1 Rovnice ve dvou nezávisle proměnných

Jedná se o rovnice tvaru

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{1}$$

kde F je spojitá funkce pěti proměnných definovaná na nějaké množině $G \subseteq \mathbb{R}^5$ s neprázdným vnitřkem G°.

Klasické (silné) řešení rovnice (1) je funkce u definovaná na množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ takové, že $\bar{\Omega} = \overline{\Omega^\circ}$, která je na vnitřku množiny Ω diferencovatelná, na uzávěru množiny Ω je spojitá, a která splňuje vztahy

$$\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) \in G \quad \text{a} \quad F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = 0$$

pro všechny body (x, y) z vnitřku množiny Ω.

1.1 Lineární rovnice

Lineární rovnice je tvaru

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = g(x,y), \tag{2}$$

kde a, b, c, g jsou spojité funkce dvou proměnných definované na nějaké podmnožině prostoru $\mathbb{R}^2$, která má neprázdný vnitřek. O funkcích a, b budeme navíc předpokládat, že jsou na vnitřku svého definičního oboru nenulové.

Kdyby totiž na nějaké otevřené podmnožině A společného definičního oboru funkcí a, b, c, g byla například funkce a nulová, rovnice by na A nabyla tvaru

$$b(x,y)u_y + c(x,y)u = g(x,y)$$

a mohli bychom ji považovat za rovnici obyčejnou – proměnnou y bychom chápali jako nezávisle proměnnou, proměnnou x bychom považovali za parametr.

Pokud je funkce g na pravé straně rovnice (2) nulová, tj. pokud rovnice je tvaru

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0, \tag{3}$$

řekneme, že tato rovnice je *homogenní*. Množina řešení rovnice (3) splňuje *princip superpozice:* Lineární kombinace řešení rovnice (3) je opět řešením této rovnice. Podrobněji:

- Je-li funkce u řešením rovnice (3) a α je libovolné reálné číslo, pak také funkce αu je řešením této rovnice.

  Důkaz: Poněvadž

$$\frac{\partial(\alpha u)}{\partial x} = \alpha\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial(\alpha u)}{\partial y} = \alpha\frac{\partial u}{\partial y},$$

platí

$$a\frac{\partial(\alpha u)}{\partial x} + b\frac{\partial(\alpha u)}{\partial y} + c(\alpha u) = \alpha\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu\right) = 0.$$

□

- Jsou-li funkce u_1, u_2 řešením rovnice (3) se stejným definičním oborem, pak také funkce $u_1 + u_2$ je řešením této rovnice.

  Důkaz: Poněvadž

$$\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial y},$$

platí

$$a\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial x}+b\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial y}+c(u_1+u_2)=$$
$$=a\frac{\partial u_1}{\partial x}+b\frac{\partial u_1}{\partial y}+cu_1+a\frac{\partial u_2}{\partial x}+b\frac{\partial u_2}{\partial y}+cu_2=0+0=0.$$

□

Protože funkce $u \equiv 0$ je zřejmě řešením rovnice (3), plyne z principu superpozice, že množina všech řešení rovnice (3) definovaných na jedné množině Ω tvoří reálný vektorový prostor.

Nyní se podívejme na strukturu množiny řešení nehomogenní rovnice (2). Pro ni platí:

• Jsou-li funkce u_1 a u_2 řešením nehomogenní rovnice (2), pak jejich rozdíl je řešením homogenní rovnice (3).
Důkaz:

$$a\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x}+b\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial y}+c(u_1-u_2)=$$
$$=a\frac{\partial u_1}{\partial x}+b\frac{\partial u_1}{\partial y}+cu_1-\left(a\frac{\partial u_2}{\partial x}+b\frac{\partial u_2}{\partial y}+cu_2\right)=g-g=0.$$

□

• Je-li funkce u_N řešením nehomogenní rovnice (2), pak pro každé řešení u_H homogenní rovnice (3) je součet funkcí u_N+u_H také řešením nehomogenní rovnice (2).
Důkaz:

$$a\frac{\partial(u_N+u_H)}{\partial x}+b\frac{\partial(u_N+u_H)}{\partial y}+c(u_N+u_H)=$$
$$=a\frac{\partial u_N}{\partial x}+b\frac{\partial u_N}{\partial y}+cu_N+a\frac{\partial u_H}{\partial x}+b\frac{\partial u_H}{\partial y}+cu_H=g+0=g.$$

□

Množinu řešení nehomogenní lineární rovnice (2) tedy můžeme chápat jako afinní prostor. Přesněji, řešení nehomogenní rovnice (2) jsou body afinního prostoru, jehož zaměřením je vektorový prostor všech řešení lineární homogenní rovnice (3).

1.2 Řešení rovnice $a(x,y)u_x+b(x,y)u_y=0$

Tato rovnice je speciálním případem lineární homogenní rovnice. Představme si, že její řešení známe. Nechť tedy funkce $u=u(x,y)$ je řešením rovnice

$$a(x,y)u_x+b(x,y)u_y=0. \tag{4}$$

Tuto funkci dvou proměnných můžeme znázornit pomocí vrstevnic. Nechť vrstevnice funkce u mají parametrické vyjádření tvaru

$$\begin{aligned} x&=x(s),\\ y&=y(s), \end{aligned} \tag{5}$$

kde parametr s probíhá nějaký reálný interval I. Poněvadž funkce u je diferencovatelná, jsou její vrstevnice hladké křivky, tj. funkce $x=x(s)$, $y=y(s)$ jsou diferencovatelné. (Poznamenejme, že pokud má funkce u ostré lokální extrémy, pak v bodech těchto extrémů vrstevnice degeneruje v jediný bod; tato skutečnost však další úvahy neovlivňuje.) Na vrstevnicích platí

$$u\big(x(s),y(s)\big)=const$$

(pro libovolnou hodnotu parametru $s \in I$). Derivováním této rovnosti podle parametru dostaneme rovnost

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} u\big(x(s), y(s)\big) = \frac{\partial u\big(x(s), y(s)\big)}{\partial x} \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u\big(x(s), y(s)\big)}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s};$$

použili jsme řetězové pravidlo pro derivování složené funkce. Porovnáním s rovnicí (4) vidíme, že poslední rovnost bude splněna, pokud

$$x'(s) = \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} = a\big(x(s), y(s)\big), \quad y'(s) = \frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s} = b\big(x(s), y(s)\big).$$

Toto pozorování vede k rozhodnutí, že k parciální diferenciální rovnici (4) přiřadíme dvourozměrný autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= a(x, y), \\ y' &= b(x, y). \end{aligned} \tag{6}$$

Tento systém se nazývá *charakteristický systém příslušný k rovnici* (4), jeho trajektorie se nazývají *charakteristiky rovnice* (4). Charakteristiky jsou vrstevnicemi řešení u rovnice (4).

Dělením rovnic charakteristického systému (6) dostaneme *charakteristickou rovnici příslušnou k rovnici* (4); charakteristická rovnice má tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)} \tag{7}$$

a je to obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu. Budeme předpokládat, že tato rovnice má řešení. Poněvadž se jedná o rovnici prvního řádu, závisí její obecné řešení na jedné konstantě. Tuto konstantu osamostatníme na pravé straně rovnosti vyjadřující řešení charakteristické rovnice (7) a dostaneme

$$v(x, y) = const; \tag{8}$$

přitom v je diferencovatelná funkce definovaná na množině Ω. Tuto skutečnost můžeme vyjádřit také jinak: charakteristickou rovnici (7) přepíšeme ve tvaru

$$b(x, y)\mathrm{d}x - a(x, y)\mathrm{d}y = 0; \tag{9}$$

funkce v je tedy kmenovou funkcí diferenciálu na levé straně. Funkce v se nazývá *první integrál rovnice* (4).

První integrál rovnice (4) lze také najít eliminací parametru s v řešení charakteristického systému (6), jinak řečeno převedením parametrické rovnice křivky na rovnici obecnou. Vrstevnice řešení u parciální diferenciální rovnice (4) mají tedy implicitní vyjádření (8), konstanta na pravé straně představuje hodnotu funkce u na příslušné vrstevnici. Označme tuto hodnotu symbolem $\Phi\big(v(x, y)\big)$.

Provedenými úvahami jsme vlastně našli **algoritmus** hledání řešení parciální diferenciální rovnice (4): K rovnici přiřadíme charakteristický systém (6) nebo charakteristickou rovnici (7), který (nebo kterou) vyřešíme a najdeme první integrál rovnice (4) ve tvaru (7). Pak vezmeme libovolnou diferencovatelnou funkci Φ jedné proměnné a položíme

$$u(x, y) = \Phi\big(v(x, y)\big). \tag{10}$$

Ještě je potřeba udělat zkoušku, že takto nalezená funkce u je skutečně řešením parciální rovnice (4). Jinak řečeno, dokázat následující:

Tvrzení 1. Nechť $v : \Omega \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce taková, že rovnost (8) je implicitním zápisem trajektorií charakteristického systému (6) (nebo ekvivalentně: implicitním zápisem řešení charakteristické rovnice (7)). Je-li Φ libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné taková, že její definiční obor obsahuje obor hodnot funkce v, pak funkce u definovaná vztahem (10) je řešením rovnice (4).

Důkaz: Pro řešení $x = x(s)$, $y = y(s)$ charakteristického systému platí

$$v\big(x(s), y(s)\big) = const.$$

Derivováním této rovnosti podle parametru s dostaneme

$$\begin{aligned}0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} v\big(x(s), y(s)\big) = \frac{\partial v\big(x(s), y(s)\big)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial v\big(x(s), y(s)\big)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s} = \\ = \frac{\partial v\big(x(s), y(s)\big)}{\partial x} a\big(x(s), y(s)\big) + \frac{\partial v\big(x(s), y(s)\big)}{\partial y} b\big(x(s), y(s)\big),\end{aligned}$$

stručně

$$a(x, y)v_x(x, y) + b(x, y)v_y(x, y) = 0.$$

Dále

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi\big(v(x, y)\big)}{\partial x} = \Phi'\big(v(x, y)\big)v_x(x, y), \qquad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \Phi'\big(v(x, y)\big)v_y(x, y),$$

takže

$$a(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \big(a(x, y)v_x(x, y) + b(x, y)v_y(x, y)\big)\Phi'\big(v(x, y)\big) = 0.$$

□

Dostali jsme množinu řešení rovnice (4) ve tvaru (10). Prvky této množiny závisí na diferencovatelných funkcích, nikoliv na konstantách, jak tomu je v případě obyčejných diferenciálních rovnic. Odtud plyne, že (vektorový) prostor řešení lineární homogenní parciální diferenciální rovnice nemůže mít konečnou dimensi. Navíc zatím nevíme, zda rovnice (4) nemá nějaké další řešení, které není uvedeného tvaru.

1.2.1 Příklad.

$$u_x - 6x^2 u_y = 0.$$

Charakteristická rovnice je $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -6x^2$ a její řešení je bezprostředně dáno integrací pravé strany, $y = -2x^3 + const$. První integrál dané rovnice tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$2x^3 + y = const$$

a její řešení je dáno rovností

$$u(x, y) = \Phi(2x^3 + y),$$

kde Φ je libovolná diferencovatelná funkce.

Zkouška:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Phi(2x^3 + y) = \Phi'(2x^3 + y)\cdot 6x^2, \qquad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Phi(2x^3 + y) = \Phi'(2x^3 + y)$$

takže

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - 6x^2\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 6x^2\Phi'(2x^3 + y) - 6x^2\Phi'(2x^3 + y) = 0.$$

■

1.3 Kanonický tvar a řešení rovnice $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(x,y,u)$

Uvažujme parciální diferenciální rovnici prvního řádu ve tvaru

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(x,y,u). \tag{11}$$

Budeme hledat nějakou transformaci nezávisle proměnných, která tuto rovnici nějak zjednoduší. Současně budeme chtít, aby tato transformace nebyla příliš komplikovaná. Ponecháme tedy první souřadnici (nezávisle proměnnou x) beze změny a transformujeme pouze souřadnici druhou (nezávisle proměnnou y). Jinými slovy, původní souřadnice x, y transformujeme na nové souřadnice ξ, η tak, že

$$\xi = x, \quad \eta = \varphi(x,y), \tag{12}$$

Přitom φ je diferencovatelná funkce dvou proměnných. Aby se jednalo skutečně o transformaci prostoru $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, musí být zobrazení $\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definované vztahem

$$\boldsymbol{\phi}(x,y) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x,y) \end{pmatrix},$$

regulární (invertovatelné). Existuje tedy inversní zobrazení $\boldsymbol{\phi}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; jeho druhou složku označíme χ, je to diferencovatelná funkce dvou proměnných. Přitom funkce φ a χ splňují rovnosti $\chi(\xi,\eta) = y$, $\varphi(x,y) = \eta$, podrobněji

$$\chi\big(x, \varphi(x,y)\big) = y, \qquad \varphi\big(\xi, \chi(\xi,\eta)\big) = \eta. \tag{13}$$

Poznamenejme, že k tomu, aby zobrazení $\boldsymbol{\phi}$ bylo regulární, stačí, aby funkce φ měla nenulovou parciální derivaci podle druhé proměnné, tj. $\varphi_y \neq 0$.

Nyní budeme rovnici (11) transformovat do nových nezávisle proměnných pomocí transformace (12). Parciální derivace hledané funkce u podle původních proměnných vyjádříme v nových proměnných pomocí „řetězového pravidla“ pro derivování složených funkcí:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi + u_\eta \varphi_x, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = u_\eta \varphi_y.$$

Po dosazení do levé strany řešené rovnice (11) tedy dostaneme

$$au_x + bu_y = au_\xi + (a\varphi_x + b\varphi_y)u_\eta.$$

Pokud funkce φ bude taková, že výraz v závorce vymizí, daná rovnice se transformuje na rovnici, v níž vystupuje pouze jedna parciální derivace. Požadujeme tedy $a\varphi_x + b\varphi_y = 0$, tj.

$$\frac{b}{a} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}.$$

Výraz $-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$ ovšem vyjadřuje obyčejnou derivaci funkce $y = y(x)$ zadané implicitně rovnicí

$$\varphi(x,y) = const.$$

Funkce $y = y(x)$ zadaná touto rovnicí tedy má derivaci tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}.$$

Porovnáním s (7) vidíme, že transformační funkce φ současně implicitně vyjadřuje charakteristiky rovnice (4).

Transformovaná rovnice má tvar $au_\xi = f$. Funkce a je podle předpokladu nenulová, proto můžeme rovnici dále upravit, vyjádřit parciální derivaci u_ξ:

$$u_\xi = \frac{f}{a}u.$$

Dostáváme tak první závěr: Transformace nezávisle proměnných (12), kde funkce φ představuje implicitní zápis (8) charakteristik rovnice (4), převádí rovnici (11) na rovnici

$$u_\xi = F(\xi, \eta, u); \tag{14}$$

přitom

$$F(\xi, \eta, u) = \frac{f\big(\xi, \chi(\xi, \eta), u\big)}{a\big(\xi, \chi(\xi, \eta)\big)},$$

kde funkce χ je definována rovnostmi (13). Rovnice (14) se nazývá *kanonický tvar rovnice* (11).

V rovnici (14) není derivace hledané funkce u podle proměnné η. Hledanou funkci tedy můžeme chápat jako funkci jedné nezávisle proměnné ξ a její parciální derivaci u_ξ chápat jako derivaci obyčejnou. V tomto pojetí bude nezávisle proměnná η mít roli parametru. Hledáme tedy řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu s parametrem η

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = F(\xi, \eta, u).$$

Pokud se nám podaří tuto rovnici vyřešit, tj. najít funkci $u = u(\xi, \eta)$, která ji splňuje, dostaneme zpětnou substitucí nezávisle proměnných řešení původní rovnice (11). Přitom je potřeba mít na paměti, že integrační konstanta objevující se při řešení obyčejné rovnice, bude záviset na parametru η. Ve vyjádření řešení rovnice (11) se tedy bude vyskytovat nějaká neurčená funkce proměnné η, tj. v původních nezávisle proměnných nějaká funkce argumentu $\varphi(x, y)$. To je v souladu s výsledky uvedenými v 1.2.

1.3.1 Příklad

Hledejme řešení rovnice $yu_x + xu_y = u^2 + 1$ v kladném kvadrantu.

Příslušná charakteristická rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y}$$

a její řešení je implicitně dáno rovností $x^2 - y^2 = const$. Transformace

$$\xi = x, \qquad \eta = x^2 - y^2$$

převede danou rovnici na kanonický tvar

$$\sqrt{\xi^2 - \eta}\, u_\xi = u^2 + 1.$$

Tuto rovnici budeme považovat za obyčejnou. Upravíme ji na tvar explicitní obyčejné diferenciální rovnice s parametrem η

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = \frac{u^2 + 1}{\sqrt{\xi^2 - \eta}}$$

a vidíme, že se jedná o rovnici se separovanými proměnnými. Její řešení je implicitně dáno rovností

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1} = \int \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2 - \eta}}.$$

Integrací dostaneme implicitní tvar řešení rovnice

$$\operatorname{arctg} u = \ln\left|\xi + \sqrt{\xi^2 - \eta}\right| + C(\eta),$$

kde C je integrační konstanta, která závisí na parametru η. V tomto případě můžeme funkci u vyjádřit explicitně,

$$u(\xi, \eta) = \operatorname{tg}\left(C(\eta) + \ln\left|\xi + \sqrt{\xi^2 - \eta}\right|\right).$$

Návratem k původním proměnným x, y dostaneme řešení dané rovnice ve tvaru

$$u(x,y) = \operatorname{tg}\big(C(x^2-y^2) + \ln(x+y)\big)\,,$$

kde C je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné.

Zkouškou se můžeme přesvědčit, že se skutečně jedná o řešení dané rovnice. Parciální derivace nalezené funkce u jsou[1]

$$\begin{aligned}
u_x(x,y) &= \frac{1}{\cos^2\left(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\right)}\left(2xC'(x^2-y^2) + \frac{1}{x+y}\right),\\
u_y(x,y) &= \frac{1}{\cos^2\left(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\right)}\left(-2yC'(x^2-y^2) + \frac{1}{x+y}\right),
\end{aligned}$$

takže platí

$$\begin{aligned}
yu_x(x,y) + xu_y(x,y) &= \frac{1}{\cos^2\left(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\right)} = \\
&= \frac{\sin^2\big(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\big) + \cos^2\big(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\big)}{\cos^2\left(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\right)} = \\
&= \operatorname{tg}^2\big(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\big) + 1 = u^2+1
\end{aligned}$$

a rovnice je splněna. ■

Řešení $u = u(\xi,\eta)$ rovnice (14) v kanonickém tvaru obecně nelze explicitně vyjádřit. V některých případech, např. jedná-li se o rovnici se separovatelnými proměnnými nebo o rovnici exaktní, můžeme její řešení vyjádřit alespoň implicitně. Takové řešení závisí na integrační konstantě Φ, která ovšem sama závisí na parametru η. Řešení rovnice (14) tak zapíšeme ve tvaru

$$\psi(\xi,\eta,u) = \Phi(\eta);$$

přitom ψ je diferencovatelná funkce tří proměnných, Φ je diferencovatelná funkce jedné proměnné. Návratem k původním nezávisle proměnným x, y dostaneme implicitní tvar řešení rovnice (11)

$$\psi\big(x,\varphi(x,y),u\big) = \Phi\big(\varphi(x,y)\big).$$

Nejjednodušší je situace v případě lineární rovnice. Kanonický tvar rovnice (2) je

$$u_\xi = P(\xi,\eta)u + Q(\xi,\eta); \tag{15}$$

přitom

$$P(\xi,\eta) = -\frac{c\big(\xi,\chi(\xi,\eta)\big)}{a\big(\xi,\chi(\xi,\eta)\big)}, \quad Q(\xi,\eta) = \frac{g\big(\xi,\chi(\xi,\eta)\big)}{a\big(\xi,\chi(\xi,\eta)\big)},$$

kde funkce χ je definována rovnostmi (13). Hledáme tedy řešení obyčejné lineární diferenciální rovnice prvního řádu

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = P(\xi,\eta)u + Q(\xi,\eta).$$

Její řešení je tvaru

$$u(\xi,\eta) = const\cdot\exp\left(\int_{\xi_0}^{\xi} P(s,\eta)\mathrm{d}s\right) + \int_{\xi_0}^{\xi} Q(s,\eta)\exp\left(\int_{s}^{\xi} P(\sigma,\eta)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s.$$

[1] Poznamenejme, že zápis $\sin^2\alpha$ označuje druhou mocninu funkční hodnoty goniometrické funkce sinus v bodě α, nikoliv dvakrát iterovanou funkci sinus; podobně pro funkce cosinus a tangens.

Integrační konstanta samozřejmě může záviset na parametru η, proto ji zapíšeme jako $\Phi(\eta)$. Řešení lineární parciální diferenciální rovnice v kanonickém tvaru (15) je tedy dáno formulí

$$u(\xi,\eta)=\Phi(\eta)\exp\left(\int_{\xi_0}^{\xi}P(s,\eta)\mathrm{d}s\right)+\int_{\xi_0}^{\xi}Q(s,\eta)\exp\left(\int_{s}^{\xi}P(\sigma,\eta)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s, \tag{16}$$

kde Φ je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné, ξ_0 je nějaké reálné číslo; ve většině případů lze položit $\xi_0=0$.

Řešení lineární rovnice (2) dostaneme z formule (16) návratem k původním nezávisle proměnným x,y. Pro funkci P najdeme s využitím druhé rovnosti (12) vyjádření

$$P(s,\eta)=-\frac{c\big(s,\chi(s,\eta)\big)}{a\big(s,\chi(s,\eta)\big)}=-\frac{c\big(s,\chi(s,\varphi(x,y))\big)}{a\big(s,\chi(s,\varphi(x,y))\big)},$$

analogicky vyjádříme funkci Q. Výsledek nyní můžeme zformulovat ve tvaru věty:

Věta 1. *Nechť $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce taková, že rovnost (8) je implicitním zápisem trajektorií charakteristického systému (6) (nebo ekvivalentně: implicitním zápisem řešení charakteristické rovnice (7)) a $\chi:\Omega\to\mathbb{R}$ je funkce taková, že jsou splněny podmínky (13)[2]. Označme*

$$p(x,y,s)=-\frac{c\big(s,\chi(s,\varphi(x,y))\big)}{a\big(s,\chi(s,\varphi(x,y))\big)},\qquad q(x,y,s)=\frac{g\big(s,\chi(s,\varphi(x,y))\big)}{a\big(s,\chi(s,\varphi(x,y))\big)}.$$

Je-li Φ diferencovatelná funkce jedné proměnné, jejíž definiční obor obsahuje obor hodnot funkce φ, pak funkce u definovaná rovností

$$u(x,y)=\Phi\big(\varphi(x,y)\big)\exp\left(\int_{x_0}^{x}p(x,y,s)\mathrm{d}s\right)+\int_{x_0}^{x}q(x,y,s)\exp\left(\int_{s}^{x}p(x,y,\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s$$

je řešením rovnice (2); číslo x_0 je libovolné takové, že integrály na pravé straně jsou konečné pro všechny dvojice $(x,y)\in\Omega$.

Důkaz provedeme přímým výpočtem. Je to pěkné cvičení na derivování vícenásobně složených funkcí více proměnných. □

Výpočty provedené před Větou 1 ukazují, če pokud má charakteristická rovnice (7) řešení, pak má řešení i lineární parciální rovnice (2) a toto řešení má tvar uvedený ve Větě 1. Existence řešení lineární parciální rovnice v tomto tvaru je tedy důsledkem existence řešení příslušné charakteristické rovnice, tj. obyčejné diferenciální rovnice.

Při řešení konkrétní lineární homogenní parciální diferenciální rovnice prvního řádu ve dvou nezávisle proměnných bývá přehlednější rovnici transformovat na kanonický tvar, rovnici v kanonickém tvaru vyřešit a zpětně transformovat nezávisle proměnné, než používat vzorec z Věty 1.

1.3.2 Příklad.

$$yu_x-xu_y=x^2+y^2$$

Rovnici budeme uvažovat na množině $G=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geq 0, y\geq 0\big\}$, na jejímž vnitřku jsou oba koeficienty $a(x,y)=y$, $b(x,y)=-x$ nenulové. Příslušná charakteristická rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}.$$

[2] Všimněte si, že na levých stranách rovností (13) nejsou funkce dvou proměnných, ale funkce tří proměnných, přičemž hodnoty první a druhé proměnné jsou shodné.

Je to obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými a její řešení je implicitně dáno rovností $x^2 + y^2 = const$. Zavedeme tedy transformaci

$$\xi = x, \qquad \eta = x^2 + y^2.$$

Pak na množině G je

$$y = \sqrt{\eta - \xi^2}, \qquad \xi_x = 1, \quad \xi_y = 0, \quad \eta_x = 2x = 2\xi, \quad \eta_y = 2y = 2\sqrt{\eta - \xi^2},$$

takže

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + 2\xi u_\eta, \qquad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = 2\sqrt{\eta - \xi^2}\, u_\eta.$$

Po dosazení do řešené rovnice dostaneme

$$\sqrt{\eta - \xi^2}\big(u_\xi + 2\xi u_\eta\big) - 2\xi\sqrt{\eta - \xi^2}\, u_\eta = \xi^2 + \eta - \xi^2$$

a odtud snadnou úpravou získáme kanonický tvar

$$u_\xi = \frac{\eta}{\sqrt{\eta - \xi^2}}.$$

Tuto jednoduchou obyčejnou rovnici řešíme integrací podle proměnné ξ,

$$u = \int \frac{\eta}{\sqrt{\eta - \xi^2}} \mathrm{d}\xi = \eta \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{\eta}} + const.$$

Integrační konstanta závisí na parametru η, řešení rovnice v kanonickém tvaru je

$$u(\xi, \eta) = \eta \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{\eta}} + \Phi(\eta),$$

kde η je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné. Návratem k původním proměnným dostaneme řešení dané rovnice ve tvaru

$$u(x, y) = (x^2 + y^2) \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \Phi(x^2 + y^2).$$

Ještě můžeme využít skutečnosti, že pro $x > 0$, $y > 0$ je

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y},$$

a výsledek zapsat v trochu kratším tvaru

$$u(x, y) = (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \Phi(x^2 + y^2).$$

Ukážeme ještě řešení dané rovnice přímým dosazováním do formulí ve Větě 1. Máme

$$a(x, y) = y, \quad b(x, y) = -x, \quad c(x, y) = 0, \quad g(x, y) = x^2 + y^2.$$

Implicitní zápis řešení charakteristické rovnice je $x^2 + y^2 = const$ a tedy

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2.$$

Tvar funkce χ dostaneme ze druhé rovnosti (13). Má platit

$$\eta = \varphi\big(\xi, \chi(\xi, \eta)\big) = \xi^2 + \chi(\xi, \eta)^2,$$

takže $\chi(\xi, \eta) = \sqrt{\eta - \xi^2}$. Dále $p(x, y, s) = 0$ a

$$q(x, y, s) = \frac{g\big(s, \chi(s, \varphi(x, y))\big)}{a\big(s, \chi(s, \varphi(x, y))\big)} = \frac{s^2 + \chi\big(s, \varphi(x, y)\big)^2}{\chi\big(s, \varphi(x, y)\big)} = \frac{s^2 + \big(\varphi(x, y) - s^2\big)}{\sqrt{\varphi(x, y) - s^2}} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 - s^2}}.$$

Zvolíme $x_0 = 0$ a řešení dané rovnice rovnice dostaneme podle Věty 1 ve tvaru

$$u(x,y) = \Phi(x^2+y^2) + \int\limits_0^x \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2-s^2}}\mathrm{d}s = \Phi(x^2+y^2) + (x^2+y^2)\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

tedy až na pořadí sčítanců ve stejném, jako při předchozím způsobu řešení rovnice. ■

Rovnici (11) jsme transformovali do nových nezávisle proměnných tak, že jsme ponechali první souřadnici nezměněnu a za druhou jsme vzali funkci vyjadřující charakteristiku rovnice. To není jediná možnost, jak parciální rovnici (11) transformovat na kanonický tvar, tj. na obyčejnou rovnici s parametrem. Stejně dobře můžeme ponechat druhou souřadnici a první nahradit charakteristikou.

1.3.3 Příklad.

$$2u_x + 3u_y - xu = 0$$

Charakteristická rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tfrac{3}{2},$$

její řešení $y = \frac{3}{2}x + const$ můžeme přepsat ve tvaru

$$3x - 2y = const;$$

to je zápis charakteristiky. Zavedeme transformaci

$$\xi = 3x - 2y, \quad \eta = y.$$

Pak $u_x = 3u_\xi$, $u_y = -2u_\xi + u_\eta$, $x = \frac{1}{3}(\xi + 2\eta)$. Levá strana dané rovnice se tedy transformuje na tvar

$$2u_x + 3u_y - xu = 6u_\xi - 6u_\xi + 3u_\eta - \tfrac{1}{3}(\xi+2\eta)u = 3\left(u_\eta - \tfrac{1}{9}(\xi+2\eta)u\right).$$

Kanonický tvar dané rovnice je

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \tfrac{1}{9}(\xi + 2\eta)u.$$

Tato rovnice má řešení

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \tfrac{1}{9}\int(\xi+2\eta)\mathrm{d}\eta, \qquad \text{tj. } \ln u = \tfrac{1}{9}(\xi\eta + \eta^2) + const, \quad \text{neboli } u = const\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{9}(\xi\eta+\eta^2)}.$$

Řešení rovnice v kanonickém tvaru je tedy $u = \Phi(\xi)\mathrm{e}^{\frac{1}{9}\eta(\xi+\eta)}$ a návratem k původním proměnným dostaneme řešení dané rovnice

$$u(x,y) = \Phi(3x-2y)\mathrm{e}^{\frac{1}{9}y(3x-2y+y)} = \Phi(3x-2y)\sqrt[9]{\mathrm{e}^{y(3x-y)}}.$$

■

1.4 Okrajová úloha pro rovnici $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(x,y,u)$

Uvažujme parciální diferenciální rovnici (11) lineární v prvních derivacích a jednu konkrétní charakteristiku rovnice (4) s nulovou pravou stranou; tato charakteristika má parametrické vyjádření (5) a je řešením autonomního systému obyčejných diferenciálních rovnic (6) s počátečními podmínkami

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0.$$

Nechť funkce u je řešením rovnice (11). Pak na uvažované charakteristice platí

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u\big(x(s),y(s)\big) &= u_x\big(x(s),y(s)\big)\frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} + u_y\big(x(s),y(s)\big)\frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s} = \\ &= a\big(x(s),y(s)\big)u_x\big(x(s),y(s)\big) + b\big(x(s),y(s)\big)u_y\big(x(s),y(s)\big) = f\big(x(s),y(s),u(x(s),y(s))\big).\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že prostorová křivka, jejíž parametrické vyjádření je řešením autonomního systému

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= a(x,y),\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= b(x,y),\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} &= f(x,y,u)\end{aligned} \tag{17}$$

s počátečními podmínkami

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0, \qquad u(0) = u_0 = u(x_0, y_0), \tag{18}$$

je incidentní s grafem řešení rovnice (11), tj. leží na grafu funkce u.

Zadáme-li tedy hodnotu u_0 řešení u rovnice (11) v nějakém bodě (x_0, y_0) charakteristiky, máme hodnoty řešení u rovnice (11) ve všech bodech této charakteristiky jako řešení autonomního systému obyčejných diferenciálních rovnic (17) s počátečními podmínkami (18). Systém (17) charakterizuje řešení rovnice (2), proto se nazývá *charakteristický systém příslušný k rovnici* (2), jeho trajektorie můžeme nazvat *charakteristické křivky rovnice* (11).

Jedno konkrétní řešení (partikulární řešení) rovnice (11) získáme tak, že na každé charakteristice zadáme právě jednu funkční hodnotu. Jinak řečeno, zadáme hodnoty řešení na nějaké rovinné křivce, která protíná každou charakteristiku právě jednou. Takové křivce říkáme *okraj pro rovnici* (11).

Okraj může být zadán parametricky rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= X(\sigma),\\ y &= Y(\sigma),\end{aligned}$$

kde parametr σ probíhá nějaký interval J. Pro každou hodnotu parametru $\sigma \in J$ zadáme hodnotu řešení $u = g(\sigma)$. Rovnosti

$$x = X(\sigma), \quad y = Y(\sigma), \quad u = g(\sigma), \qquad \sigma \in J \tag{19}$$

lze interpretovat jako parametrické vyjádření prostorové křivky, která má ležet na grafu řešení u rovnice (11). Tyto rovnosti nazýváme *okrajová podmínka pro rovnici* (11).

Okrajová úloha pro rovnici (11) je úloha najít řešení $u = u(x, y)$ rovnice (11), které splňuje okrajovou podmínku (19), tj. řešení, pro které platí

$$u\big(X(\sigma), Y(\sigma)\big) = g(\sigma)$$

pro každou hodnotu parametru $\sigma \in J$.

Okrajovou úlohu můžeme řešit tak, že metodami popsanými v 1.3 najdeme řešení rovnice závisející na obecné funkci Φ a dosadíme do něho okrajovou podmínku. Dostaneme tak funkcionální rovnici pro neznámou funkci Φ; tuto funkci lze v některých případech z příslušné rovnice uhodnout.

1.4.1 Příklad

Hledejme řešení rovnice

$$2u_x + 3u_y = xu,$$

které splňuje podmínku

$$u(x, 0) = x^2$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Zadáváme tedy hodnoty řešení na ose x. Okrajovou podmínku můžeme parametricky zapsat jako

$$x = \sigma, \quad y = 0, \quad u = \sigma^2, \qquad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Řešení dané rovnice jsme našli v příkladu na str. 10 ve tvaru

$$u(x,y) = \Phi(3x-2y)\sqrt[9]{\mathrm{e}^{3xy-y^2}}.$$

Aby toto řešení splnilo okrajovou podmínku, musí platit

$$x^2 = u(x,0) = \Phi(3x)\sqrt[9]{\mathrm{e}^0} = \Phi(3x).$$

Funkce Φ je tedy řešením jednoduché funkcionální rovnice $\Phi(3x) = x^2$ a snadno uhodneme, že funkci Φ můžeme zadat předpisem $\Phi(\xi) = \left(\frac{1}{3}\xi\right)^2$. Pro řešení dané okrajové úlohy tak dostáváme formulku

$$u(x,y) = (x - \tfrac{2}{3}y)^2 \sqrt[9]{\mathrm{e}^{3xy-y^2}}.$$

■

Řešení funkcionální rovnice však obecně není snadná úloha. Proto může být výhodné při řešení okrajové úlohy (11), (19) postupovat jinak.

Najdeme konkrétní charakteristiku, která protíná okraj v bodě daném konkrétní hodnotou parametru σ. To znamená, že rovnosti v (19) chápeme jako počáteční podmínky pro autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic (17), tj. najdeme řešení systému rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x,y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = b(x,y), \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = f(x,y,u)$$

s počátečními podmínkami

$$x(0) = X(\sigma), \quad y(0) = Y(\sigma), \quad u(0) = g(\sigma).$$

Takové řešení počáteční úlohy pro autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic tedy závisí na nezávisle proměnné s a na parametru σ, je obecně tvaru

$$x = x(s,\sigma), \quad y = y(s,\sigma), \quad u = u(s,\sigma).$$

Pro řešení okrajové úlohy představuje parametr σ i nezávisle proměnná s pouze pomocné parametry, které je potřeba eliminovat. Proto budeme první dvě rovnosti chápat jako dvě rovnice pro dvě neznámé s a σ; tyto neznámé vyjádříme pomocí proměnných x, y, tj. najdeme $s = s(x,y)$, $\sigma = \sigma(x,y)$, a dosadíme je do třetí rovnosti. Dostaneme tak řešení okrajové úlohy ve tvaru

$$u(x,y) = u\big(s(x,y), \sigma(x,y)\big).$$

1.4.2 Příklad

Hledejme řešení rovnice

$$yu_x - xu_y = x^2 + y^2,$$

(což je lineární rovnice řešená v příkladu na str. 8) s okrajovou podmínkou

$$u(x,0) = x^2, \qquad x \geq 0.$$

Zadáváme tedy hodnoty řešení na kladné poloose x. Všechny funkce, které se objevují v dané rovnici, jsou definovány na celém prostoru $\mathbb{R}^2$. Budeme hledat řešení, které je definované na co největší podmnožině $\mathbb{R}^2$, nikoliv pouze v prvním kvadrantu jako v zmíněném příkladu.

Parametrické vyjádření okrajové podmínky je

$$x = \sigma, \quad y = 0, \quad u = \sigma^2, \qquad \sigma \geq 0.$$

Řešíme charakteristický systém

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= -x,\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} &= x^2+y^2\end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$x(0)=\sigma, \quad y(0)=0, \quad u(0)=\sigma^2.$$

První dvě rovnice představují lineární systém obyčejných diferenciálních rovnic pro neznýmé funkce x a y. Tento systém vyřešíme a řešení dosadíme do třetí rovnice, kterou pak vyřešíme prostou integrací. Dostaneme tak řešení charakteristického systému ve tvaru

$$x=\sigma\sin\left(s+\frac{\pi}{2}\right), \quad y=\sigma\cos\left(s+\frac{\pi}{2}\right), \quad u=(s+1)\sigma^2. \tag{20}$$

První dvě rovnosti nejprve umocníme na druhou a sečteme, dostaneme

$$\sigma^2=x^2+y^2,$$

poté je vydělíme a dostaneme

$$\frac{x}{y}=\frac{\sin\left(s+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(s+\frac{\pi}{2}\right)}=\operatorname{tg}\left(s+\frac{\pi}{2}\right).$$

Tato jednoduchá goniometrická rovnice pro neznámou $s+\frac{\pi}{2}$ má řešení

$$s+\frac{\pi}{2}=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+k\pi, \quad \text{kde } k\in\mathbb{Z},$$

tedy $s=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}+(2k-1)\frac{\pi}{2}$. Dosazením do pravé strany třetí rovnosti v (20) dostaneme

$$\left(x^2+y^2\right)\left(1+(2k-1)\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right).$$

V tomto vyjádření však zůstává neurčený parametr k a navíc tato formule je pro $y=0$ nedefinovaná, dokonce ani nemá limitu pro $y\to 0$. Pro $x>0$ totiž platí

$$\lim_{y\to 0+}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=\frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad \lim_{y\to 0-}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=-\frac{\pi}{2}.$$

Aby byla splněna okrajová podmínka, mělo by pro $x>0$ platit

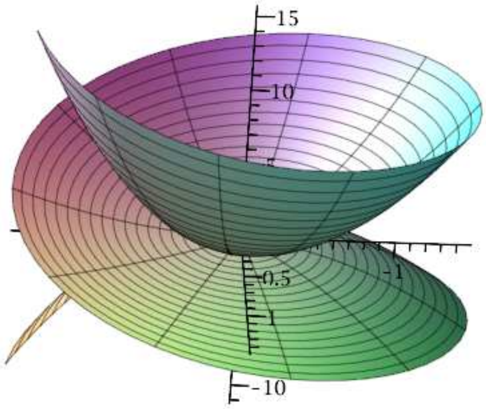
$$x^2=\lim_{y\to 0+}\left(x^2+y^2\right)\left(1+(2k-1)\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)=x^2\left(1+(2k-1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=x^2(1+k\pi),$$

tedy $k=0$, a současně

$$x^2=\lim_{y\to 0-}\left(x^2+y^2\right)\left(1+(2k-1)\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)=x^2\big(1+(k-1)\pi\big),$$

tedy $k=1$. Jinak řečeno, na množině $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x>0, y>0\right\}$ je řešení dané okrajové úlohy tvaru

$$u(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\left(1-\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)$$



Obrázek 1: Řešení rovnice $yu_x - xu_y = x^2 + y^2$ s okrajovou podmínkou $u(x,0) = x^2$, $x \geq 0$. Řešení je dáno parametricky rovnostmi (20), hodnoty parametrů na obrázku jsou $s \in [-6,6]$, $\sigma \in [0, \frac{3}{2}]$.

a na množině $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < 0\right\}$ tvaru

$$u(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)\left(1 + \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right).$$

Tato vyjádření lze jednotně zapsat formulí

$$u(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)\left(1 + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} - \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y\right).$$

Takto definovaná funkce je řešením dané okrajové úlohy na množině $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x < 0\}$.

Podívejme se ještě jednou na parametrické vyjádření řešení dané úlohy. Rovnosti (20) jsou parametrickým vyjádřením plochy v prostoru, která může připomínat šroubovou plochu s osou šroubování u (při fixované hodnotě σ se jedná o šroubovici, tj. prostorovou křivku, která „obíhá“ osu u, celou ji oběhne při nárůstu parametru s o hodnotu 2π a po jedné „otočce“ vystoupá o hodnotu σ^2). Plocha je znázorněna na Obrázku 1

Řešení charakteristického systému s počátečními podmínkami tedy vyjadřuje diferencovatelnou varietu, která je lokálně grafem řešení rovnice, křivka vyjadřující okrajovou podmínku přitom na této varietě leží. ■

1.5 Okrajová úloha pro obecnou rovnici

Budeme hledat řešení rovnice (1) s okrajovou podmínkou (19). Abychom zjednodušili zápis, zavedeme označení

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{21}$$

a rovnici zapíšeme jako

$$F(x,y,u,p,q) = 0. \tag{22}$$

Pro řešení rovnic lineárních v prvních derivacích se ukázal jako užitečný pojem charakteristiky. Je to rovinná křivka s parametrickým vyjádřením

$$x = x(s), \quad y = y(s), \qquad s \in I,$$

která je řešením charakteristického systému, tj. autonomního systému obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x,y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = b(x,y).$$

V případě rovnice (4) je na charakteristice řešení konstantní. V případě rovnice (11) s nenulovou pravou stranou jsme zavedli charakteristickou křivku v prostoru. Je to křivka, která leží na grafu řešení rovnice (11) a její průmět do roviny souřadnic x, y je charakteristikou. Jinak řečeno, charakteristická křivka určuje v každém bodě $\big(x(s), y(s)\big)$ charakteristiky funkční hodnotu $u\big(x(s), y(s)\big)$ řešení rovnice (11). Charakteristická křivka je trajektorií autonomního systému

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x, y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = b(x, y), \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = f(x, y, u).$$

Rovnici (11) lineární v derivacích přepíšeme s použitím označení (21) ve tvaru

$$a(x, y)p + b(x, y)q - f(x, y, u) = 0.$$

V případě této rovnice je tedy $F(x, y, u, p, q) = a(x, y)p + b(x, y)q - f(x, y, u)$ a platí

$$a(x, y) = \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, u, p, q), \quad b(x, y) = \frac{\partial F}{\partial q}(x, y, u, p, q),$$

z čehož dále plyne

$$f(x, y, u) = p\frac{\partial F}{\partial p}(x, y, u, p, q) + q\frac{\partial F}{\partial q}(x, y, u, p, q),$$

neboť je splněna rovnice (11). Charakteristický systém příslušný k rovnici (11) tedy můžeme stručně zapsat

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = F_p, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = F_q, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = pF_p + qF_q. \tag{23}$$

Tyto výsledky zobecníme pro rovnici (1).

Řešení obecné rovnice vyjádříme tak, že každému bodu charakteristiky přiřadíme hodnotu řešení u a hodnoty obou parciálních derivací p a q. Dostaneme tak křivku v pětirozměrném prostoru, která má parametrické vyjádření

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad u = u(s), \quad p = p(s), \quad q = q(s), \qquad s \in I; \tag{24}$$

nazýváme ji *charakteristický pruh rovnice* (1). Ten samozřejmě splňuje rovnici (22), tj.

$$F\big(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)\big) = 0, \tag{25}$$

a budeme požadovat, aby funkce $x = x(s)$, $y = y(s)$, $u = u(s)$ také splňovaly systém obyčejných diferenciálních rovnic (23). Derivováním rovnosti (25) podle parametru s dostaneme

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F\big(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)\big) &= F_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + F_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + F_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} + F_q\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = \\ &= F_xF_p + F_yF_q + F_u(pF_p + qF_q) + F_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} + F_q\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = \\ &= \left(F_x + pF_u + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}\right)F_p + \left(F_y + qF_u + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\right)F_q. \end{aligned}$$

Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, když

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} = -\left(F_x + pF_u\right), \qquad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = -\left(F_y + qF_u\right). \tag{26}$$

Provedené úvahy naznačují, že za *charakteristický systém příslušný k rovnici* (22) můžeme považovat systém obyčejných diferenciálních rovnic (23), (26).

Ještě určíme počáteční podmínky tak, aby řešení charakteristického systému vyjadřovalo řešení počáteční úlohy (1), (19). Stejně, jako v případě rovnice lineární v derivacích položíme

$$x(0) = x_0 = X(\sigma), \quad y(0) = y_0 = Y(\sigma), \quad u(0) = u_0 = g(\sigma).$$

Počáteční hodnota charakteristického pruhu musí splňovat rovnici (22), tj.

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0. \tag{27}$$

Dále pro počáteční hodnoty souřadnic p a q charakteristického pruhu platí

$$p_0 = u_x(x_0, y_0) = u_x\big(X(\sigma), Y(\sigma)\big), \quad q_0 = u_y(x_0, y_0) = u_y\big(X(\sigma), Y(\sigma)\big).$$

Nyní přepíšeme třetí rovnost z okrajové podmínky (19) ve tvaru $g(\sigma) = u\big(X(\sigma), Y(\sigma)\big)$ a zderivujeme podle parametru σ. Dostaneme

$$g'(\sigma) = p_0 X'(\sigma) + q_0 Y'(\sigma). \tag{28}$$

Dosažené výsledky můžeme shrnout jako **algoritmus** pro hledání řešení okrajové úlohy (1), (19): Rovnici přepíšeme do tvaru (22) a přiřadíme jí charakteristický systém obyčejných autonomních rovnic (23), (26) s počátečními podmínkami

$$x(0) = x_0 = X(\sigma), \quad y(0) = y_0 = Y(\sigma), \quad u(0) = u_0 = g(\sigma), \quad p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0,$$

kde hodnoty p_0 a q_0 jsou řešením soustavy rovnic (27), (28). První tři složky

$$x = x(s, \sigma), \quad y = y(s, \sigma), \quad u = u(s, \sigma) \tag{29}$$

řešení počáteční úlohy pro charakteristický systém vyjadřují parametrické vyjádření (grafu) řešení u dané okrajové úlohy. Pokud lze z prvních dvou rovností (29) vyjádřit parametry s, σ pomocí souřadnic x, y, tj. vyjádřit $s = s(x, y)$, $\sigma = \sigma(x, y)$, dosadíme tyto výrazy do třetí rovnosti (29) a dostaneme tak explicitní vyjádření řešení dané okrajové úlohy.

1.5.1 Příklad

Budeme hledat řešení rovnice

$$u_x^2 - u_y^2 = 4u,$$

které splňuje okrajovou podmínku

$$u(\cos\sigma, \sin\sigma) = \cos 2\sigma$$

V tomto případě je

$$F(x, y, u, p, q) = p^2 - q^2 - 4u,$$

takže

$$F_x = F_y = 0, \quad F_u = -4, \quad F_p = 2p, \quad F_q = -2q,$$
$$pF_p + qF_q = 2p^2 - 2q^2, \quad F_x + pF_u = -4p, \quad F_y + qF_u = -4q.$$

To znamená, že charakteristický systém je

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2p, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -2q, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 2(p^2 - q^2), \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} = 4p, \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = 4q.$$

Dvě poslední rovnice jsou obyčejné lineární homogenní rovnice s konstantním koeficientem. Jejich řešení s obecnými počátečními podmínkami tedy je

$$p = p(s) = p_0 \mathrm{e}^{4s}, \quad q = q(s) = q_0 \mathrm{e}^{4s}.$$

Tyto výrazy dosadíme do prvních tří rovnic charakteristického systému. Dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2p_0 \mathrm{e}^{4s}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -2q_0 \mathrm{e}^{4s}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 2(p_0^2 - q_0^2)\mathrm{e}^{8s}$$

a po integraci

$$x = x_0 + \tfrac{1}{2}p_0\left(\mathrm{e}^{4s} - 1\right), \quad y = y_0 - \tfrac{1}{2}q_0\left(\mathrm{e}^{4s} - 1\right), \quad u = u_0 + \tfrac{1}{4}(p_0^2 - q_0^2)\left(\mathrm{e}^{8s} - 1\right). \tag{30}$$

Parametrické vyjádření počátečních podmínek je $X(\sigma) = \cos\sigma$, $Y(\sigma) = \sin\sigma$, $g(\sigma) = \cos 2\sigma$, takže počáteční hodnoty x_0, y_0 a u_0 jsou dány rovnostmi

$$x_0 = \cos\sigma, \quad y_0 = \sin\sigma, \quad u_0 = \cos 2\sigma \tag{31}$$

a počáteční hodnoty p_0 a q_0 splňují rovnice (27), (28), konkrétně

$$4\cos 2\sigma = p_0^2 - q_0^2, \qquad 2\sin 2\sigma = p_0 \sin\sigma - q_0\cos\sigma. \tag{32}$$

Bezprostředním dosazením ze třetí rovnosti (31) a první rovnosti (32) do třetí rovnosti (30) dostaneme

$$u = \mathrm{e}^{8s}\cos 2\sigma. \tag{33}$$

Soustava rovnic (32) je tvořena jednou lineární a jednou kvadratickou rovnicí pro dvě neznámé p_0 a q_0. Má tedy dvě řešení.

První řešení soustavy (32) je $p_0 = 2\cos\sigma$, $q_0 = -2\sin\sigma$. Dosazením do prvních dvou rovností (30) dostaneme

$$x = \mathrm{e}^{4s}\cos\sigma, \qquad y = \mathrm{e}^{4s}\sin\sigma.$$

Umocněním těchto rovností na druhou a jejich odečtením dostaneme

$$x^2 - y^2 = \mathrm{e}^{8s}\cos 2\sigma.$$

Porovnáním se vztahem (33) vidíme, že jedno řešení dané okrajové úlohy je dáno výrazem

$$u(x, y) = x^2 - y^2.$$

Druhé řešení soustavy algebraicko-goniometrických rovnic (32) je

$$p_0 = -\frac{2\cos\sigma(1 + 2\sin^2\sigma)}{\cos 2\sigma}, \qquad q_0 = -\frac{2\sin\sigma(1 + 2\cos^2\sigma)}{\cos 2\sigma}.$$

Po dosazení těchto výrazů a výrazů (31) do rovností (30) dostaneme

$$x = \cos\sigma\left(1 - \frac{1 + 2\sin^2\sigma}{\cos 2\sigma}\left(\mathrm{e}^{4s} - 1\right)\right) = \frac{\cos\sigma}{\cos 2\sigma}\left(2 - (1 + 2\sin^2\sigma)\mathrm{e}^{4s}\right),$$

$$y = \sin\sigma\left(1 + \frac{1 + 2\cos^2\sigma}{\cos 2\sigma}\left(\mathrm{e}^{4s} - 1\right)\right) = \frac{\sin\sigma}{\cos 2\sigma}\left(-2 + (1 + 2\cos^2\sigma)\mathrm{e}^{4s}\right).$$

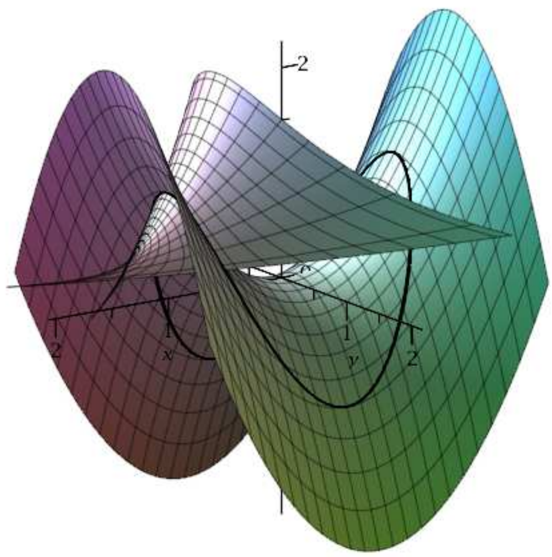
Spolu s rovností (33) tak máme vyjádřeno druhé řešení dané úlohy v parametrickém tvaru. Vzhledem k tomu, že ve jmenovateli zlomků je výraz $\cos 2\sigma$, omezíme se na hodnoty parametru σ z intervalu $\left(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right)$.

Obě řešení dané úlohy jsou znázorněny na Obrázku 2. Tento příklad také ukazuje, že okrajová úloha nemusí být jednoznačně řešitelná. ■

Významným speciálním případem obecné rovnice (1) je rovnice tvaru

$$a(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, u), \tag{34}$$

kde a, b jsou spojité funkce tří proměnných. Koeficienty a, b u prvních parciálních derivací hledané funkce na této funkci závisí. Proto výraz na pravé straně rovnice (34) nevyjadřuje lineární operátor na množině diferencovatelných funkcí dvou proměnných, ale je pouze „lineárnímu podobný“ nebo „jakoby lineární“. Proto se rovnice (34) nazývá *quasilineární*.



Obrázek 2: Řešení rovnice $u_x^2 - u_y^2 = 4u$ s okrajovou podmínkou $u(\cos\sigma, \sin\sigma) = \cos 2\sigma$. Okrajová podmínka je vyznačena černou křivkou na „sedle“, tj. na grafu řešení daného rovností $u = x^2 - y^2$.

V případě quasilineární rovnice (34) je

$$F(x, y, u, p, q) = a(x, y, u)p + b(x, y, u)q - f(x, y, u),$$

takže $F_p = a(x, y, u)$, $F_q = b(x, y, u)$, $pF_p + qF_q = f(x, y, u)$. První tři rovnice charakteristického systému (23) příslušného k rovnici (34) jsou proto tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x, y, u), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = b(x, y, u), \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = f(x, y, u). \tag{35}$$

Tyto rovnice nezávisí na (pomocných) souřadnicích p, q charakteristického pruhu. Pro řešení quasilineární rovnice (34) tedy nepotřebujeme rovnice (26). Řešení rovnice (34) s okrajovou podmínkou (19) v parametrickém tvaru tedy dostaneme jako řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic (35) s počátečními podmínkami

$$x(0) = X(\sigma), \qquad y(0) = Y(\sigma), \qquad u(0) = g(\sigma).$$

1.5.2 Příklad

Budeme hledat řešení rovnice

$$(y + u)\frac{\partial u}{\partial x} + (u + x)\frac{\partial u}{\partial y} = x + y,$$

které splňuje okrajovou podmínku

$$u(x, -x) = 2x.$$

Charakteristický systém řešené rovnice je tvaru

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= \quad\; y + u,\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= x \quad\; + u,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} &= x + y.
\end{aligned}$$

Jedná se tedy o systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic s konstantní maticí

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Její vlastní čísla a příslušné vlastní vektory jsou

$$\lambda_{1,2} = -1, \quad \lambda_3 = 2, \qquad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

To znamená, že obecné řešení charakteristického systému je

$$\begin{aligned} x(s) &= A\mathrm{e}^{2s} + B\mathrm{e}^{-s}, \\ y(s) &= A\mathrm{e}^{2s} + C\mathrm{e}^{-s}, \\ u(s) &= A\mathrm{e}^{2s} - (B + C)\mathrm{e}^{-s}. \end{aligned}$$

Okrajovou podmínku přepíšeme do tvaru $x = \sigma$, $y = -\sigma$, $u = 2\sigma$, ze kterého dostaneme počáteční podmínky pro charakteristický systém

$$x(0) = \sigma, \qquad y(0) = -\sigma, \qquad u(0) = 2\sigma.$$

Řešení charakteristického systému s těmito počátečními podmínkami je

$$\begin{aligned} x(s) &= \tfrac{2}{3}\sigma\mathrm{e}^{2s} + \tfrac{1}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s} = \tfrac{1}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s}\left(2\mathrm{e}^{3s} + 1\right), \\ y(s) &= \tfrac{2}{3}\sigma\mathrm{e}^{2s} - \tfrac{5}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s} = \tfrac{1}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s}\left(2\mathrm{e}^{3s} - 5\right), \\ u(s) &= \tfrac{2}{3}\sigma\mathrm{e}^{2s} + \tfrac{4}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s} = \tfrac{1}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s}\left(2\mathrm{e}^{3s} + 4\right). \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovností postupně vyjádříme

$$2\mathrm{e}^{3s} = \frac{5x + y}{x - y}, \qquad \tfrac{1}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s} = \frac{x - y}{6}$$

a dosadíme do rovnosti třetí. Po úpravě pak dostaneme řešení dané úlohy

$$u(x, y) = \frac{3x - y}{2}.$$

■

2 Rovnice v n nezávisle proměnných

Budeme se zabývat rovnicí

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{36}$$

kde F je spojitá funkce $2n + 1$ proměnných definovaná na nějaké množině $G \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$, která má neprázdný vnitřek. Při označení vektoru nezávisle proměnných $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ a gradientu

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^\mathsf{T}$$

můžeme rovnici (36) zapsat úsporněji

$$F\left(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\right) = 0.$$

Klasické (silné) řešení rovnice (36) je spojitě diferencovatelná funkce u definovaná na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, taková, že pro každé $\boldsymbol{x} \in \Omega$ platí

$$\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}), \nabla u(\boldsymbol{x})\big) \in G \quad \text{a} \quad F\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}), \nabla u(\boldsymbol{x})\big) = 0.$$

2.1 Rovnice lineární v derivacích s nulovou pravou stranou

Rovnice

$$a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0,$$

stručněji

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{37}$$

nebo ve vektorovém zápisu

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}\nabla u = 0$$

je nejjednodušším speciálním případem obecné rovnice (36). Jedná se o bezprostřední zobecnění rovnice (4) do vícerozměrného prostoru. Proto budeme její řešení hledat způsobem, který je analogií metody charakteristik popsané v 1.2. Rovnici (37) přiřadíme autonomní systém n obyčejných diferenciálních rovnic tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = a_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{38}$$

Tento systém se nazývá *charakteristický systém příslušný k rovnici* (37) a jeho trajektorie se nazývají *charakteristiky rovnice* (37). Charakteristika je hladká křivka v n-rozměrném prostoru, lze ji zapsat parametrickými rovnicemi

$$x_i = x_i(s), \quad s \in I, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{39}$$

kde I je nějaký reálný interval. Nechť funkce $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je řešením rovnice (38). Pro derivaci funkce u na charakteristice (39) podle parametru s platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u\big(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)\big) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u\big(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)\big)}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = \\ = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u\big(\boldsymbol{x}(s)\big)}{\partial x_i}a_i\big(\boldsymbol{x}(s)\big) = 0.$$

To znamená, že na charakteristikách je řešení rovnice (37) konstantní. Odtud plyne, že řešení rovnice (37) můžeme získat tak, že na každé charakteristice zadáme hodnotu funkce u.

Charakteristika rovnice (37) je hladkou křivkou v n-rozměrném prostoru. Takovou křivku můžeme zapsat buď parametricky rovnostmi (39) nebo obecně jako průnik $n-1$ nadploch (tj. $(n-1)$-rozměrných diferencovatelných variet) v n-rozměrném prostoru, tedy rovnostmi

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n-1, \tag{40}$$

kde φ_i jsou diferencovatelné funkce n proměnných. Rovnosti (40) někdy můžeme získat z parametrického vyjádření (39) charakteristik eliminací parametru s.

Jiná možnost, jak získat obecné vyjádření (40) charakteristik rovnice (37) spočívá ve vydělení rovnic charakteristického systému (38); dostaneme tak $n-1$ obyčejných diferenciálních rovnic, např.

$$\frac{\mathrm{d}x_{i+1}}{\mathrm{d}x_i} = \frac{a_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad n = 1, 2, \dots, n-1,$$

nebo

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x_1} = \frac{a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad n = 2, 3, \dots, n.$$

Obecné řešení těchto systémů rovnic, které závisí na $n-1$ konstantách, zapíšeme v implicitním tvaru (40). Předchozí obyčejné diferenciální rovnice můžeme také jednotně zapsat ve tvaru rovností diferenciálů

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{a_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\frac{\mathrm{d}x_2}{a_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{a_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)}. \tag{41}$$

Hodnotu funkce u, která je řešením lineární rovnice (37), vyjádříme na charakteristikách pomocí diferencovatelné funkce Φ, která je funkcí $n-1$ proměnných. Řešení rovnice (37) tedy píšeme ve tvaru

$$u(\boldsymbol{x})=\Phi\big(\varphi_1(\boldsymbol{x}),\varphi_2(\boldsymbol{x}),\ldots,\varphi_{n-1}(\boldsymbol{x})\big). \tag{42}$$

Provedené úvahy ukazují, že pro rovnici (37) lze zformulovat výsledek, který je bezprostředním zobecněním Tvrzení 1 platného pro rovnice ve dvou nezávisle proměnných.

Tvrzení 2. Nechť funkce $\varphi_i:\Omega\to\mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots,n-1$, jsou diferencovatelné funkce takové, že rovnosti (40) jsou implicitním zápisem trajektorií charakteristického systému (38) příslušného k rovnici (37) (nebo ekvivalentně: implicitním zápisem řešení sytému obyčejných diferenciálních rovnic (41)). Je-li Φ libovolná diferencovatelná funkce $n-1$ proměnných taková, že její definiční obor obsahuje kartézský součin oborů hodnot funkcí φ_i, pak funkce u definovaná rovností (42) je řešením rovnice (37).

Důkaz: Na řešení (39) charakteristického systému (38) jsou splněny rovnosti (40). Tedy pro každý index j platí

$$\begin{aligned}0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi_j\big(x_1(s),x_2(s),\ldots,x_n(s)\big)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j\big(x_1(s),x_2(s),\ldots,x_n(s)\big)}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i(s)}{\mathrm{d}s}=\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j\big(x_1(s),x_2(s),\ldots,x_n(s)\big)}{\partial x_i}a_i\big(x_1(s),x_2(s),\ldots,x_n(s)\big),\end{aligned}$$

stručně

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}a_i(\boldsymbol{x})=0.$$

Dále

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi\big(\varphi_1(\boldsymbol{x}),\varphi_2(\boldsymbol{x}),\ldots,\varphi_{n-1}(\boldsymbol{x})\big)=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi\big(\varphi_1(\boldsymbol{x}),\varphi_2(\boldsymbol{x}),\ldots,\varphi_{n-1}(\boldsymbol{x})\big)}{\partial\varphi_j}\frac{\partial\varphi_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i},$$

takže

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}&=\sum_{i=1}^{n}a_i(\boldsymbol{x})\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi\big(\varphi_1(\boldsymbol{x}),\varphi_2(\boldsymbol{x}),\ldots,\varphi_{n-1}(\boldsymbol{x})\big)}{\partial\varphi_j}\frac{\partial\varphi_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=\\&=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi\big(\varphi_1(\boldsymbol{x}),\varphi_2(\boldsymbol{x}),\ldots,\varphi_{n-1}(\boldsymbol{x})\big)}{\partial\varphi_j}\sum_{i=1}^{n}a_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=0.\end{aligned}$$

□

Povšimněme si, že na levé straně rovnice (37) je skalární součin vektoru $\boldsymbol{a}$ s gradientem hledané funkce u. Gradient je lineární zobrazení, skalární součin také. Složení lineárních zobrazení je lineární. Odtud plyne, že rovnice (37) také splňuje *princip superpozice:* Jsou-li $u_1,u_2,\ldots,u_k$ řešení rovnice (37), pak také jejich libovolná lineární kombinace je řešením této rovnice. Jinak řečeno, množina všech řešení rovnice (37) tvoří reálný vektorový prostor.

2.1.1 Příklad

$$(y-2x-2z)\frac{\partial u}{\partial x}+(x-2y+2z)\frac{\partial u}{\partial y}+(x-y+y)\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

Příslušný charakteristický systém

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= -2x+\ \ y-2z,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= \quad x-2y+2z,\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} &= \quad x-\ \ y+\ \ z\end{aligned}$$

je lineární homogenní systém obyčejných diferenciálních rovnic s konstantní maticí. Můžeme tedy explicitně napsat jeho řešení

$$\begin{aligned}x &= (2As+2B)\mathrm{e}^{-s},\\ y &= (-2As+2C)\mathrm{e}^{-s},\\ z &= (-2As+C-B-A)\mathrm{e}^{-s};\end{aligned}$$

přitom A,B,C jsou integrační konstanty. Druhou rovnost vydělíme rovností první a dostaneme

$$\frac{y}{x}=\frac{-As+C}{As+B},\quad \text{tj.}\ \frac{x+y}{x}=\frac{B+C}{As+B},$$

třetí rovnost vydělíme první a dostaneme

$$\frac{z}{x}=\frac{-2As+C-B-A}{As+B},\quad \text{tj.}\ \frac{x+z}{x}=\frac{C+B-A}{2(As+B)},$$

tyto rovnosti navzájem vydělíme a dostaneme

$$\frac{x+y}{x+z}=const.$$

Analogicky (první a třetí rovnost tentokrát dělíme druhou) dostaneme

$$\frac{x+y}{z-y}=const.$$

Řešení je tedy tvaru $u(x,y)=\Phi\left(\frac{x+y}{x+z},\frac{x+y}{z-y}\right)$, kde Φ je libovolná diferencovatelná funkce dvou proměnných. ■

Na charakteristikách je řešení rovnice (37) konstantní. Proto konkrétní řešení (partikulární řešení) této rovnice můžeme získat tak, že na „začátku“ každé charakteristiky určíme funkční hodnotu řešení. „Začátky“ charakteristik lze určit tak, že v prostoru zavedeme nějakou nadplochu ($(n-1)$-rozměrnou varietu), která protíná každou charakteristiku právě jednou; průsečík této nadplochy s charakteristikou budeme považovat za „začátek charakteristiky“. Nadplocha s uvedenou vlastností se nazývá *okraj pro rovnici* (37).

Okraj může být zadán parametrickými rovnicemi; poněvadž se jedná o $(n-1)$-rozměrnou nadplochu, závisí na $n-1$ parametrech. Parametrické rovnice okraje tedy jsou

$$x_i=X_i(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{n-1}),\quad i=1,2,\dots,n,$$

kde parametry $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{n-1}$ jsou z nějaké podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^{n-1}$, která má neprázdný vnitřek. Průsečík konkrétní charakteristiky s okrajem je určen konkrétní sadou parametrů. Hodnoty řešení u rovnice (37) tedy zadáváme pro tuto sadu parametrů. Jinak řečeno, zadáváme *okrajovou podmínku* ve tvaru

$$u\big(X_1(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{n-1}),X_2(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{n-1}),\dots,X_n(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{n-1})\big)=g(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{n-1}).\tag{43}$$

Okrajovou úlohu, tj. rovnici (37) s podmínkou (43), řešíme tak, že k charakteristickému systému přidáme počáteční podmínky

$$x_i(0) = X_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{44}$$

Jednotlivé složky řešení Cauchyovy úlohy (38) závisí na nezávisle proměnné s a na parametrech $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$, tj.

$$x_i = x_i(s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}). \tag{45}$$

Rovnosti (45) a rovnost (43) přepsaná do tvaru $u = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ představují parametrické vyjádření (grafu) řešení okrajové úlohy (37), (43).

Na rovnosti (45) se také můžeme dívat jako na systém n rovnic pro n neznámých, kterými jsou parametry $s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$. Pokud se z něho podaří explicitně vyjádřit parametry okraje $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ v závislosti na souřadnicích $x_1, x_2, \dots, x_n$, tj.

$$\sigma_j = \sigma_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

pak je lze dosadit do okrajové podmínky (43). Takovým způsobem dostaneme řešení okrajové úlohy (37), (43) ve tvaru

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = g\big(\sigma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \sigma_{n-1}(x_1, \dots, x_n)\big).$$

2.1.2 Příklad

Budeme hledat řešení rovnice

$$(z + y - x)\frac{\partial u}{\partial x} + (z + x - y)\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

s okrajovou podmínkou

$$u(x, y, a) = 4a^4 xy,$$

kde a je nějaká reálná konstanta.

Charakteristický systém (38) je v tomto případě tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= -x+y+z, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= x-y+z, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} &= \phantom{-x-y+{}} z. \end{aligned}$$

Jedná se o lineární homogenní systém obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, jeho obecné řešení je tvaru

$$\begin{aligned} x &= A\mathrm{e}^s + B\mathrm{e}^{-2s} + C, \\ y &= A\mathrm{e}^s - B\mathrm{e}^{-2s} + C, \\ z &= A\mathrm{e}^s. \end{aligned}$$

Počáteční podmínky (44) odpovídající dané okrajové podmínce jsou

$$x(0) = \sigma_1, \quad y(0) = \sigma_2, \quad z(0) = a.$$

Pro integrační konstanty A, B, C tak dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} A+B+C &= \sigma_1, \\ A-B+C &= \sigma_2, \\ A &= a, \end{aligned}$$

která má řešení $A = a$, $B = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$, $C = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - a$. Řešení (45) Cauchyovy úlohy pro charakteristický systém je

$$
\begin{aligned}
x &= a\mathrm{e}^s + \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\,\mathrm{e}^{-2s} + \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - a,\\
y &= a\mathrm{e}^s - \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\,\mathrm{e}^{-2s} + \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - a,\\
z &= a\mathrm{e}^s.
\end{aligned}
$$

Bezprostředně vidíme $a\mathrm{e}^s = z$ a tedy $\mathrm{e}^{-2s} = a^2/z^2$. Po dosazení do prvních dvou rovností dostaneme systém rovnic pro parametry σ_1, σ_2 ve tvaru

$$
\begin{aligned}
x &= z + \frac{a^2(\sigma_1 - \sigma_2)}{2z^2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - a,\\
y &= z - \frac{a^2(\sigma_1 - \sigma_2)}{2z^2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - a,
\end{aligned}
$$

nebo po úpravě

$$
\begin{aligned}
(z^2 + a^2)\sigma_1 + (z^2 - a^2)\sigma_2 &= 2z^2(x - z + a),\\
(z^2 - a^2)\sigma_1 + (z^2 + a^2)\sigma_2 &= 2z^2(y - z + a).
\end{aligned}
$$

Determinant této soustavy lineárních rovnic je roven $4a^2z^2$, takže pro $a \neq 0$ dostaneme

$$
\sigma_1 = \frac{1}{2a^2}\big((x + y - 2z + 2a)a^2 + (x - y)z^2\big), \qquad \sigma_2 = \frac{1}{2a^2}\big((x + y - 2z + 2a)a^2 - (x - y)z^2\big).
$$

Parametrické vyjádření okrajové podmínky (43) je

$$
u(\sigma_1, \sigma_2, a) = 4a^4\sigma_1\sigma_2.
$$

Do této rovnosti dosadíme vypočítané hodnoty parametrů σ_1, σ_2 a dostaneme řešení dané úlohy ve tvaru

$$
u(x, y, z) = a^4(x + y - 2z + 2a)^2 - (x - y)^2z^4.
$$

Tato funkce je řešením úlohy pro nenulovou hodnotu parametru a. V případě $a = 0$ je řešením nulová funkce, $u \equiv 0$. ■

2.2 Quasilineární rovnice

Řešení rovnice

$$
a_1(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n, u),
$$

neboli

$$
\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(\boldsymbol{x}, u) \tag{46}
$$

případně ve vektorovém zápisu

$$
\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, u)^{\mathsf{T}}\nabla u = f(\boldsymbol{x}, u),
$$

budeme hledat v implicitním tvaru

$$
V(\boldsymbol{x}, u) = 0, \tag{47}
$$

kde V je nějaká diferencovatelná funkce $n + 1$ proměnných.

Budeme si představovat, že řešení známe. Nechť tedy $u = u(\boldsymbol{x})$ je řešení rovnice (46), které je implicitně popsáno rovností (47). Pak platí

$$
V\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big) = 0.
$$

Tuto rovnost parciálně zderivujeme podle každé z proměnných x_i. Dostaneme

$$\frac{\partial V\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial x_i} + \frac{\partial V\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial u}\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dále vynásobíme i-tou rovnost výrazem $a_i\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)$ a výsledné rovnosti sečteme. Výsledkem je rovnost

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial V\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial x_i} + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right)\frac{\partial V\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial u} = 0$$

a poněvadž funkce u je řešením rovnice (46), můžeme tuto rovnost upravit na tvar

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial V\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial x_i} + f\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial V\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial u} = 0.$$

Vidíme, že funkce V je řešením rovnice v $n+1$ nezávisle proměnných, která je lineární v derivacích a má nulovou pravou stranu. Stručně: funkce V, která rovností (47) implicitně popisuje řešení quasilineární rovnice (46), je řešením parciální diferenciální rovnice

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}, u)\frac{\partial V}{\partial x_i} + f(\boldsymbol{x}, u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0.$$

To je rovnice, kterou jsme se zabývali v předchozí části. Máme tedy následující **algoritmus** pro hledání řešení quasilineární rovnice (46).

K rovnici (46) přiřadíme *charakteristický systém* obyčejných autonomních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} &= a_i(x_1, \dots, x_n, u), \quad i = 1, 2, \dots, n,\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} &= f(x_1, \dots, x_n, u).\end{aligned} \tag{48}$$

Jeho trajektorie vyjádříme v obecném tvaru jako průnik n nadploch

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Řešení rovnice (46) je pak implicitně dáno rovností

$$\Phi\big(\varphi_1(x_1, \dots, x_n, u), \varphi_2(x_1, \dots, x_n, u), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n, u)\big) = 0,$$

kde Φ je libovolná diferencovatelná funkce n proměnných.

Rovnici (46) s okrajovou podmínkou (43) řešíme tak, že najdeme řešení charakteristického systému (48) s počátečními podmínkami (44) doplněnými o podmínku

$$u(0) = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}).$$

Toto řešení závisí na nezávisle proměnné s a parametrech $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$, tj.

$$\begin{aligned}x_i &= x_i(s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \quad i = 1, 2, \dots, n\\ u &= u(s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).\end{aligned}$$

Těmito rovnostmi je parametricky zadáno řešení okrajové úlohy (46), (43). V některých jednoduchých případech lze parametry $s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ eliminovat a řešení úlohy vyjádřit explicitně.

Povšimněme si, že algoritmus řešení okrajové úlohy (46), (43) je bezprostředním zobecněním postupu při řešení úlohy (34), (19) pro funkci ve dvou nezávisle proměnných.

Cvičení

V úlohách 1–6 najděte obecné řešení rovnice.

1. $x^2 u_x + y^2 u_y = 0$
2. $(1 + x^2)u_x + xyu_y = 0$
3. $(z - x + y)u_x + (z + x - y)u_y + zu_z = 0$
4. $x_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + x_n \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0$
5. $yu_x - xu_y = y^2 - x^2$
6. $xuu_x + yuu_y + xy = 0$

V úlohách 7–12 najděte řešení okrajové úlohy.

7. $2u_x + 3u_y = 0,\ u(0, y) = 4y$
8. $(z - y)u_x + (x - z)u_y + (y - x)u_z = 0,\ u(0, y, z) = yz$
9. $u(x + u)u_x - y(y + u)u_y = 0,\ u(1, y) = \sqrt{y}$
10. $(x + u)u_x + yu_y = u + y^2,\ u(x, 1) = x$
11. $u_x^2 - u_y^2 = u,\ u(1, y) = 1$
12. $u_t = -(u_x)^2,\ u(0, x) = ax$

Výsledky:

1. $u(x, y) = \Phi\left(\dfrac{x - y}{xy}\right)$
2. $u(x, y) = \Phi\left(\dfrac{y^2}{1 + x^2}\right)$
3. $u(x, y, z) = \Phi\big(x + y - 2z, z^2(x - y)\big)$
4. $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi\left(\dfrac{x_2}{x_1}, \dfrac{x_3}{x_2}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_{n-1}}\right)$
5. $u(x, y) = xy + \Phi(x^2 + y^2)$
6. $\Phi\left(\dfrac{x}{y}, xy + u^2\right) = 0$ (implicitní popis)
7. $u(x, y) = 4y - 6x$
8. $u(x, y, z) = xy + yz + zx$
9. $u(x, y) = \sqrt{xy}$
10. $u(x, y) = \dfrac{x + y^2 \ln y}{1 + \ln y}$
11. $\big(4u - (x - 3)^2\big)\big(4u - (x - 1)^2\big) = 0$ (implicitní popis)
12. $u(t, x) = ax - a^2 t$