Testování hypotéz

$X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z rozdělení s distr. fcí $F(x, \theta)$, kde $\theta \in \Theta$.

Úkol: Na základě náh. výběru rozhodnout o platnosti dvou konkurujících si hypotéz o parametru θ:

$H_0: \theta \in \Theta_0$ ... nulová hypotéza

$H_1: \theta \in \Theta_1$ ... alternativní hypotéza (alternativa)

$\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$, $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$.

Naše rozhodnutí:
- zamítáme H_0 (= „H_0 neplatí; platí H_1“)
- nezamítáme H_0 (= „H_0 možná platí, nebo nemáme dostatek informací k tomu, abychom ji vyvrátili“)

skutečnost

ROZHODNUTÍ	platí H_0	platí H_1
zamítáme H_0	chyba 1. druhu	✓
nezamítáme H_0	✓	chyba 2. druhu

Chceme minimalizovat pravd. obou druhů chyb, to ale nejde. Proto zvolíme $\alpha > 0$ malé (hladina významnosti) a požadujeme, aby

$P(\text{chyba 1. druhu}) = \alpha$ a za této podmínky minimalizujeme $P(\text{chyba 2. druhu})$.

(kritickým oborem)

Test je určen testovou statistikou T a kritickým oborem W (= obor hodnot testové statistiky, pro něž zamítáme H_0), tj.

$T \in W \Rightarrow$ zamítáme H_0,

$T \notin W \Rightarrow$ nezamítáme H_0.

1) Výrobce uvádí, že balíček jejich sušenek váží 60g. Zakoupili jsme 20 balíčků a zjistili jejich průměrnou hmotnost 61,2g. Předpokládejme, že rozptyl měření je $4g^2$. Můžeme na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ tvrdit, že výrobce nedodržuje deklarovanou hmotnost?

X_i = hmotnost i-tého balíčku

$X_1, \dots, X_{20}$ náh. výběr z $N(\mu, 4)$

$H_0: \mu = 60$

$H_1: \mu \neq 60$

pivotová statistika pro tento model: $\dfrac{\bar{X} - \mu}{2}\sqrt{n}$.

Testová statistika T je pivotová statistika za H_0 ($\mu = 60$), tj. $T = \dfrac{\bar{X} - 60}{2}\sqrt{n}$.

Víme, že T má za platnosti $H_0(\mu=60)$: $T \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$.

H_0 zamítneme, pokud T nabývá vysokých (nízkých hodnot), tj. $|T|>K$, kde K je nějaké číslo.

$$\underline{\alpha} = P(\text{chyba 1. druhu}) = P(\text{zamítneme } H_0 \mid \text{platí } H_0) = P(|T|>K \mid \overset{\mu=60}{\text{platí } H_0}) = P\left(\left|\frac{\bar{X}-60}{2}\sqrt{n}\right|>K \mid \text{platí } H_0\right) = 1 - P\left(-K \le \overbrace{\frac{\bar{X}-60}{2}\sqrt{n}}^{\sim N(0,1)} \le K \mid \overset{\mu=60}{\text{platí } H_0}\right) = 1-[\Phi(K) - \overset{1-\Phi(K)}{\Phi(-K)}] = \underline{2-2\Phi(K)}$$

$$\left.\begin{aligned} 2-2\Phi(K) &= \alpha \\ \Phi(K) &= 1-\frac{\alpha}{2} \\ K &= u_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}\right\} \text{ pokud } |T| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \text{zamítneme } H_0.$$

- testovací statistika $T = \frac{\bar{X}-60}{2}\sqrt{n}$
- kritická oblast $W = (-\infty, -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$

$\Big\}$ $T \in W \Rightarrow$ zamítáme H_0.

pro naše data:

$$t = \frac{\bar{x}-60}{2}\sqrt{n} = \frac{61{,}2-60}{2}\sqrt{20} \doteq 2{,}683$$

$$W = (-\infty; -1{,}96) \cup (1{,}96; \infty)$$

$\Big\}$ $t \in W \Rightarrow$ zamítáme H_0.

Podařilo se nám prokázat, že výrobce nedodržuje deklarovanou hmotnost.

2) pH vody (příklad 2 Intervalové odhady). Testujte hypotézu, že vzorek je pH-neutrální, tj. jeho pH je rovno 7. Volte $\alpha = 0{,}1$.

X_i = pH i-tého vzorku

$X_1, \dots, X_9$ náh. výběr z $N(\mu, \sigma^2)$

$H_0: \mu = 7$, $H_1: \mu \neq 7$.

pivotová statistika $\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$

testová statistika $T=\frac{\bar{X}-7}{S}\sqrt{n} \overset{H_0}{\sim} t(n-1)$

H_0 zamítneme, pokud $|T| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, tedy $W=(-\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)) \cup (t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \infty)$.

pro naše data:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= 7{,}04 \\ s^2 &= 0{,}02433 \\ n &= 9 \end{aligned}\right\} t = 0{,}769 \qquad t_{0,95}(8) = 1{,}86$$

$W=(-\infty, -1{,}86) \cup (1{,}86, \infty)$. Protože $t \notin W \Rightarrow H_0$ nezamítáme.

Jak tento výsledek souvisí s intervaly spolehlivosti?

7,0

90% IS pro μ je $\langle 6{,}94; 7{,}14 \rangle$. $7 \in \langle 6{,}94; 7{,}14 \rangle \Rightarrow H_0$ nezamítáme.

obecně: zkonstruujeme $(1-\alpha)\cdot 100\%$ IS pro μ. Leží-li hypotetická hodnota uvnitř IS, H_0 nezamítáme.
Leží-li -||- vně IS, H_0 zamítáme.

3) Stejné zadání. Můžeme tvrdit, že pH vzorku je zásadité? Tedy vyšší než 7? Volte $\alpha = 0{,}1$.

$H_0: \mu = 7$

$H_1: \mu > 7$

testová statistika $T=\frac{\bar{X}-7}{S}\sqrt{n} \overset{H_0}{\sim} t(n-1)$ je stejná.

H_0 zamítneme, pokud $T > K$.

$$\alpha = P(\text{chyba 1. druhu}) = P(\text{zam. } H_0 \mid \text{platí } H_0) = P\left(\frac{\bar{X}-7}{S}\sqrt{n} > K \mid \text{platí } H_0\right) = 1 - P\Big(\overbrace{\frac{\bar{X}-7}{S}\sqrt{n}}^{\sim t(n-1)} \leq K \mid \text{platí } H_0\Big)$$

$$\Rightarrow 1-\alpha = P\Big(\overbrace{\frac{\bar{X}-7}{S}\sqrt{n}}^{\sim t(n-1)} \leq K\Big) \Rightarrow K = t_{1-\alpha}(n-1).$$

$W = (t_{1-\alpha}(n-1), \infty)$.

pro naše data:

$t = 0{,}769$ (stejné) $\qquad t_{0,9}(8) = 1{,}40$

$W = (1{,}40; \infty)$

$t \notin W \Rightarrow H_0$ nezamítáme.

Přístup s IS.

protože alternativu nastavujeme $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$ dolní (levostranný) IS.

V našem případě: $\left\langle \bar{X} - t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \infty\right)$

$\langle 6{,}9; \infty)$

$7 \in$ $\Rightarrow H_0$ nezamítáme.

4.) Zakoupili jsme 25 dvoulitrových lahví a změřili jejich objem. Výběrový průměr činil 1,99 l a výběrový rozptyl 0,01 l^2.

a) Šidí nás prodejce? (Je skutečný objem menší než 2 l?) Volte $\alpha = 0{,}05$. DÚ

b) Odpovídá přesnost měřícího přístroje deklarovanému rozptylu 0,0064? Volte $\alpha = 0{,}05$.

b)

X_i = objem i-té lahve

$X_1, \dots, X_{25}$ náh. výběr z $N(\mu, \sigma^2)$

$H_0: \sigma^2 = 0{,}0064$

$H_1: \sigma^2 \neq 0{,}0064$

pivotová statistika je $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

- testová statistika $T = \frac{(n-1)S^2}{0{,}0064} \overset{H_0}{\sim} \chi^2(n-1)$

• kritická oblast $W = (0, \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)) \cup (\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \infty)$

pro naše data:

$t = 37{,}5 \quad \chi^2_{0{,}025}(24) = 12{,}4 \qquad \chi^2_{0{,}975}(24) = 39{,}4$

$W = (0; 12{,}4) \cup (39{,}4; \infty)$

$t \notin W \Rightarrow H_0$ nezamítáme.