nalezení v kapitole 2, kde jsou seřazené soubory očíslovány 1 až 51. Materiály určené pro domácí samostudium jsou v tabulkách označeny horním indexem DÚ, např. 41^{DÚ}. Klíč správných řešení (viz kapitola 5) je seřazen dle doporučeného tematického plánu.

Kombinatorika

15 hod

- Téma: Základní kombinatorická pravidla

2 hod

Soubor	Charakteristika IVM
1	Výuková prezentace; kombinatorika, kombinatorické pravidlo součtu, kombinatorické pravidlo součinu, řešené příklady, kontrolní otázky.
2	Párovací hra; aplikace kombinatorických pravidel součtu a součinu, úplné vyčíslení výsledků, odpovědi navíc.
3	Poznej! příklady na pravidla součtu a součinu, pro jednoho hráče, otázky s tvořenou odpovědí, uzavřené otázky, jedna správná odpověď.

- Téma: Variace 2 hod

Soubor	Charakteristika IVM
4	Výuková prezentace; variace, řešené příklady, počet variací, kontrolní otázky.
6	Test; pochopení a upevnění pojmu variace, příklady na výpočet variací, otázky s tvořenou odpovědí.

- Téma: Permutace 1 hod

Soubor	Charakteristika IVM
8	Výuková prezentace; permutace, řešené příklady, faktoriál, počet permutací, kontrolní otázky.
10	Párovací hra; výpočet příkladu s různými podmínkami, úplné vyčíslení výsledků, odpovědi navíc.

- Téma: Kombinace 2 hod

Soubor	Charakteristika IVM
12	Výuková prezentace; kombinace, řešené příklady, kombinační číslo, počet kombinací, kontrolní otázky.
14	Poznej! příklady na kombinace bez opakování, pro jednoho hráče, otázky s tvořenou odpovědí, uzavřené otázky, jedna správná odpověď.

- Téma: Opakování 1 hod

Soubor	Charakteristika IVM
21 ^{DÚ}	Párovací hra; řešení rovnic v \mathbb{N} s variacemi a kombinacemi.
22 ^{DÚ}	Párovací hra; výpočet variací, permutací a kombinací.
23	Riskuj! opakování učebního celku kombinatorika bez opakování, příklady na výpočty, pro dva hráče, uzavřené otázky, jedna správná odpověď.

- Téma: Variace s opakováním 1 hod

Soubor	Charakteristika IVM
5	Výuková prezentace; variace s opakováním, řešené příklady, počet variací s opakováním, kontrolní otázky.
7	Poznej! příklady na variace s opakováním, pro jednoho hráče, otázky s tvořenou odpovědí, uzavřené otázky, jedna správná odpověď.

- Téma: Permutace s opakováním 1 hod

Soubor	Charakteristika IVM
9	Výuková prezentace; permutace s opakováním, řešené příklady, počet permutací s opakováním, kontrolní otázky.
11	Poznej! příklady na permutace s opakováním, pro jednoho hráče, otázky s tvořenou odpovědí, uzavřené otázky, jedna správná odpověď.

- Téma: Kombinace s opakováním 2 hod

Soubor	Charakteristika IVM
13	Výuková prezentace; kombinace s opakováním, řešené příklady, počet kombinací s opakováním, kontrolní otázky.
15	Test; příklady na výpočet kombinací s opakováním, uzavřené otázky s jednou správnou odpovědí, otázky s tvořenou odpovědí.

- Téma: Opakování 1 hod

Soubor	Charakteristika IVM
24 ^{DÚ}	Párovací hra; řešení rovnic v \mathbb{N} s variacemi s opakováním, permutacemi s opakováním a kombinacemi s opakováním.
25	Riskuj! opakování učebního celku kombinatorika s opakováním, příklady na výpočty, pro dva hráče, uzavřené otázky, jedna správná odpověď.
26 ^{DÚ}	Riskuj! opakování učebního celku kombinatorika bez opakování a kombinatorika s opakováním, příklady na výpočty, pro dva hráče, uzavřené otázky, jedna správná odpověď.

- Téma: Vlastnosti kombinačních čísel 1 hod

Soubor	Charakteristika IVM
16	Test; pochopení a upevnění pojmu faktoriál, výpočet faktoriálů, upravení výrazu s faktoriály, uzavřené otázky s jednou i více správnými odpověďmi, otázky s tvořenou odpovědí.
17	Test; pochopení a upevnění pojmu kombinační čísla, výpočet kombinačních čísel, řešení rovnic s kombinačními čísly, uzavřené otázky s jednou i více správnými odpověďmi.
18 ^{DÚ}	Poznej! příklady na faktoriály a kombinační čísla, pro jednoho hráče, uzavřené otázky, jedna správná odpověď.

- Téma: Binomická věta

1 hod

Soubor	Charakteristika IVM
19 ^{DÚ}	Párovací hra; určení číselné hodnoty členů v binomickém rozvoji, úplné vyčíslení výsledku, odpovědi navíc.
20	Test; pochopení a upevnění pojmu binomický rozvoj a Pascalův trojúhelník, užití binomického rozvoje, určení členů v binomickém rozvoji, uzavřené otázky s jednou správnou odpovědí, otázky s tvořenou odpovědí.

Pravděpodobnost

9 hod

- Téma: Náhodné pokusy, množina možných výsledků pokusu a jevy 1 hod

Soubor	Charakteristika IVM
27	Výuková prezentace; náhodné pokusy, množina všech možných výsledků pokusu, jevy, jev nemožný, jev jistý, jev opačný, kontrolní otázky.

- Téma: Pravděpodobnosti a pravděpodobnosti jevů

2 hod

Soubor	Charakteristika IVM
28	Výuková prezentace; pravděpodobnost jevů, sčítání pravděpodobností, pravděpodobnost opačného jevu, násobení pravděpodobností, řešené příklady, kontrolní otázky.
29	Test; příklady na výpočet pravděpodobnosti jevů, uzavřené otázky s jednou správnou odpovědí, otázky s tvořenou odpovědí.
30	Párovací hra; pravděpodobnosti jevů, výpočet příkladu s různými podmínkami, úplné vyčíslení výsledků.
31 ^{DÚ}	Párovací hra; pravděpodobnosti jevů, výpočet příkladů s různými podmínkami, úplné vyčíslení výsledků, odpovědi navíc.

- Téma: Sčítání pravděpodobností a nezávislé jevy

2 hod

Soubor	Charakteristika IVM
32	Test; příklady na výpočet sčítání pravděpodobností, otázky s tvořenou odpovědí, uzavřené otázky s jednou správnou odpovědí, nevyčíslené výsledky.
33	Poznej! příklady na sčítání a násobení pravděpodobností, pro jednoho hráče, uzavřené otázky, jedna správná odpověď.
34 ^{DÚ}	Párovací hra; násobení pravděpodobností, výpočet příkladu s různými podmínkami, úplné vyčíslení výsledků.

- Téma: Nezávislé pokusy a binomické rozdělení 2 hod

Soubor	Charakteristika IVM
35 ^{DÚ}	Párovací hra; binomické rozdělení, výpočet příkladu s různými podmínkami, úplné vyčíslení výsledků, odpovědi navíc.
36	Poznej! příklady na výpočet nezávislých pokusů a binomického rozdělení, pro jednoho hráče, otázky s tvořenou odpovědí, uzavřené otázky, jedna správná odpověď.

- Téma: Podmíněná pravděpodobnost 1 hod

Soubor	Charakteristika IVM
37	Test; příklady na výpočet podmíněné pravděpodobnosti, uzavřené otázky s jednou správnou odpovědí, otázky s tvořenou odpovědí.

- Téma: Opakování 1 hod

Soubor	Charakteristika IVM
46	Riskuj! opakování učebního celku pravděpodobnost, příklady na výpočty, pro dva hráče, uzavřené otázky, jedna správná odpověď.

Statistika 6 hod

- Téma: Statistický soubor, jednotka, znak a rozdělení četností 1 hod

Soubor	Charakteristika IVM
38	Výuková prezentace; statistika, popisná statistika, statistický soubor, statistická jednotka, statistický znak, rozdělení četností, relativní rozdělení četností, grafické znázornění četností, kontrolní otázky.
40 ^{DÚ}	Párovací hra; vytváření dvojic z nabízených pojmů, pojmy z úvodu popisné statistiky.
41	Test; pochopení a upevnění pojmů z úvodu popisné statistiky, uzavřené otázky s jednou správnou odpovědí, otázky s tvořenou odpovědí.

- Téma: Charakteristiky polohy 1 hod

Soubor	Charakteristika IVM
42 ^{DÚ}	Párovací hra; výpočet charakteristik poloh ze zadané tabulky, aritmetický průměr, vážený aritmetický průměr, modus, medián, odpovědi navíc.
43	Test; příklady na výpočet charakteristik poloh, aritmetický průměr, vážený aritmetický průměr, geometrický průměr, harmonický průměr, modus, medián, uzavřené otázky s jednou správnou odpovědí.

- Téma: Charakteristiky variability a korelace 2 hod

Soubor	Charakteristika IVM
39	Výuková prezentace; korelace, koeficient korelace, vlastnosti koeficientu korelace, určování míry závislosti dvojice znaků z grafů, kontrolní otázky.
44	Test; pochopení a upevnění pojmů charakteristik variability a korelace, uzavřené otázky s jednou správnou odpovědí, otázky s tvořenou odpovědí.

- Téma: Práce se statistickými daty 1 hod

Soubor	Charakteristika IVM
45	Poznej! interpretace tabulek a grafů, pro jednoho hráče, uzavřené otázky, jedna správná odpověď.

- Téma: Opakování 1 hod

Soubor	Charakteristika IVM
47	Riskuj! opakování učebního celku statistika, příklady na výpočty, interpretace tabulek a grafů, pro dva hráče, uzavřené otázky, jedna správná odpověď.

Příklady pro hlavy mazané

- Kombinatorika a pravděpodobnost

Soubor	Charakteristika
48	Zadání pěti příkladů z kombinatoriky a tří příkladů z pravděpodobnosti pro dobrovolnou samostatnou práci žáků, pro nadané žáky.

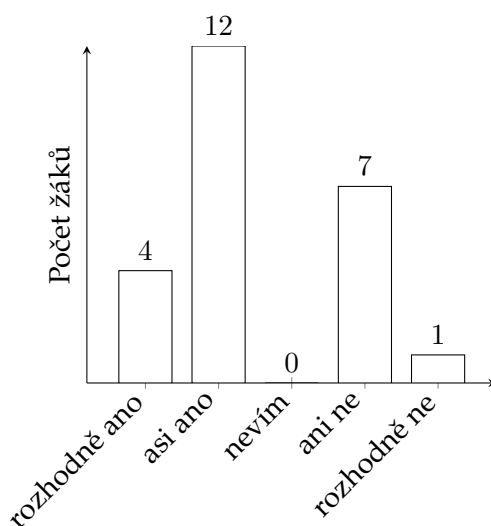
- Statistický výzkum

Soubor	Charakteristika
49	Zadání 8 úkolů ze statistiky pro dobrovolnou samostatnou práci žáků, předpokladem je využití výpočetní techniky k výpočtům, nápověda pro práci s MS Excelem.
50	Data statistického výzkumu určená pro zpracování MS Excelem.

Kapitola 4

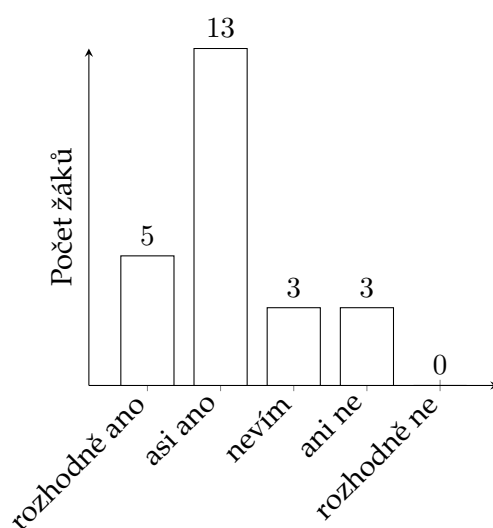
Výsledky z praxe

Výuka matematiky pomocí vytvořených interaktivních výukových materiálů proběhla v septimě paní Mgr. Hany Ondrouchové na gymnáziu v Hodoníně (oficiální název školy Gymnázium, Obchodní akademie a Jazyková škola s právem státní závěrečné zkoušky Hodonín, příspěvková organizace). Třída byla vybavena počítačem s dataprojektorem, promítacím plátnem a tabulí na fixy. Promítací plátno bylo umístěno nad tabulí. Nové téma úvod do kombinatoriky a základní kombinatorická pravidla byla žákům představena výukovou prezentací `Začínáme_s_kombinatorikou_prez.pdf`, základní kombinatorická pravidla byla procvičena na párovací hře `Základní_kombinatorická_pravidla_hra.pdf` a hře `Poznej!_Kombinatorická_pravidla_Poznej.pdf`.



Obr. 4.1: Zaujala Vás výuka matematiky pomocí IVM?

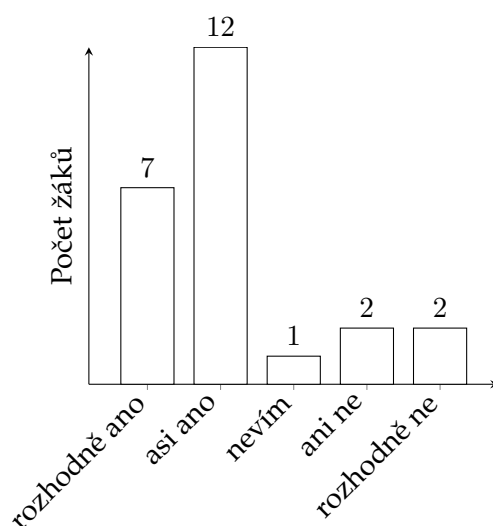
Výuka proběhla ve třídě s7A s dvaceti čtyřmi žáky. Nejdříve jsme si představili kombinatorická pravidla pomocí výukové prezentace. Na otázky v prezentaci odpovídali žáci a odpovědi jsme odkrývali pouze pro zajímavost. Následně jsme kombinatorická pravidla procvičili na párovací hře, kde jsem sama určovala pořadí



Obr. 4.2: Byla pro Vás výuka s využitím IVM přínosná?

otázek. Žáci byli šikovní, neboť společnými silami dokázali vyřešit všechny příklady. Tabuli na fixy jsem používala k přehlednému zaznamenávání početních postupů a výsledků. Tento zápis doplněný vlastními poznámkami si žáci psali do svých sešitů. Žáci kladně hodnotili výslednou tajenku párovací hry „Vím, že nic nevím.“ a mezipředmětovou vazbu se základy společenských věd. V závěru vyučovací hodiny jsme započali hru Poznej!, kdy určení žáci sami vybírali otázky, které jsme následně s celou třídou hromadně řešili.

Po skončení hodiny matematiky žáci vyplnili krátký evaluační dotazník (viz příloha 5.5). Uzavřené otázky s hodnotící škálou jsou zde zpracovány v grafech.



Obr. 4.3: Uvítal/a byste výuku matematiky na střední škole pomocí IVM?

Z evaluačních dotazníků vyplynulo, že polovina třídy se již někdy setkala s interaktivními výukovými materiály a to na základních školách. Druhá polovina

třídy se s touto formou výuky setkala poprvé. Žáci by ocenili fungování těchto materiálů na svých zařízeních – chytré telefony a tablety. Jiní zastávají názor, že interaktivní výuka na střední a vysoké školy nepatří. Z uzavřených otázek s hodnotící škálou vyplývá, že alespoň 60 % žáků ve třídě výuka matematiky pomocí interaktivních výukových materiálů zajala, výuka byla pro ně přínosná a uvítali by podobný způsob výuky matematiky na střední škole.

Interaktivní výukové materiály byly vyzkoušeny na interaktivní tabuli *eBeam* v počítačové učebně Ústavu matematiky a statistiky Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity. Všechny materiály správně fungovaly a správně spolupracovaly s interaktivním fixem. Výukové prezentace, párovací hry a Riskuj! doporučujeme zobrazovat v režimu na celou obrazovku. Testy a hry Poznej! není vhodné zobrazovat v režimu na celou obrazovku. Pro odpovědi na otázky s tvořenou odpovědí potřebujeme mít zobrazenou klávesnici interaktivní tabule a v režimu na celou obrazovku je manipulace s touto klávesnicí nemožná.

Kapitola 5

Klíč správných řešení

V této kapitole jsou uvedena všechna správná řešení ke všem vytvořeným výukovým materiálům. Kapitola je rozdělena do pěti podkapitol: kombinatorika, pravděpodobnost, statistika, příklady pro hlavy mazané a statistický výzkum. Uspořádání souborů v podkapitolách odpovídá doporučenému tématickému plánu. Pro lepší orientaci je vždy uveden název daného souboru.

Pro lepší přehlednost jsou odpovědi párovacích her uvedeny i s otázkami. Pro úplnost řešení uvádíme i tajenky skrývající citáty slavných osobností. Správné odpovědi her Riskuj! a Poznej! jsou zapsány do tabulek, které odpovídají hracím plochám daných her. Řešení her Poznej! doplňujeme významnými místy Moravy.

5.1 Kombinatorika

- Základní_kombinatorická_pravidla_hra.pdf

Z jednoho království do druhého a zpět, 400.

Z jednoho království do druhého a zpět tak, že žádná cesta není použita dvakrát, 240.

Z jednoho království do druhého a zpět tak, že z těchto devíti cest je právě jedna použita dvakrát, 140.

Z jednoho království do druhého a zpět tak, že z těchto devíti cest jsou právě dvě použity dvakrát, 20.

(Vím, že nic nevím.)

- Kombinatorická_pravidla_Poznej.pdf

Moravský kras

	A	B	C
1	60	120	384
2	23	25 000 s	6 720
3	720	Banánový muffin.	3 024

- Variace_bez_opakování_test.pdf

1) ne; 2) ano; 3) 1 413 720; 4) 336; 5) 210; 6) 36; 7) 294; 8) 210; 9) 32; 10) 5 520.

- Permutace_bez_opakování_hra.pdf

Všech pořadí jejich vystoupení, 5 040.

Všech pořadí, v nichž vystupuje Marťa po Evči, 2 520.

Všech pořadí, v nichž vystupuje Marťa ihned po Evči, 720.

Všech pořadí, v nichž Eliška a Ája nechtějí vystupovat po sobě, 3 600.

Všech pořadí, v nichž vystoupí nejdříve všechny dívky a pak všichni chlapci, 240.

(Člověk mnoho vydrží, má-li cíl.)

- Kombinace_bez_opakování_Poznej.pdf

Slavkov u Brna

	A	B	C
1	896	38 798 760	43 758
2	5 720	14	420
3	660	126	325

- Variace_a_kombinace_hra.pdf

$K(2, n) = 990, n = 45. V(2, n) = 992, n = 32.$

$K(2, n + 4) = K(2, n) + 30, n = 6. V(2, n + 5) = V(2, n) + 1170, n = 115.$

$K(2, n + 15) = 3 \cdot K(2, n), n = 21. 10 \cdot V(2, n - 27) = V(2, n), n = 40.$

$3 \cdot K(2, n - 4) = K(2, n), n = 10. V(n, 3) = 5 \cdot V(n, 2), n = 7.$

(I cesta dlouhá tisíc mil začíná prvním krokem.)

- Kombinatorika_bez_opakování_1_hra.pdf

$6 \cdot V(2, 10) - P(4) = 516; 2 \cdot V(3, 5) - 3 \cdot V(2, 4) = 84;$

$V(4, 4) - P(4) + V(2, 3) = 6; 4 \cdot P(2) + 8 \cdot V(1, 7) - V(2, 5) = 44;$

$V(3, 7) - 2 \cdot K(2, 5) = 190; 3 \cdot K(3, 5) - P(5) + K(25, 2) = 210;$

$K(1, 6) - K(4, 4) + \binom{3}{2} = 8; 2 \cdot V(2, 10) - \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1} = 171$

(Musíš se mnoho učit, abys poznal, že málo víš.)

- Kombinatorika_bez_opakování_2_Riskuj.pdf

	Permutace	Variace	Kombinace
100	15!	$\frac{90!}{4!86!}$	$\binom{90}{3}$
200	8!	$\frac{7!}{2!5!} - \frac{6!}{2!4!}$	$\binom{12}{5} + \binom{12}{4} \binom{3}{1}$
300	6! - 5!	17	$\binom{11}{5} + 2 \binom{11}{4}$
400	4!(2!3!4!5!)	$\frac{2 \cdot 18!}{5!13!}$	$\binom{18}{3} - \binom{5}{3} + 1$

- Variace_s_opakováním_Poznej.pdf

Vranov nad Dyjí

	A	B	C
1	16 900	$26^2 \cdot 10^4$	180
2	126	2 250	13
3	10 000	650	4^2

- Permutace_s_opakováním_Poznej.pdf

Petrovy kameny

	A	B	C
1	1 260	10 080	1 024
2	60	56	5
3	192	60 480	31

- Kombinace_s_opakováním_test.pdf

1) 11; 2) 3 276; 3) 3 003; 4) 99 225; 5) 817 180; 6) 2 002; 7) 30; 8) 289 575; 9) 6; 10) 10.

- Kombinatorika_s_opakováním_1_hra.pdf

$$V'(3, n+1) - n \cdot V'(2, n-1) = 61 + 7n, n = \{4\};$$

$$V'(2, n+1) + V'(3, 2) = 17, n = \{2\};$$

$$V'(3, n+1) - n \cdot V'(2, n+1) = 36, n = \{5\};$$

$$K'(2, n) + K'(2, n+1) = 4, n = \{1\};$$

$$K'(2, n) = K'(2, n+1) - 4, n = \{3\};$$

$$K'(2, n) + K'(2, n-3) - K'(2, n-1) = 12, n = \{6\};$$

$$P'(n, 2) - P'(n-1, 2) = 8, n = \{7\};$$

$$P'(n, 3) - P'(n-4, 3) - P'(n+1, 1) = 120, n = \{8\}.$$

(Vše, co je v člověku krásné, je očima neviditelné.)

- Kombinatorika_s_opakováním_2_Riskuj.pdf

	Permutace	Variace	Kombinace
100	12 600	$V'(5, 3)$	286
200	560	1 491	$\binom{15}{5} \binom{17}{5}$
300	$3P'(2, 1, 1)$	60	817
400	34	1 000	30

- Kombinatorika_vše_Riskuj.pdf

	A	B	C
100	56	117 600	3^8
200	27	22	$n = \{3\}$
300	120	$\binom{8}{2} \frac{16!}{8!2!2!}$	0
400	231	210	$n = \{4, 5\}$

- Počítáme_s_faktoriály_test.pdf

1) ne; 2) ne; 3) $(\frac{2}{3})!, \sqrt{2}!, 3,2!$; 4) 70; 5) $1/42$; 6) $A > B$; 7) $n + 1$.

- Počítání_s_kombinačními_čísly_test.pdf

1) $\binom{6}{9}, \binom{2}{-1}, \binom{7}{\sqrt{2}}$; 2) $\binom{27}{27}, \binom{8}{8}$; 3) $\binom{12}{5}, \binom{12}{7}$; 4) $\binom{21}{3}, \binom{21}{18}$; 5) 0; 6) $x = \{5\}$; 7) $x = \{5\}$.

- Faktoriály_a_kombinační_čísla_Poznej.pdf

Milotice

	A	B	C
1	$\frac{1}{n^2-5n+6}$	$\binom{4}{1}$	840
2	$2(n+1)$	$n = \{4\}$	$\binom{n+1}{2}$
3	$(2n-1)^2$	$\{[8; 6]\}$	120

- Binomická_věta_1_hra.pdf

Pátý člen binomického rozvoje $(\sqrt{5} - 1)^6$, 75.

Třetí člen binomického rozvoje $\left(-i + \frac{1}{3}\right)^7$, $-7i/3$.

Jedenáctý člen binomického rozvoje $\left(\frac{1}{5} - i\right)^{12}$, $-66/25$.

Osmý člen binomického rozvoje $(\sqrt{3} + 1)^9$, 108.

Devátý člen binomického rozvoje $(1 - \sqrt{2})^{10}$, 720.

Třetí člen binomického rozvoje $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^8$, 672.

(Naděje je poslední útěchou v neštěstí.)

- Binomická_věta_2_test.pdf

1) ne; 2) ano; 3) ano; 4) 21; 5) $29\sqrt{2} + 41$; 6) $117 - 44i$; 7) 70; 8) čtvrtý; 9) první, třetí, pátý, sedmý; 9) $\sqrt[3]{2}$.

5.2 Pravděpodobnost

- Pravděpodobnosti_jevů_1_test.pdf

1. a) $\frac{\binom{17}{5}}{\binom{20}{5}}$; 1. b) $\frac{\binom{17}{4}\binom{3}{1}}{\binom{20}{5}}$; 1. c) $\frac{\binom{17}{2}}{\binom{20}{5}}$; 2. a) 0,0478; 2. b) 0,3687.

- Pravděpodobnosti_jevů_2_hra.pdf

Bude násobkem pěti, $1/5$. Bude násobkem sedmi, $7/50$.

Nebude násobkem pěti, $4/5$. Nebude násobkem sedmi, $43/50$.

Bude násobkem pěti a současně sedm, $1/50$.

Bude násobkem pěti nebo sedmi, $8/25$.

Nebude násobkem pěti a současně nebude násobkem sedmi, $17/25$.

Nebude násobkem pěti nebo nebude násobkem sedmi, $49/50$.

(Smích chytré lidi léčí. A jen blbce uráží.)

- Pravděpodobnosti_jevů_3_hra.pdf

Na obou kostkách padne šestka; $1/36$.

Na obou kostkách padne liché číslo; $1/4$.

Alespoň na jedné kostce padne liché číslo; $3/4$.

Bude součet bodů na kostkách 5; $1/9$.

Bude součet bodů na kostkách menší než 5, $1/6$.

(Na světě nejsou nejkrásnější věci, ale okamžiky.)

- Věty_o_pravděpodobnosti_1_test.pdf

1. a) 0,19; 1. b) 0,81; 2. a) 0,66; 2. b) 0,51; 3. a) $\frac{\binom{7}{4} + \binom{10}{4}}{\binom{17}{4}}$; 3. b) $\frac{10\binom{7}{3} + \binom{7}{4}}{\binom{17}{4}}$.

- Věty_o_pravděpodobnosti_2_Poznej.pdf

Skalní útvar Hřebenáč

	A	B	C
1	0,1087	Čtyři hody jednou kostkou.	$\frac{\binom{28}{8} + \binom{4}{1}\binom{28}{7}}{\binom{32}{8}}$
2	$\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{4}}{\binom{10}{6}}$	$\frac{25\binom{6}{2}}{\binom{31}{3}}$	0,815
3	$1/4$	0,8379	4

- Nezávislé_jevy_hra.pdf

$P(A \cap B')$, $1/3$; $P(A \cup B)$, $5/6$; $P(A | B)$, $2/3$; $P(B' | A)$, $1/2$; $P(A \cup B)'$, $1/6$.

(Dřív rozbiješ atom, než pomluvu.)

- Binomické_rozdělení_hra.pdf
Zasáhne terč právě dvakrát; 0,441.
Zasáhne terč právě dvakrát, a to dvěma po sobě jdoucími střelami; 0,294.
Zasáhne terč nejvýše jednou; 0,216.
Nezasáhne terč ani jednou; 0,027.
(Trpělivost je hradbou moudrého.)

- Binomické_rozdělení_a_nezávislé_pokusy_Poznej.pdf

Meandr řeky Dyje

	A	B	C
1	0,59	0,504	0,18
2	$\frac{18}{80} + \frac{20}{80}$	0,363	0,886
3	0,00729	0,76	0,9045

- Podmíněná_pravděpodobnost_test.pdf
1) 0,195; 2) 0,479; 3) 1/3; 4) 1/50; 5) 4/19.
- Pravděpodobnost_Riskuj.pdf

	A	B	C
100	0,88	0,20	0,137
200	0,47	0,63	35/36
300	8/15	0,35	2/3
400	0,36	$\frac{2!3!4!5!}{15!}$	19/33

5.3 Statistika

- Statistický_soubor_jednotka_znak_hra.pdf
Množina všech objektů statistického pozorování; statistický soubor.
Prvek množiny všech objektů statistického pozorování; statistická jednotka.
Počet všech objektů prvku statistického souboru; rozsah souboru.
Společná vlastnost statistických prvků, jejíž proměnlivost je předmětem statistického zkoumání; statistický znak.
Znak, jehož hodnoty se liší číselnou velikostí; kvantitativní znak.
Znak, jehož hodnoty se liší kvalitou; kvalitativní znak.
(Někdy i žít je statečným činem.)

- Statistika_a_rozdělení_četností_test.pdf
1) Popisná statistika; 2) ne; 3) sloupkový diagram; 4. histogram; 5) 36 minut.
- Charakteristiky_polohy_1_hra.pdf
Modus známek; 1. Nejvyšší počet kreditů; 8. Medián známek; 1,5.
Medián počtu kreditů; 5. Aritmetický průměr známek; 2.
Vážený průměr známek; 2,11.
(Největší potupa je, když člověka pochválí blbec.)
- Charakteristika_polohy_2_test.pdf
1) nelze určit; 2) klesne o 400 Kč; 3) 17%; 4) 73,2 °C; 5) Z daných informací nemůžeme jednoznačně rozhodnout, jestli kamarádi měřili se stejnou přesností; 6) 12%; 7) 22,86 t/ha; 8) 3,5 hodin; 9) 12 sekund; 10) $\text{Med}(x) = 0,99$ kg a $\text{Mod}(x) = 0,95$ kg.
- Charakteristiky_variability_a_korelace_test.pdf
1) Směrodatná odchylka; 2) ano; 3) Variační koeficient; 4) Z daných informací nemůžeme jednoznačně rozhodnout, jestli kamarádi měřili se stejnou přesností; 5) Koeficient korelace; 6) ne; 7) Mezi znaky x a y není významná závislost; 8) Mezi znaky x a y je silná lineární závislost, přičemž růstu znaku x odpovídá pokles znaku y ; 9) Aritmetické průměry a směrodatné odchylky obou znaků.
- Práce_s_daty_Poznej.pdf

Buchlovice

	A	B	C
1	20	167 cm	945
2	100	Prodejna E	o 250 více
3	20 %	978 Kč	60 Kč

- Statistika_Riskuj.pdf

	A	B	C
100	22 %	$\text{Mod}(x) = 9,$ $\text{Med}(x) = 8$	249,7 g
200	3,8 %	rozptyl	Mezi znaky x a y neexistuje žádná lineární závislost.
300	48 minut	nezmění se	Více než 60 % žáků má známku horší než 2.
400	5,53 %	16	Mezi znaky x a y je středně silná lineární závislost, přičemž růstu znaku x odpovídá pokles znaku y .

5.4 Příklady pro hlavy mazané

Tato podkapitola se věnuje příkladům ze souboru `Kombinatorika_a_pravděpodobnost.pdf`. Příklady jsou určeny pro nadané žáky. Správná řešení jsou doprovázena krátkými komentáři k postupu řešení.

Příklad 1

Rozdělíme všechna vyhovující rozesazení cestujících do dvou skupin podle toho, zda Honzíček s Leničkou sedí ve směru, respektive proti směru jízdy vlaku. Nejprve uvažujme situaci, kdy Honzíček a Lenička sedí ve směru jízdy. Dvě dámy, které chtějí sedět ve směru jízdy, můžeme rozesadit $2!$ způsoby, zbývající tři cestující si mohou sednout libovolně na čtyři sedadla proti směru jízdy, to je $3! \binom{4}{3}$ způsoby. Počet možností je $2!3! \binom{4}{3}$. Nyní uvažujme situaci, kdy Honzíček s Leničkou sedí proti směru jízdy. Dvě dámy, které chtějí sedět ve směru jízdy, můžeme rozesadit $2! \binom{4}{2}$ způsoby, na zbylá čtyři místa si mohou zbývající tři cestující sednout libovolně, to je $3! \binom{4}{3}$ způsoby. Počet možností je $2!3! \binom{4}{2} \binom{4}{3}$. Užitím kombinatorického pravidla součtu získáme celkový počet usazení cestujících

$$2!3! \binom{4}{3} + 2!3! \binom{4}{2} \binom{4}{3} = 336.$$

Příklad 2

Slovo RÁKOSNÍČEK obsahuje 4 samohlásky a 6 souhlásek. Pro určení umístění samohlásek máme $\binom{10}{4}$ způsobů, zbývající volná místa jsou určena pro souhlásky jednoznačně. Pořadí samohlásek je pevně dáno abecední pořádkem a pořadí souhlásek lze určit $P'(2, 1, 1, 1, 1) = \frac{6!}{2!}$. Užitím kombinatorického pravidla součinu získáváme celkový počet možných slov

$$\frac{6!}{2!} \binom{10}{4} = 75\,600.$$

Příklad 3

Krotitel musí mezi každé dva tygry umístit lva, předpokládáme tedy, že $n \geq m - 1$. Je-li $n < m - 1$, počet možných seřazení tygrů a lvů je 0. Předpokládejme, že $n \geq m - 1$. Nejprve mezi každé dva tygry umístíme jednoho lva a zůstane nám $n - (m - 1) = n - m + 1$ lvů na další umístění. Nyní budeme považovat tygra a jeho následujícího lva za jeden prvek, poslední tygr nemá žádného následujícího lva. Díky této úvaze můžeme zbylé lvy doplnit libovolně a nijak nebude narušeno předepsané pořadí šelem. Počet možností je $\binom{m+(n-m+1)}{n-m+1} = \binom{n+1}{n-m+1}$. Rozlišujeme-li jednotlivé šelmy, celkový výsledek je

$$n!m! \binom{n+1}{n-m+1}.$$

Příklad 4

Příklad vyřešíme převedením posazených rytířů v kruhu na posloupnost. Pevně si zvolíme rytíře číslo 1, po směru hodinových ručiček každému rytíři

přiřadíme číslo až do $2n$. Rozlišujeme dvě situace podle toho, zda rytíř číslo 1 na výpravu jede či nikoliv. Každému rytíři jedoucímu na výpravu pro princeznu připojíme jednoho rytíře před ním, který zůstává doma. Rytíř číslo 1 nejede zachránit princeznu, po spárování budeme za prvního rytíře řadit $2n - 1 - r$ rytířů. V tomto případě máme $\binom{2n-1-r}{r}$ možností výběru r zachránců. Rytíř číslo 1 jede zachránit princeznu, na pozici $2n$ stojí rytíř, který zůstává doma. Po spárování budeme za prvního rytíře řadit $2n - 2 - (r - 1)$ rytířů, a protože máme již jednoho zachránce vybraného, zbylo $r - 1$ volných míst pro zachránce. V tomto případě máme $\binom{2n-1-r}{r-1}$ možností výběrů zachránců princezny. Použitím kombinatorického pravidla součtu získáváme výsledek

$$\binom{2n-1-r}{r} + \binom{2n-1-r}{r-1}.$$

Příklad 5

Výběr míst pro sudé cifry lze provést $\binom{2n}{n}$ způsoby a umístění lichých cifer je již jednoznačně určeno. Na každou vybranou pozici lze umístit některou z pěti sudých cifer nebo některou z lichých cifer, celkem máme $5^n \cdot 5^n = 5^{2n}$ způsobů výběrů cifer. Užitím kombinatorického pravidla součinu získáváme $5^{2n} \binom{2n}{n}$ možností k sestavení $2n$ -ciferných přirozených čísel. Avšak jsou zde započítána i čísla začínající cifrou 0. Počet cifer začínajících nulou je $5^{2n-1} \binom{2n-1}{n-1}$. Celkový počet $2n$ -ciferných přirozených čísel je

$$5^{2n} \binom{2n}{n} - 5^{2n-1} \binom{2n-1}{n-1}.$$

Příklad 6

Nejdříve vyřešíme počet všech možných jevů. Ze čtyř klobouků vytváříme uspořádané čtveřice a to lze $4!$ způsoby.

- Žádný klobouk nesmí být správně umístěn, takže prvnímu kabátu lze přiřadit 3 klobouky, které k němu nepatří, druhému kabátu lze přiřadit také 3 klobouky, které k němu nepatří, zbylé dva klobouky jsou určeny jednoznačně s ohledem na naši podmínku. Počet umístění čtyř klobouků tak, aby žádný nebyl správně umístěn je $3 \cdot 3 = 9$. Pravděpodobnost tohoto jevu je $P(A) = \frac{3}{8}$.
- Ze čtyř klobouků vybereme jeden, který správně umístíme, to jsou $\binom{4}{1} = 4$ výběry klobouku. Zbylé tři klobouky musíme umístit špatně. Umístíme-li špatně první klobouk, máme 2 možnosti, umístění zbylých dvou klobouků je již jednoznačně dáno. Použitím kombinatorického pravidla součinu získáváme $4 \cdot 2 = 8$ možností umístění právě jednoho klobouku. Pravděpodobnost tohoto jevu je $P(B) = \frac{8}{4!} = \frac{1}{3}$.
- Ze čtyř klobouků vybere dva, které správně umístíme, to je 6 výběrů klobouku. Zbývající dva klobouky lze umístit jedním způsobem, aby

splňovaly podmínku špatného umístění. Pravděpodobnost tohoto jevu je

$$P(C) = \frac{\binom{4}{2}}{4!} = \frac{1}{4}.$$

- d) Jsou-li tři klobouky správně umístěny, kam špatně umístíme čtvrtý klobouk? Taková situace nemůže nastat. Pravděpodobnost tohoto jevu je $P(D) = 0$.
- e) Pouze v jednom případě jsou všechny klobouky správně umístěny, pravděpodobnost tohoto jevu je $P(E) = \frac{1}{4!}$.

Příklad 7

Označme $P(N)$... pravděpodobnost, že dva lidé z n -členné skupiny mají narozeniny ve stejný den a $P(\bar{N})$ pravděpodobnost, že dva lidé z n -členné skupiny nemají narozeniny ve stejný den. Platí $P(N) = 1 - P(\bar{N})$. Nejdříve určíme $P(\bar{N})$. První člověk může mít narozeniny libovolný den v roce, pravděpodobnost, že druhý člověk bude mít narozeniny v jiný den než první člověk, je $\frac{364}{365}$, pravděpodobnost, že třetí člověk bude mít narozeniny v jiné dny než první a druhý, je $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$, ..., pravděpodobnost, že n -tý člověk bude mít narozeniny v jiný den než předchozích $(n-1)$ lidí, je $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365 - (n-1)}{365}$. Tento zlomek upravíme tak, že čitatele i jmenovatele vynásobíme $(365 - n)!$.

$$P(\bar{N}) = \frac{364 \cdot 363 \cdots (365 - n + 1)}{365^n} \cdot \frac{(365 - n)!}{(365 - n)!} = \frac{365!}{365^n (365 - n)!}.$$

Pro $P(N)$ tedy platí

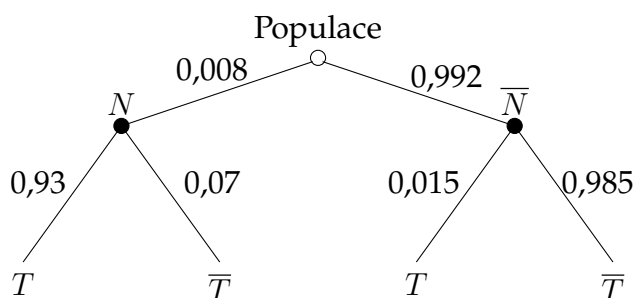
$$P(N) = 1 - P(\bar{N}) = 1 - \frac{365!}{365^n (365 - n)!}.$$

Dále víme, že $P(N)$ je alespoň 50 %, což splňuje $n = 23$. Je-li ve třídě 23 žáků, je 50 % pravděpodobnost, že dva budou mít narozeniny ve stejný den.

Příklad 8

K řešení tohoto příkladu použijeme podmíněnou pravděpodobnost a pro přehlednost si sestavíme následující schéma, v němž použijeme následující označení:

N ... pacient trpí nemocí T ... test na protilátky je pozitivní
 \bar{N} ... pacient nemocí netrpí \bar{T} ... test na protilátky je negativní



První řádek ve schématu vyjadřuje pravděpodobnost výskytu daného stavu (pacient je/není nemocen), druhý řádek vyjadřuje podmíněnou pravděpodobnost, výsledek testu za předpokladu daného stavu. Počítáme-li „daný stav“ a zároveň „výsledek testu“, použijeme větu o násobení pravděpodobností, neboť se jedná o jevy nezávislé.

$$P(N \cap T) = 0,008 \cdot 0,93 = 0,00744$$

$$P(\bar{N} \cap T) = 0,992 \cdot 0,015 = 0,01488$$

$$P(N \cap \bar{T}) = 0,008 \cdot 0,07 = 0,00056$$

$$P(\bar{N} \cap \bar{T}) = 0,992 \cdot 0,985 = 0,97712$$

Pravděpodobnost, že určitá osoba, jejíž test byl pozitivní, skutečně onu nemoc má, zjistíme z podmíněné pravděpodobnosti

$$P(N|T) = \frac{P(N \cap T)}{P(T)},$$

kde $P(T)$ určíme ze vzorce pro celkovou pravděpodobnost:

$$P(T) = P(N \cap T) + P(\bar{N} \cap T) = 0,02232.$$

Tedy $P(N|T) = \frac{0,00744}{0,02232} = \frac{1}{3}$. Pravděpodobnost, že osoba, jejíž test byl pozitivní, skutečně onu nemoc má, je $33,3\%$.

5.5 Statistický výzkum

V této podkapitole se věnujeme správnému řešení úkolů ze souboru `Statistický_výzkum.pdf`. Součástí jsou data obsažená v `Statistický_výzkum_data.xlsx`, které je nutné zpracovat v MS Excelu. Řešení obsahuje tabulky a grafy vytvořené v MS Excelu.

Úkol 1

Hodnoty statistického znaku ŠKOLA se liší kvalitou, jde o příklad kvalitativního znaku.

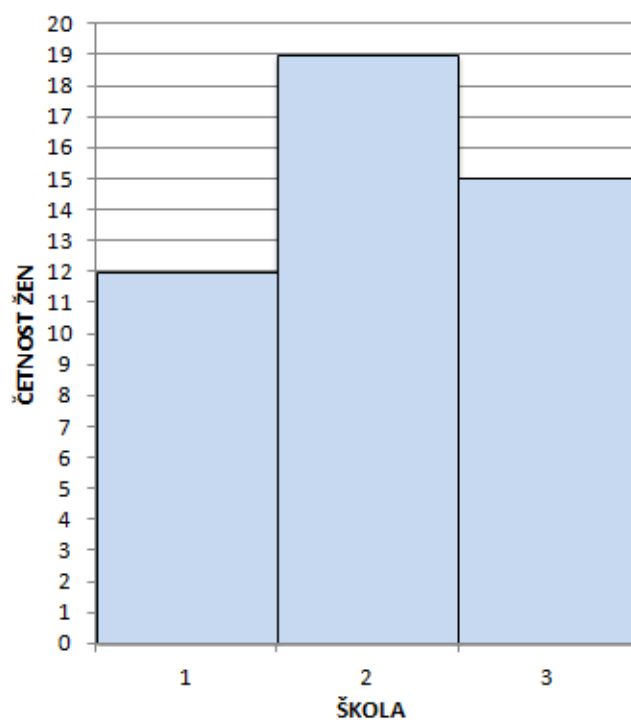
ŠKOLA	Absolutní četnost	Relativní četnost (%)
1	33	0,33
2	38	0,38
3	29	0,29
Součet	100	1

Obr. 5.1: Tabulka rozdělení četností statistického znaku ŠKOLA.

Úkol 2

ŠKOLA	Absolutní četnost
1	12
2	19
3	15
Součet	46

Obr. 5.2: Tabulka rozdělení četností žen podle typu škol.

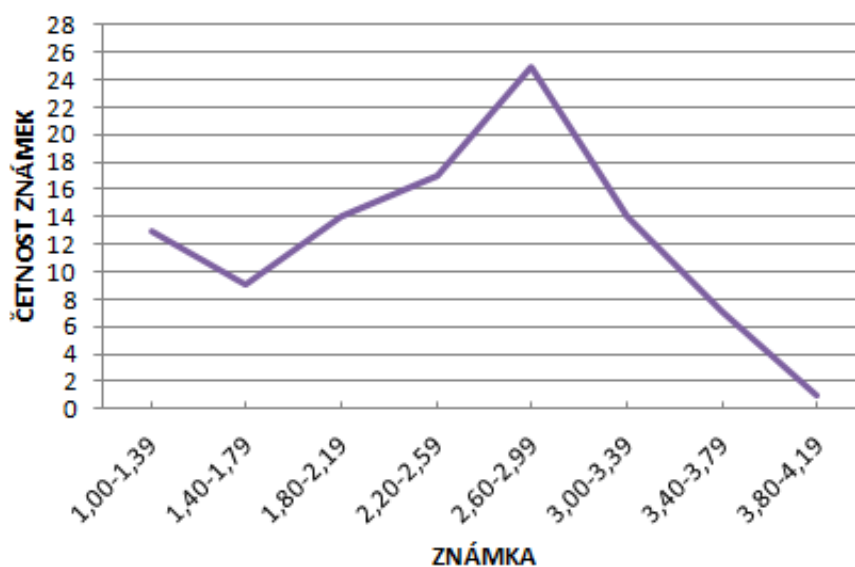


Obr. 5.3: Histogram rozdělení četností žen podle typu škol.

Úkol 3

ZNÁMKA	Absolutní četnost
1,00-1,39	13
1,40-1,79	9
1,80-2,19	14
2,20-2,59	17
2,60-2,99	25
3,00-3,39	14
3,40-3,79	7
3,80-4,19	1
Součet	100

Obr. 5.4: Tabulka intervalového rozdělení četností znaku ZNÁMKA.



Obr. 5.5: Polygon intervalového rozdělení četností znaku ZNÁMKA.

Úkol 4

Medián statistického znaku IQ je 109 a modus stejného znaku 105.

Medián je prostřední hodnota statistického znaku, jsou-li hodnoty uspořádány podle velikosti. Jinými slovy půlí uspořádané hodnoty statistického znaku. Modus je hodnota s nejvyšší četností.

Úkol 5

ŠKOLA	Průměrná známka
1	2,47
2	2,41
3	2,33

Obr. 5.6: Průměr statistického znaku ZNÁMKA dle typu škol.

Úkol 6

Po zaokrouhlení na dvě desetinná místa směrodatná odchylka statistického znaku IQ je 10,87 a variační koeficient 9,82.

Po zaokrouhlení na dvě desetinná místa směrodatná odchylka statistického znaku ZNÁMKA je 0,72 a variační koeficient 29,75.

Směrodatná odchylka charakterizuje variabilitu znaku v týchž jednotkách měření, v jakých jsou dány hodnoty znaku. Variační koeficient charakterizuje variabilitu znaku bezrozměrným číslem v procentech.

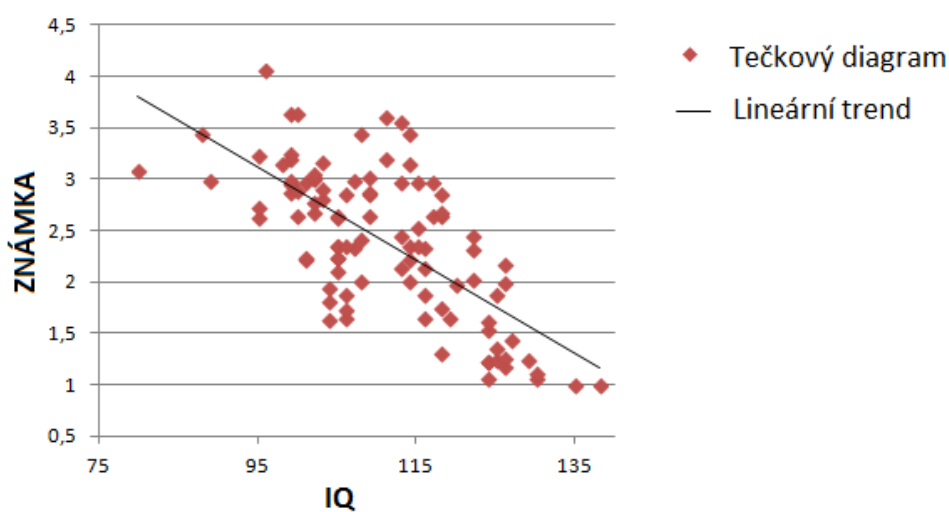
Úkol 7

Maximální hodnota statistického znaku IQ je 138 a minimální hodnota 80.

Maximální hodnota statistického znaku ZNÁMKA je 4,06 a minimální hodnota 1,00.

Úkol 8

Po zaokrouhlení na dvě desetinná místa variační koeficient znaků IQ a ZNÁMKA je $-0,69$. Mezi statistickými znaky IQ a ZNÁMKA existuje mírně silná nepřímá lineární závislost. V grafickém znázornění dvourozměrným tečkovým diagram lze očekávat tvar podobající se klesající lineární funkci.



Obr. 5.7: Dvourozměrný tečkový diagram znaků IQ a ZNÁMKA.

Závěr

Touto prací vznikly interaktivní výukové materiály z kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky pro střední školy pomocí pdfLaTeXu a nástavbových balíčků AcroTeX, dps, jeopardy, ocgx, pdfscreen a beamer. Celkem bylo vytvořeno 11 výukových prezentací, 11 interaktivních testů, 12 párovacích her, 5 her Riskuj! a 8 her Poznej! Materiály obsahují 122 příkladů z kombinatoriky, 56 z pravděpodobnosti a 69 ze statistiky. Příklady byly čerpány z nejrůznějších sbírek a zdrojů, jež jsou všechny uvedeny v seznamu použité literatury. Příklady byly ze zdrojů převzaty, byla jim modifikována zadání, byly změněny číselné hodnoty či byly vymyšleny. Dále byly výukové materiály doplněny příklady z kombinatoriky a pravděpodobnosti pro nadané žáky a úkoly ze statistiky pro práci MS Excelem.

Dále tato práce nabízí popis balíčku ocgx, který doposud v češtině nebyl popsán. Přínosem je i správné zobrazování českých znaků s diakritikou v interaktivních testech a v tajenkách párovacích her. K tomu bylo použito oktál-kódování v UTF-16BE Unicode RNDr. Petra Olšáka.

V této práci se nevyskytuje velké množství řešených příkladů z kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky. Cílem práce nebylo vytvořit sbírku řešených příkladů, kterých k těmto tematickým celkům existuje nepřehledné množství.

Cílem vytvořených výukových materiálů je zpestřit výuku matematiky na středních školách a přiblížit tak žákům tematické celky kombinatorika, pravděpodobnost a statistika. Vytvořené materiály mohou používat pedagogové ve svých hodinách, ale i žáci ke svému samostudiu.

Tato práce má být inspirací pedagogům, aby si sami tvořili interaktivní výukové materiály zcela zdarma a snadno pomocí pdfLaTeXu a jeho balíčků. Tímto způsobem nemusí být vytvářeny materiály pouze pro matematiku.

Příloha

Definice navigační lišty (viz Vzorové_pdfscreen.pdf):

```
\usepackage[screen, rightpanel, blue, czech]{pdfscreen}

\def\NavigationPanel{\normalsfcodes%
\vspace*{20pt}
\centering\null\vspace*{10pt}
\includegraphics[width=1cm]{emblema}\par\vspace*{15pt}
\Acrobatmenu{FirstPage}{\addButton{\smallbuttonwidth}
{\FBlack\scalebox{.8}[1.4]{\bt1\bt1}}}\hspace*{-2pt}
\Acrobatmenu{LastPage}{\addButton{\smallbuttonwidth}
{\LBlack\scalebox{.8}[1.4]{\rtl\rtl}}}\vfill
\Acrobatmenu{PrevPage}{\addButton{\smallbuttonwidth}
{\FBlack\scalebox{.8}[1.4]{\bt1}}}\hspace*{-2pt}
\Acrobatmenu{NextPage}{\addButton{\smallbuttonwidth}
{\LBlack\scalebox{.8}[1.4]{\rtl}}}\vfill
\Acrobatmenu{GoToPage}{\addButton{\buttonwidth}
{Strana\space\textcolor{red}{\thepage}\space{z}\space
\textcolor{red}{\ScreenLastPage}}}\pfill
\Acrobatmenu{Quit}{\addButton{\buttonwidth}{Konec}}\vfill
\vspace*{30pt}}
```

Evaluační dotazník pro výuku s Interaktivními výukovými materiály

Název školy:

Název vyučovací jednotky:

Datum: Třída:

1. Už jste někdy pracoval/a s interaktivními výukovými materiály? Pokud ano, s jakými, kdy a v jakém vyučovacím předmětu?

.....
.....
.....
.....

2. Ohodnoťte náročnost výuky dle nabídnuté hodnotící škály:

velice snadné snadné přiměřeně náročné obtížné velice obtížné

3. Byla zadání všech úkolů srozumitelná? Pokud ne, blíže specifikujte.

.....
.....
.....

4. Zaujala Vás výuka matematiky pomocí IVM?

rozhodně ano asi ano nevím ani ne rozhodně ne

5. Co byste změnil/a?

.....
.....
.....

6. Byla pro Vás výuka s využitím IVM přínosná?

rozhodně ano asi ano nevím ani ne rozhodně ne

7. Uvítal/a byste výuku matematiky na střední škole pomocí IVM?

rozhodně ano občas nevím zřídka rozhodně ne

Děkuji za pečlivost a čas, který byl věnován dotazníku!

Kateřina Rebendová

Seznam použité literatury

- [1] BUDÍKOVÁ, Marie, Štěpán MIKOLÁŠ a Pavel OSECKÝ. *Popisná statistika*. 4. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2007, 48 s. ISBN 978-80-210-4246-9.
- [2] BUDÍKOVÁ, Marie, Štěpán MIKOLÁŠ a Pavel OSECKÝ. *Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika: sbírka příkladů*. 3. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2004, 116 s. ISBN 80-210-3313-4.
- [3] BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 3. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2002, 631 s. ISBN 807196140x.
- [4] CALDA, Emil a Václav DUPAČ. *Matematika pro gymnázia: kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2012, 170 s. ISBN 978-80-7196-365-3.
- [5] Cizlerová, Michaela a Martina KVĚTOŇOVÁ. *Matematika pro střední školy: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika – Průvodce pro učitele*. 1. vyd. Brno: Didaktis, 2012, 224 s. ISBN 978-80-7358-198-5.
- [6] CRILLY, Tony. *Matematika: 50 myšlenek, které musíte znát*. 1. Vyd. Praha: Slovart, 2010, 208 s. ISBN 978-80-7391-409-7.
- [7] HERMAN, Jiří, Radan KUČERA a Jaromír ŠIMŠA. *Metody řešení matematických úloh II*. 3. přeprac. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2004, 355 s. ISBN 80-210-3569-2.
- [8] HORENSKÝ, Radek, Ivana JANŮ, Martina KVĚTOŇOVÁ, Hana LUKŠOVÁ a Rita VÉMOLOVÁ. *Matematika pro střední školy: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 1. vyd. Brno: Didaktis, 2015, 2 svazky (88; 96 stran). ISBN 978-80-7358-238-8.
- [9] HUDCOVÁ, Milada a Libuše KUBIČÍKOVÁ. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2007, 415 s. ISBN 978-80-7196-318-9.
- [10] CHRISTIE, Agatha. *Kapsa plná žita*. 3. vyd. Praha: Knižní klub, 2009, 224 s. ISBN 978-80-242-2458-9.
- [11] JACKSON, Tom a Richard BEATTY. *Matematika: 100 objevů, které změnily historii*. Praha: Slovart, 2013, 144 s. ISBN 978-80-7391-770-8.

- [12] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 287 s. ISBN 80-7196-099-3.
- [13] RIEČAN, Beloslav a Zdena RIEČANOVÁ. *O pravděpodobnosti*. 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1976, 101 s.
- [14] SÝKORA, Václav. *Matematika: sbírka úloh pro společnou část maturitní zkoušky: vyšší obtížnost*. 1. vyd. Praha: Tauris, 2001, 112 s. ISBN 80-211-0397-3.
- [15] SÝKORA, Václav. *Matematika: sbírka úloh pro společnou část maturitní zkoušky: základní obtížnost*. 1. vyd. Praha: Tauris, 2001, 96 s. ISBN 80-211-0400-7.
- [16] VRBA, Antonín. *Kombinatorika*. 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1980, 130 s.
- [17] BŘÍZOVÁ, Jana. *Interaktivní výukové materiály v PDF formátu – Diferenciální počet funkcí více proměnných* [online]. [cit. 2015-08-31]. Diplomová práce, Brno, Masarykova univerzita, 2015. Dostupné z: https://is.muni.cz/auth/th/369783/prif_m/DP_Brizova_Jana_369783.pdf.
- [18] FIEDOR, David. *Statistika na střední škole* [online]. [cit. 2015-08-31]. Bakalářská práce, Brno, Masarykova univerzita, 2010. Dostupné z: https://is.muni.cz/auth/th/269830/prif_b/Bakalarska_prace_-_Statistika_na_stredni_skole.pdf?lang=cs.
- [19] MAŘÍK, Robert. *Interaktivní matematika* [online]. 2015 [cit. 2015-08-31]. Dostupné z: http://user.mendelu.cz/marik/wiki/doku.php?id=interaktivni_matematika.md#matematicke_hry.
- [20] MAŘÍK, Robert, Roman PLCH a Petra ŠARMANOVÁ. *Tvorba interaktivních testů pomocí systému AcroTeX* [online]. 2010 [cit. 2015-08-31]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/prirucka_acrotex.pdf.
- [21] Kolektiv autorů. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. [cit. 2015-12-12]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/uploads/soubory/PDF/RVPG_2007_06_final.pdf.
- [22] LITSCHMANNOVÁ, Martina. *Vybrané kapitoly z pravděpodobnosti (interaktivní učební text) – Řešené příklady* [online]. [cit. 2015-08-31]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/resene_priklady_pravdepodobnost.pdf.
- [23] OLŠÁK, Petr. *PDFuni – akcenty v PDF záložkách* [online]. [cit. 2016-02-15]. Dostupné z: <http://petr.olsak.net/ftp/olsak/opmac/pdfuni-article.pdf>.
- [24] OTIPKA, Petr a Vladislav ŠMAJSTRLA. *Pravděpodobnost a statistika* [online]. Ostrava 2006 [cit. 2015-08-31]. Dostupné z: <https://homen.vsb.cz/~oti73/cdpast1/>.

- [25] PAVLAS, Jan. *Interaktivní hry a testy pro výuku předmětu Matematická analýza I.* [online]. [cit. 2015-10-23] Bakalářská práce, Ostrava, Technická univerzita Ostrava, 2010. Dostupné z: <http://www.fe.i.vsb.cz/export/sites/fe.i/k470/cs/theses/bakalari/2010/pdfs/pav569.pdf>.
- [26] ROSKOVEC, Tomáš. *Kombinatorika na želvách.* [online]. [cit. 2015-10-23]. Dostupné z: <http://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/anotace/roskovec.pdf>
- [27] SONTA, Filip. *Tvorba párovacích her na webu a v PDF formátu* [online]. [cit. 2015-5-23] Bakalářská práce, Brno, Masarykova univerzita, 2015. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/396082/fi_b/.
- [28] AcroT_EX. *eDucation bundle* [online]. [cit. 2015-08-31]. Dostupné z: <http://www.acrotex.net/index.php?lang=en>.
- [29] AcroT_EX. *Games* [online]. [cit. 2015-08-31]. Dostupné z: http://www.acrotex.net/games_index.php?lang=en.
- [30] ahaonline.cz: *Espézetka slaví 100 let!* [online]. 21. 5. 2006 [cit. 2015-10-10]. Dostupné z: <http://www.ahaonline.cz/clanek/ahaonline-cz/1988/espezetka-slavi-100-let.html>.
- [31] CTAN. *beamer – A L^AT_EX class for producing presentations and slides* [online]. [cit. 2015-08-31]. Dostupné z: <https://www.ctan.org/pkg/beamer>.
- [32] CTAN. *Built a jeopardy game in L^AT_EX* [online]. [cit. 2015-08-31]. Dostupné z: <https://www.ctan.org/pkg/jeopardy>.
- [33] CTAN. *ocgx – Use OCGs within a PDF document without JavaScript* [online]. [cit. 2015-11-30]. Dostupné z: <https://www.ctan.org/pkg/ocgx>.
- [34] CTAN. *pdfscreen – Support screen-based document design* [online]. [cit. 2015-11-30]. Dostupné z: <https://www.ctan.org/pkg/pdfscreen>.
- [35] e-learning. *Problém nešťastné šatnářky* [online]. 2010 [cit. 2015-12-10]. Dostupné z: <http://www.georgell.eu/matematika/pst/D13.htm>
- [36] Epoch Times: *Tajemství šifer – po stopách kryptografie a steganografie* [online]. 12. 8. 2008 [cit. 2015-10-10]. Dostupné z: <http://www.epochtimes.cz/200806125316/Tajemstvi-sifer-po-stopach-kryptografie-a-steganografie.html>.
- [37] *Kombinatorika* [online]. Prostějov 2010 [cit. 2015-08-31]. Dostupné z: <http://student21.gjwprostejov.cz/uploads/VG7%20-%20Kombinatorika.pdf>.
- [38] Matematika. *Slovní úlohy: Statistika* [online]. 2015 [cit. 2015-08-31]. Dostupné z: <http://www.hackmath.net/cz/slovni-ulohy/statistika>.

- [39] Matematika s radostí. *Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika* [online]. 2012 [cit. 2015-08-31]. Dostupné z: <http://msr.vsb.cz/kombinatorika-pravdepodobnost-a-statistika/kombinatorika>.
- [40] Metodický portál RVP. *LMS* [online]. 18. 4. 2011 [cit. 2016-03-02]. Dostupné z: http://wiki.rvp.cz/Knihovna/1.Pedagogicky_lexikon/L/LMS.
- [41] *OSP R cvičebnice: průvodce přípravou na test Obecné studijní předpoklady: základní i rozšířený*. 1. vyd. Praha: Scio, 2010, 103 s. ISBN 978-80-7430-046-2.
- [42] *OSP Z: sada 3 testů obecných studijních předpokladů z Národních srovnávacích zkoušek 2010*. 1. vyd. Praha: Scio, 2010, 68 s. ISBN 978-80-7430-040-0.
- [43] Portál Konvalinka.org *Jak zvolit správný LMS systém?* [online]. 2011 [cit. 2016-03-02]. Dostupné z: http://konvalinka.org/portal/index.php?option=com_content&view=article&id=57&Itemid=65.
- [44] Poznávací značky automobilů v Českých zemích: 2001 – dosud [online]. 2006 [cit. 2015-10-10]. Dostupné z: <http://www.feudal.cz/spz/html/2002-dosud.htm>.
- [45] *priklady.com. Matematická statistika* [online]. 2012–2015 [cit. 2015-08-31]. Dostupné z: <http://www.priklady.com/cs/index.php/pravdepodobnost-a-statistika/matematicka-statistika>.
- [46] UTF Converter [online]. [cit. 2016-02-29]. Dostupné z: <http://macchiato.com/unicode/convert.html>.
- [47] Výuka odborných předmětů u žáků se specifickými vzdělávacími potřebami. *Příklady na vážený průměr* [online]. Blatná 2012 [cit. 2015-08-31]. Dostupné z: <http://www.blek.cz/Grant/Sources/KAS/25AritmetickyPrumerRealneVahyResene1.pdf>.
- [48] *www.realisticky.cz. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika* [online]. 2010 [cit. 2015-08-31]. Dostupné z: <http://www.realisticky.cz/dil.php?id=13>.

