Čebyševova nerovnost. Centrální limitní věta (CLV).

Čebyševova nerovnost

Nechť X je náhodná veličina s konečným, nenulovým rozptylem. Pak $\forall \varepsilon > 0$ platí $P(|X-EX|>\varepsilon) \le \dfrac{DX}{\varepsilon^2}$.

1) Nechť n.v. X má střední hodnotu μ a rozptyl $\sigma^2>0$. Odhadněte $P(|X-\mu|>3\sigma)$.

$$P(|X-\overset{EX}{\overset{\shortparallel}{\mu}}|>\overset{\varepsilon}{\overset{\shortparallel}{3\sigma}}) \overset{\text{Čebyšev}}{\le} \frac{DX}{(3\sigma)^2} = \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{1}{9} \doteq 0{,}11.$$

b) Nechť navíc $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. Spočtěte předchozí pravděpodobnost přesně.

$$P(|X-\mu|>3\sigma) = 1-P(|X-\mu|\le 3\sigma) = 1-P(-3\sigma \le X-\mu \le 3\sigma) = 1-P\Big(\overset{-3}{-\frac{3\sigma}{\sigma}} \le \overset{\sim N(0,1)}{\frac{X-\mu}{\sigma}} \le \overset{3}{\overset{\shortparallel}{\frac{3\sigma}{\sigma}}}\Big)$$

$$= 1-[\Phi(3)-\overset{1-\Phi(3)}{\overset{\shortparallel}{\Phi(-3)}}] = 2\cdot(1-\Phi(3)) \doteq 0{,}0027.$$

2.) V určitém technologickém procesu je vyroben bezvadný výrobek s pravd. $0{,}75$. Jaká je pravd., že mezi 2000 výrobky bude bezvadných mezi 1450 a 1550?

a) přesně

X = počet bezvadných výrobků z 2000

$X \sim Bi(2000; 0{,}75)$ $\quad P(X=x) = \binom{2000}{x} 0{,}75^x \cdot 0{,}25^{2000-x}$, $x = 0,1,\dots,2000$

$$P(1450 \le X \le 1550) = \sum_{x=1450}^{1550} P(X=x) = \sum_{x=1450}^{1550} \binom{2000}{x} 0{,}75^x \cdot 0{,}25^{2000-x} = \dots$$

nejde „rozumně" spočítat

b) aproximací pomocí Čeb. nerovnosti

$EX = 2000 \cdot 0{,}75 = 1500$

$DX = 2000 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 375$

$$P(1450 \le X \le 1550) = P(1450-1500 \le X-1500 \le 1550-1500) = P(-50 \le X-EX \le 50) = P(|X-EX| \le 50)$$

$$= 1 - \underbrace{P(|X-EX| > 50)}_{\text{čebyšev } \leq \frac{375}{50^2}} \geq 1 - \frac{375}{2500} = 0{,}85.$$

c) aproximací pomocí CLV

Moivre-Laplaceova CLV: $X \sim Bi(n,p) \Rightarrow X \approx N(np, np(1-p))$.

V našem případě $X \sim Bi(2000; 0{,}75)$, tedy $X \approx N(1500, 375) \Rightarrow \frac{X-1500}{\sqrt{375}} \approx N(0,1)$.

$$P(1450 \leq \overset{\approx N(1500,375)}{X} \leq 1550) = P\left(\overset{-2{,}58}{\frac{1450-1500}{\sqrt{375}}} \leq \overset{\approx N(0,1)}{\frac{X-1500}{\sqrt{375}}} \leq \overset{2{,}58}{\frac{1550-1500}{\sqrt{375}}}\right) \overset{\text{CLV}}{\doteq} \Phi(2{,}58) - \Phi(-2{,}58) =$$

$$2\Phi(2{,}58) - 1 \doteq 0{,}99.$$

3) Životnost jedné žárovky je náhodná veličina se střední hodnotou 10 h a rozptylem 100 h². Koupíme 50 žárovek.

a) Jaká je pravd., že dohromady vydrží svítit méně než 450 h?

X_i = životnost i-té žárovky pro $i = 1, \dots, 50$

$X_1, \dots, X_{50}$ jsou navzájem nezávislé se stejným rozdělením $EX_i = 10$, $DX_i = 100$

$S = \sum_{i=1}^{50} X_i$ ... celková životnost

Podle CLV $S \approx N(ES, DS) = N(50 \cdot 10, 50 \cdot 100)$

$$P(\overset{\approx N(500,5000)}{S} < 450) = P\left(\overset{\approx N(0,1)}{\frac{S-500}{\sqrt{5000}}} \leq \overset{-0{,}71}{\frac{450-500}{\sqrt{5000}}}\right) \overset{\text{CLV}}{\doteq} \Phi(-0{,}71) = 1 - \Phi(0{,}71) \doteq 0{,}24.$$

b) Jaká je pravd., že jejich průměrná svítivost bude delší než 12 h?

$\overline{X} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} X_i$ ... průměrná svítivost

Podle CLV $\overline{X} \approx N(E\overline{X}, D\overline{X}) = N\left(10, \frac{100}{50}\right)$

$$P(\overline{X} > 12) = 1 - P(\overset{\approx N(10,2)}{\overline{X}} \leq 12) = 1 - P\left(\overset{\approx N(0,1)}{\frac{\overline{X}-10}{\sqrt{2}}} \leq \overset{1{,}41}{\frac{12-10}{\sqrt{2}}}\right) \overset{\text{CLV}}{\doteq} 1 - \Phi(1{,}41) \doteq 0{,}08.$$

c) Kolik žárovek budeme potřebovat, aby s pravd. 0,95 vydržely svítit aspoň 600 h?

$S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ... celková svítivost ; dle CLV $S \approx N(10n, 100n)$

$$P(S \geq 600) = 0,95$$

$$P(\overset{\approx N(10n,100n)}{S} \leq 600) = 0,05$$

$$P\Bigg(\overset{\approx N(0,1)}{\frac{S-10n}{\sqrt{100n}}} \leq \frac{600-10n}{\sqrt{100n}} \Bigg) = 0,05 \quad \leftarrow \text{CLV}$$

$$\Phi\left(\frac{600-10n}{10\sqrt{n}} \right) = 0,05 \;\Big|\; \Phi^{-1}$$

$$\frac{60-n}{\sqrt{n}} = \Phi^{-1}(0,05) = -\Phi^{-1}(0,95) = -1,645$$

substituce $\sqrt{n} = x$

$$\frac{60-x^2}{x} = -1,645$$

a řešíme kvadratickou rovnici. Přípustný kořen je $x_1 \doteq 8,6 \Rightarrow n = x_1^2 \doteq 74,2 \Rightarrow$

Potřebujeme alespoň 75 žárovek.