Opravy ke Sbírce řešených příkladů předmětu M4122

Jan Koláček

9. dubna 2019

Poznámka. Zde se nachází opravy chyb, které našli studenti při řešení úloh se Sbírky řešených příkladů k předmětu M4122 „Pravděpodobnost a statistika II“.

Poděkování patří těmto studentům: **Natália Slancová, Tereza Nováková, Tereza Martináková, Jana Prchlová, Zdislava Tvrdíková, Magdaléna Trepková, Jan Bubeníček, Alexandra Žilková, Branislava Birošová, Jan Vondruška, Lucie Hronová, Adam Dobrovič a Ľubica Hladká**.

Kapitola 1

1.1 Střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny

Příklad 2 b) Správný výsledek je 185.
Příklad 5 Správně má být

$$D(X) = 0^2 \cdot 0,5 + 1^2 \cdot 0,25 + 2^2 \cdot 0,25 - 0,75^2 = 1,25 - 0,5625 = 0,6875$$

1.3 Kovariance a korelační koeficient

Příklad 12 Uvedený postup platí jen v případě, že by náhodné veličiny X, Y měly stejný rozptyl. Obecně je třeba postupovat takto:

$$C(X+Y, Y-X) = C(X,Y) + C(Y,Y) - C(X,X) - C(X,Y) = DY - DX$$

Příklad 14 Zadání tohoto příkladu nedává smysl. Při vypočtené konstantě c nejsou $f_{X,Y}(x,y)$ a $f_Y(y)$ hustoty. Příklad proto ani nepočítejte.

1.5 Cvičení

Příklad 1 Správný výsledek pro rozptyl je $D(X) = 3/4$.
Příklad 8 Správný výsledek pro $x_{0,15}$ je $x_{0,15} = 0$.
Příklad 10 Zadání a) Informace $R(X,Y) = 0,3$ je nesmyslná a nemá v zadání být. Správný výsledek je $E(U) = 33$.
Příklad 13 Správně má být $C(X_1, X_3) = 0$, $R(X_1, X_3) = 0$, tj. matice $cov(\mathbf{X})$ a $cor(\mathbf{X})$ mají mít na pozicích $(1,3)$ a $(3,1)$ nuly.

Kapitola 2

2.1 Markovova a Čebyševova nerovnost

Příklad 2 V řešení má být správně „pro $\varepsilon = 3\,000$“

$$P(X > 5\,000) \leq P(|X - 2\,000| > 3\,000) \leq \frac{1\,300}{3\,000^2} = 0,000144$$

Příklad 4 b) V řešení má být správně

$$1 - \int\limits_{\frac{5a+b}{6}}^{\frac{a+5b}{6}} \frac{1}{b-a} = 1 - \left[\frac{x}{b-a}\right]_{\frac{5a+b}{6}}^{\frac{a+5b}{6}} = 1 - \frac{\frac{a+5b}{6}}{b-a} + \frac{\frac{5a+b}{6}}{b-a} = 1 - \frac{4(b-a)}{6(b-a)}$$

Příklad 8

a) Správně se má počítat $P(\overline{X}_n > 3,5)$, tj. opačný jev. $P(\overline{X}_n > 3,5) = 1 - P(\overline{X}_n \leq 3,5) = 1 - 0,99061 = 0,00939$.

b) Zadání není formulováno úplně nejlépe. Lepší formulace: „Jaká má být záruční doba, aby průměrná životnost 100 žehliček byla menší než tato záruční doba s pravděpodobností maximálně 0,05?“

c) Zadání není formulováno správně. Správná formulace: „Kolik musíme vzít žehliček, aby pravděpodobnost, že průměrná životnost nepřekročí 42 měsíců, byla maximálně 0,95?“

2.2 Centrální limitní věta

Příklad 11 Řešení není správně, parametr θ nelze počítat uvedeným způsobem, ani by se následně nejednalo o binomické rozdělení. Pokud bychom chtěli upravit zadání tak, aby šlo řešit uvedeným postupem, změnili bychom ho takto:
„Chceme slavit narozeniny v restauraci, ve které můžeme zarezervovat pouze 20 míst, a chtěli bychom pozvat několik kamarádů a kamarádek. Z předchozí zkušenosti víme, že oslovená osoba přijde z pravděpodobností 0,6068. Kolik přátel můžeme oslovit, aby jich s pravděpodobností alespoň 0,99 nepřišlo víc než 19?“
Při řešení se pak číslo 20 musí nahradit číslem 19,5 a řeší se kvadratická nerovnice

$$0,6068\,t^2 + 1,136\,t - 19,5 \leq 0,$$

jejíž řešením a následnou substitucí dostáváme $n \leq 23,1313$. Můžeme tedy oslovit maximálně 23 přátel.

2.3 Cvičení

Příklad 4 b) Správný výsledek je 1607.
Příklad 5 Správný výsledek je 163.

Kapitola 4

4.1 Nestrannost a konzistence odhadů

Příklad 4 Na konci příkladu je špatně vypočtena limita, měla by být bez znaménka mínus. Správný výsledek je $\lim\limits_{n\to\infty} E_\theta T_n = \frac{2(1-\theta)}{\theta^2}$.

4.3 Intervalové odhady

Příklad 21 Špatně uvedena hodnota S^2, správně má být $S^2 = 9,\overline{6}$. Správný výsledek je pak $[D, H] = [4,1245; 9,8755]$.
Příklad 23 V zadání má být místo „22. října“ správně „22. září“.

4.4 Cvičení

Příklad 5 a) Správný výsledek je $[D, H] = [9,335; 11,865]$.
b) Správný výsledek je $[D, H] = [9,6923; 11,5076]$.
Příklad 7 Správný výsledek je $[D, H] = [0,0464; 0,2635]$.

Kapitola 5

5.1 Cvičení

Příklad 2 Část zadání je mírně matoucí, lepší formulace by byla:
„*Výrobce elektrických strojků tvrdí, že použitím nové výrobní technologie prodlouží průměrnou výdrž baterie, která byla původně* 100 *hodin. Tato veličina má normální rozdělení s rozptylem* $\sigma^2 = 16$. *Na základě* 12 *testovaných strojků jsme zjistili, že průměrná výdrž baterie je* 102 *hodiny.*“
Poznámka. Pro řešení otázky 2 b) není ve skriptech uveden vzorec. Ten by byl tvaru

H_0	H_1	Hypotézu H_0 zamítáme, pokud	Předpoklady
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \notin \left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n), \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right)$	μ známé

Zkuste si odvodit.

Příklad 4 Zadání je mírně matoucí a moc nekoresponduje s praxí. Lepší formulace by byla:
„*Směrodatná odchylka průměrných denních teplot měřených v konkrétním městě každého* 15. *dne v měsíci se dlouhodobě nemění a její hodnota je* $8\,°C$. *Z měření za poslední* 2 *roky byla spočítána výběrová směrodatná odchylka* $6,3\,°C$. *Jestliže předpokládáme, že teploty mají normální rozdělení, můžeme na hladině významnosti* $1\,\%$ *tvrdit, že se směrodatná odchylka teplot v posledních* 2 *letech zmenšila?*“
Odpověď je stejná jako při původním zadání.