2) Nechť T_1 a T_2 jsou dva nezávislé odhady parametru θ. Nechť rozptyl odhadu T_1 je dvojnásobkem rozptylu T_2. Nechť T_1 a T_2 jsou navíc nestranné odhady θ.

Definujme odhad $T = k_1 T_1 + k_2 T_2$ pro nějaké $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Určete konstanty k_1, k_2 tak, aby T byl nestranný odhad θ a měl nejmenší možný rozptyl.

- T_1, T_2 jsou nestranné odhady $\theta \Rightarrow ET_1 = ET_2 = \theta, \forall \theta$.

T má být také nestranný $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} & ET = \underline{\theta} \\ & \parallel \\ & E(k_1 T_1 + k_2 T_2) = k_1 \overset{\theta}{\overset{\parallel}{ET_1}} + k_2 \overset{\theta}{\overset{\parallel}{ET_2}} = \underline{\theta(k_1 + k_2)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow k_1 + k_2 = 1$$

- označme $DT_2 = \sigma^2 > 0$

$DT_1 = 2DT_2 = 2\sigma^2$

$$DT = D(k_1 T_1 + k_2 T_2) \overset{NEZ}{=} k_1^2 \cdot \overset{2\sigma^2}{\overset{\parallel}{DT_1}} + k_2^2 \cdot \overset{\sigma^2}{\overset{\parallel}{DT_2}} = \underline{\sigma^2(2k_1^2 + k_2^2)}$$

Tuhle funkci ~~maximalizujeme~~ minimalizujeme přes $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ za podmínky $k_1 + k_2 = 1$.

$k_2 = 1 - k_1$

$DT = \sigma^2(2k_1^2 + (1-k_1)^2) = \sigma^2(3k_1^2 - 2k_1 + 1)$ ... hledáme minimum přes $k_1 \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial k_1} = \underbrace{(6k_1 - 2)}_{=0}\sigma^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{k_1 = \frac{1}{3}} \Rightarrow \underline{k_2} = 1 - k_1 = \underline{\frac{2}{3}}.$$

$$\boxed{T = \frac{1}{3} T_1 + \frac{2}{3} T_2}$$

Odhad parametrické funkce $g(\theta)$: $\Theta \mapsto \mathbb{R}$

a) Řekneme, že odhad T parametrické funkce $g(\theta)$ je nestranný, jestliže $ET = g(\theta)$, $\forall \theta \in \Theta$

b) asymptoticky nestranný, jestliže $\lim_{n\to\infty} ET = g(\theta)$, $\forall \theta \in \Theta$

c) konzistentní, jestliže $T \xrightarrow[n\to\infty]{P} g(\theta)$, $\forall \theta \in \Theta$

2) Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $Po(\lambda)$, kde $\lambda > 0$ je neznámý parametr. Uvažujme 2 odhady parametrické funkce $e^{-\lambda} = P(X_1 = 0)$:

$$U = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^S, \quad \text{kde } S = X_1 + \dots + X_n$$

$$V = e^{-\overline{X}}, \quad \overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

Jsou uvedené odhady nestrannými odhady parametrické funkce $e^{-\lambda}$?

Nápověda: Pro náh. výběr z Poissonova rozdělení platí $S \sim Po(n\lambda)$, tj. $P(S = s) = e^{-n\lambda} \cdot \frac{(n\lambda)^s}{s!}$, $s = 0, 1, 2, \dots$

a)
$$EU = E\left(1 - \frac{1}{n}\right)^S = \sum_{s=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s \cdot P(S = s) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s \cdot e^{-n\lambda} \cdot \frac{(n\lambda)^s}{s!} = e^{-n\lambda} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n\lambda - \lambda)^s}{s!} = e^{-n\lambda} \cdot e^{n\lambda - \lambda} =$$
$$= e^{-\lambda}, \ \forall \lambda > 0 \implies U \text{ je nestranný odhad } e^{-\lambda}.$$

b)
$$EV = E e^{-\overline{X}} = E e^{-\frac{1}{n} \cdot S} = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\frac{s}{n}} \cdot e^{-n\lambda} \cdot \frac{(n\lambda)^s}{s!} = e^{-n\lambda} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(e^{-\frac{1}{n}} \cdot n\lambda\right)^s}{s!} = e^{-n\lambda} \cdot e^{n\lambda \cdot e^{-\frac{1}{n}}} = e^{-n\lambda\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right)} \neq e^{-\lambda}$$

V není nestranný odhad $e^{-\lambda}$, ale je asymptoticky nestranný, neboť $\lim_{n\to\infty} EV = e^{-\lambda}$, $\forall \lambda > 0$.