



MATEMATIKA 2

Sbírka úloh

Edita Kolářová

Úvod

Dostali jste do rukou sbírku příkladů k přednášce Matematika 2. Tato sbírka je doplněním textu Matematika 2. Navazuje na teoretický výklad látky z této knihy. Zároveň jsem se ale snažila uvést do této sbírky všechny důležité vzorce, které při řešení příkladů využívám, abyste po prostudování příslušných kapitol z knihy Matematika 2 mohli sbírku používat i samostatně. Je zde řada příkladů řešených detailně, u dalších jsou uvedené výsledky, případně rady a návody.

Studijní jednotky jsou navrženy tak, aby obsahovaly látku, která spolu úzce souvisí, a je možné je pochopit a nastudovat najednou jako celek.

Předpokládám, že jste už úspěšně zvládli předmět Matematika 1, ovládáte základy diferenciálního a integrálního počtu funkce jedné proměnné, diferenciální počet funkce více proměnných a máte základní poznatky o řadách.

Obsah

1	Diferenciální počet funkcí více proměnných	3
1.1	Parciální derivace funkce více proměnných	3
1.2	Lokální extrémů funkce dvou proměnných	9
2	Diferenciální rovnice prvního řádu	14
2.1	Základní pojmy	14
2.2	Separovatelné diferenciální rovnice	17
2.3	Lineární diferenciální rovnice prvního řádu	19
3	Diferenciální rovnice vyššího řádu	23
3.1	Homogenní diferenciální rovnice vyššího řádu	23
3.2	Nehomogenní diferenciální rovnice vyššího řádu	26
4	Funkce komplexní proměnné	33
4.1	Komplexní čísla	33
4.2	Funkce komplexní proměnné	36
4.3	Derivace funkce komplexní proměnné, Cauchy-Riemannovy podmínky	38
5	Integrál funkce komplexní proměnné	42
5.1	Integrál komplexní funkce pomocí parametrizace křivky	42
5.2	Cauchyův vzorec a Cauchyova věta	47
6	Teorie reziduí	50
6.1	Laurentova řada	50
6.2	Singulární body komplexní funkce, reziduová věta	52
7	Laplaceova integrální transformace	56
7.1	Definice a vlastnosti Laplaceovy transformace	56
7.2	Zpětná Laplaceova transformace	59
7.3	Řešení diferenciálních rovnic Laplaceovou transformací	62
7.4	Laplaceovy obrazy konečných impulsů	65
8	Fourierovy řady	68
8.1	Definice a vlastnosti Fourierovy řady	68
9	Z-transformace	76
9.1	Definice a vlastnosti Z-transformace	76
9.2	Zpětná Z-transformace	78
9.3	Řešení diferenčních rovnic pomocí Z-transformace	79

STUDIJNÍ JEDNOTKA

FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Cíle studijní jednotky. K zvládnutí této studijní jednotky potřebujete znát diferenciální počet funkce jedné proměnné. Zavedeme pojem funkce více proměnných a ukážeme, jak se počítají parciální derivace prvního, ale i vyššího řádu. Potom soustředíme naši pozornost na funkci dvou proměnných a naučíme se počítat rovnici tečné roviny k ploše. Na konci této jednotky najdete metodu na hledání lokálních extrémů funkcí dvou proměnných.

1 Diferenciální počet funkcí více proměnných

1.1 Parciální derivace funkce více proměnných

Funkce n proměnných — funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, která zobrazuje bod $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ do bodu $y \in \mathbb{R}$. Značíme $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

Definiční obor funkce n proměnných — množina $A \subset \mathbb{R}^n$ bodů, pro které má definiční předpis funkce smysl.

Funkce dvou proměnných — funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Značíme $z = f(x, y)$. Definičním oborem takové funkce je část roviny. Grafem je zpravidla plocha.

Parciální derivace funkce n proměnných podle x_i — je derivace funkce jedné proměnné $g(x) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ nebo také f'_{x_i} .

Parciální derivace druhého řádu — $f''_{x_i x_j}(x_1, \dots, x_n) = (f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n))'_{x_j}$. Je to parciální derivace funkce $f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n)$, podle proměnné x_j . Značíme také $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Gradient funkce f v bodě A — vektor $\mathbf{grad}f(A) = (f'_{x_1}(A), \dots, f'_{x_n}(A))$. Značíme také $\nabla f(A)$. Je to směr, ve kterém funkce nejrychleji roste.

Poznámka. Při počítání parciálních derivací f'_{x_i} považujeme za proměnnou pouze x_i , na ostatní proměnné se díváme jako na konstanty. Pro výpočet parciálních derivací platí pravidla o derivování součtu, součinu a podílu funkcí.

Poznámka. Můžeme počítat i parciální derivace vyšších řádů. Parciální derivace n -tého řádu je parciální derivace funkce, která sama vznikla jako $(n - 1)$ -ní derivace. Při počítání parciálních derivací vyšších řádů nezáleží na pořadí, v jakém počítáme derivace podle jednotlivých proměnných, jsou-li tyto derivace spojitě.

Tečná rovina k ploše

Tak jako u funkce jedné proměnné jsme mohli využít derivaci v bodě k zapsání tečny v tomto bodě, můžeme využít parciálních derivací při hledání tečné roviny k ploše. Někdy se jedná o plochu, která je grafem funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$. V tomto případě říkáme, že plocha je daná *explicitně*. Někdy z rovnice plochy neumíme vyjádřit proměnnou z , například u kulové plochy. V tomto případě říkáme, že plocha je daná *implicitně*.

Rovnice tečné roviny ρ k ploše $z = f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$:

$$\rho : \frac{\partial f}{\partial x}(T)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(T)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Tečná rovina k ploše dané implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$ v bodě $T = [x_0, y_0, z_0]$, pro který platí $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, má rovnici:

$$\rho : \frac{\partial F}{\partial x}(T)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(T)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(T)(z - z_0) = 0.$$

Příklad 1.1.1. Najděte definiční obor funkce:

$$a) f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \qquad b) f(x, y) = \arcsin \frac{x^2 + y^2 - 6}{3}$$

Řešení: a) Přirozený definiční obor této funkce tvoří body, pro které platí $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, tedy $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, což je uzavřený kruh se středem v počátku a s poloměrem 2.

Grafem funkce je horní polovina kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

b) Zde musí platit $\frac{x^2 + y^2 - 6}{3} \geq -1$ a $\frac{x^2 + y^2 - 6}{3} \leq 1$. Po úpravě dostaneme definiční obor $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 3 \text{ a } x^2 + y^2 \leq 9\}$, což je mezikružší ohraničené kružnicemi s poloměry $\sqrt{3}$ a 3 se středem v počátku.

Příklad 1.1.2. Najděte parciální derivaci funkce $z = \frac{y}{x+y}$.

Řešení: Nejdříve spočítáme $\frac{\partial z}{\partial x}$. Při počítání považujeme y za konstantu a derivujeme z jako funkci jedné proměnné x .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{0 \cdot (x+y) - 1 \cdot y}{(x+y)^2} = \underline{\underline{-\frac{y}{(x+y)^2}}}.$$

Podobně při počítání $\frac{\partial z}{\partial y}$ považujeme x za konstantu a derivujeme z jako funkci jedné proměnné y .

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 \cdot (x+y) - y \cdot 1}{(x+y)^2} = \underline{\underline{\frac{x}{(x+y)^2}}}.$$

Příklad 1.1.3. Najděte parciální derivace funkce z podle jednotlivých proměnných

a) $z = x^2 + y^2 - 3xy + 4x + 5y - 7$

b) $z = y \sin(2x - y)$

c) $z = x^2 \cos(x + 3y)$

d) $z = x^y, \quad x > 0$

e) $z = \arccos \frac{y}{x}$

f) $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}$

g) $z = \ln \sin(x - 2y)$

h) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

Řešení: a) $z'_x = 2x - 3y + 4, z'_y = 2y - 3x + 5;$ b) $z'_x = 2y \cos(2x - y), z'_y = \sin(2x - y) - y \cos(2x - y);$ c) $z'_x = 2x \cos(x + 3y) - x^2 \sin(x + 3y), z'_y = -3x^2 \sin(x + 3y);$ d) $z'_x = yx^{y-1}, z'_y = x^y \ln x;$ e) $z'_x = \frac{y}{x\sqrt{x^2 - y^2}}, z'_y = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - y^2}};$ f) $z'_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2};$ g) $z'_x = \cotg(x - 2y), z'_y = -2 \cotg(x - 2y);$ h) $z'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \frac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}.$

Příklad 1.1.4. Dokažte, že funkce $z = e^{\frac{x}{y^2}}$ vyhovuje rovnici $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Řešení:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y^2}} \frac{1}{y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{\frac{x}{y^2}} \left(\frac{-2x}{y^3} \right).$$

Dosadíme do rovnice:

$$2x e^{\frac{x}{y^2}} \frac{1}{y^2} - \frac{2xy}{y^3} e^{\frac{x}{y^2}} = e^{\frac{x}{y^2}} \left(\frac{2x}{y^2} - \frac{2x}{y^2} \right) = 0.$$

Příklad 1.1.5. Dokažte, že funkce $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ vyhovuje rovnici $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$.

Příklad 1.1.6. Dokažte, že funkce $z = e^{\frac{x}{y}} \ln y$ vyhovuje rovnici $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\ln y}$.

Příklad 1.1.7. Dokažte, že funkce $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ vyhovuje rovnici $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$.

Příklad 1.1.8. Najděte parciální derivace funkce u podle jednotlivých proměnných

a) $u = x^2y^2 - yz^2 - 4xy + 6xz$

b) $u = ze^{x^3 \cos(x-y^2)}$

c) $u = e^{\sin(z-2xy)}$

d) $u = \arctg\left(\frac{x-y}{z}\right)$

e) $u = \ln \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}$

f) $u = 2x^3 - y^2w - z^2w^2 + 5yzw$

Řešení: a) $u'_x = 2xy^2 - 4y + 6z$, $u'_y = 2x^2y - z^2 - 4x$, $u'_z = -2yz + 6x$;
 b) $u'_x = x^2z e^{x^3 \cos(x-y^2)} [3 \cos(x-y^2) - x \sin(x-y^2)]$, $u'_z = e^{x^3 \cos(x-y^2)}$,
 $u'_y = 2x^3yz \sin(x-y^2) e^{x^3 \cos(x-y^2)}$; c) $u'_x = -2y e^{\sin(z-2xy)} \cos(z-2xy)$,
 $u'_y = -2x e^{\sin(z-2xy)} \cos(z-2xy)$, $u'_z = e^{\sin(z-2xy)} \cos(z-2xy)$; d) $u'_x =$
 $\frac{z}{x^2+y^2+z^2-2xy}$, $u'_y = -\frac{z}{x^2+y^2+z^2-2xy}$, $u'_z = \frac{y-x}{x^2+y^2+z^2-2xy}$; e) $u'_x = -\frac{x}{x^2+z^2}$,
 $u'_y = \frac{1}{y}$, $u'_z = -\frac{z}{x^2+z^2}$; f) $u'_x = 6x^2$, $u'_y = -2yw + 5zw$, $u'_z = -2zw^2 + 5yw$,
 $u'_w = -y^2 - 2z^2w + 5yz$.

Příklad 1.1.9. Dokažte, že funkce $u = x + \frac{x-y}{y-z}$ vyhovuje rovnici $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$.

Příklad 1.1.10. Najděte parciální derivace funkce f v bodě A podle všech proměnných

a) $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$, $A = [3, 2]$ b) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $A = [3, 2, 1]$

c) $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $A = [1, 1]$ d) $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$, $A = [1, 1, 1]$

Řešení: a) $f'_x(A) = -4$, $f'_y(A) = 6$; b) $f'_x(A) = \frac{3}{7}$, $f'_y(A) = \frac{2}{7}$, $f'_z(A) = \frac{1}{7}$;
 c) $f'_x(A) = 0$, $f'_y(A) = 0$; d) $f'_x(A) = 2$, $f'_y(A) = 0$, $f'_z(A) = -2$.

Příklad 1.1.11. Najděte hodnotu součtu $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$ v bodě $A = [1, 1, 1]$ pro funkci $f(x, y, z) = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$.

Řešení:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_A = \frac{1}{1+x+y^2+z^3} + \frac{2y}{1+x+y^2+z^3} + \frac{3z^2}{1+x+y^2+z^3} \Big|_A = \frac{3}{2}.$$

Příklad 1.1.12. Najděte gradient funkce f v bodě A

$$\text{a) } f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad A = [2, 1] \quad \text{b) } f(x, y, z) = x e^{z+2y}, \quad A = [1, -1, 2]$$

$$\text{c) } f(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad A = [1, 2, 2] \quad \text{d) } f(x, y, z) = xyz, \quad A = [1, 2, 3]$$

$$\text{Řešení: a) } \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_A = 3x^2 - 3y \Big|_A = 9, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_A = 3y^2 - 3x \Big|_A = -3.$$

Z toho gradient funkce v bodě A je vektor $\text{grad}f(A) = (9, -3)$.

$$\text{b) } \nabla f(A) = (1, 2, 1); \quad \text{c) } \nabla f(A) = \frac{1}{81}(7, -4, -4); \quad \text{d) } \nabla f(A) = (6, 3, 2).$$

Příklad 1.1.13. Napište rovnici tečné roviny k následujícím plochám v bodě $T = [x_0, y_0, z_0]$:

$$\text{(a) } z = \frac{x^2}{2} - y^2, \quad T = [2, -1, ?]$$

$$\text{(b) } x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0, \quad T = [1, 2, -1]$$

$$\text{(c) } z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy, \quad T = [3, 4, ?]$$

$$\text{(d) } 3x^4 - 4y^3z + 4xyz^2 - 4z^3x + 1 = 0, \quad T = [?, 1, 1]$$

$$\text{(e) } z = 2x^2 - 4y^2, \quad T = [2, 1, ?]$$

Řešení: a) Nejdříve spočítáme třetí souřadnici bodu T . Bod leží na ploše, a proto $z_0 = f(2, -1) = 1$. Dále

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(T) = 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(T) = 2.$$

Rovnice tečné roviny ρ k ploše $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ v bodě $T = [2, -1, 1]$:

$$\rho : 2(x - 2) + 2(y + 1) - (z - 1) = 0.$$

Po úpravě dostaneme rovnici tečné roviny $\rho : 2x + 2y - z - 1 = 0$.

b) Plocha je daná implicitně. Bod T leží na dané ploše, protože souřadnice tohoto bodu splňují rovnici plochy: $1 + 8 - 1 - 2 - 6 = 0$. Spočítáme parciální derivace funkce $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6$:

$$F'_x = 3x^2 + yz, \quad F'_y = 3y^2 + xz, \quad F'_z = 3z^2 + xy; \quad F'_x(T) = 1, \quad F'_y(T) = 11, \quad F'_z(T) = 5.$$

Potom

$$\rho : 1(x - 1) + 11(y - 2) + 5(z + 1) = 0.$$

Po úpravě dostaneme rovnici tečné roviny $\rho : x + 11y + 5z - 18 = 0$.

c) $T = [3, 4, -7]$ a $\rho : 17x + 11y + 5z - 60 = 0$; d) $3x^4 - 4 + 4x - 4x + 1 = 0 \Rightarrow 3x^4 = 3 \Rightarrow x = 1$ anebo $x = -1 \Rightarrow T_1 = [1, 1, 1]$ a $\rho_1 : 3x - 2y - 2z + 1 = 0$ a také $T_2 = [-1, 1, 1]$ a $\rho_2 : 3x + 4y - 1 = 0$; e) $T = [2, 1, 4]$ a $\rho : 8x - 8y - z - 4 = 0$.

Příklad 1.1.14. Najděte všechny parciální derivace druhého řádu funkce f podle jednotlivých proměnných

$$\begin{array}{ll} a) f(x, y) = x e^y & b) f(x, y) = x + y + \frac{xy}{x-y} \\ c) f(x, y) = xy + \cos(x - y) & d) f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \\ e) f(x, y, z) = xyz - 3x + 7y + 5z & f) f(x, y, z) = \ln\left(\frac{y z^2}{x}\right) \end{array}$$

Řešení: a) Nejdříve spočítáme parciální derivace prvního řádu dané funkce:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x e^y.$$

$$\text{Potom } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial f^2}{\partial y^2} = x e^y, \quad \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x} = e^y.$$

$$\begin{array}{l} b) f''_{xx} = \frac{2y^2}{(x-y)^3}, \quad f''_{xy} = -\frac{2xy}{(x-y)^3}, \quad f''_{yy} = \frac{2x^2}{(x-y)^3}; \quad c) f''_{xx} = -\cos(x-y), \\ f''_{xy} = 1 + \cos(x-y), \quad f''_{yy} = -\cos(x-y); \quad d) f''_{xx} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ f''_{yy} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad e) f''_{xx} = 0, \quad f''_{yy} = 0, \quad f''_{zz} = 0, \quad f''_{xy} = z, \quad f''_{xz} = y, \quad f''_{yz} = x; \\ f) f''_{xx} = \frac{1}{x^2}, \quad f''_{yy} = -\frac{1}{y^2}, \quad f''_{zz} = -\frac{2}{z^2}, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{xz} = 0, \quad f''_{yz} = 0. \end{array}$$

Příklad 1.1.15. Dokažte, že funkce $z = e^x(x \cos y - y \sin y)$ vyhovuje diferenciální rovnici $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$.

Příklad 1.1.16. Dokažte, že funkce $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$ vyhovuje diferenciální rovnici $z''_{xx} + 2z''_{xy} = 0$.

Příklad 1.1.17. Dokažte, že funkce $f(x, y) = \frac{xy}{x - y}$ vyhovuje diferenciální rovnici $f''_{xx} + 2f''_{xy} + f''_{yy} = \frac{2}{x - y}$.

Příklad 1.1.18. Dokažte, že funkce $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ vyhovuje diferenciální rovnici $u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$.

Příklad 1.1.19. Najděte $z_{xxxx}^{(4)}$ kde $z = y \ln(xy)$.

$$\text{Řešení: } z'_x = y \frac{1}{xy} y = \frac{y}{x}, \quad z''_{xx} = -\frac{y}{x^2}, \quad z'''_{xxx} = \frac{2y}{x^3} \Rightarrow \underline{\underline{z_{xxxx}^{(4)} = \frac{2}{x^3}}}$$

Příklad 1.1.20. Najděte z'''_{xyy} kde $z = \ln(x^2 + y^2)$.

$$\text{Řešení: } z'''_{xyy} = \frac{4x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Příklad 1.1.21. Dokažte, že funkce $z = x e^y + y e^x$ vyhovuje diferenciální rovnici $z'''_{xxx} + z'''_{yyy} = x z'''_{xyy} + y z'''_{xxy}$.

1.2 Lokální extrémy funkce dvou proměnných

Lokální maximum (resp. minimum) funkce $z = f(x, y)$ je hodnota $z_0 = f(x_0, y_0)$ v bodě $T = [x_0, y_0]$, jestliže v libovolném bodě nějakého okolí bodu T jsou funkční hodnoty funkce f menší (resp. větší) než z_0 .

Při hledání bodu extrému funkce 2 proměnných postupujeme podobně jako při hledání extrému funkce jedné proměnné: Najdeme stacionární bod funkce f (bod ve kterém je gradient funkce roven 0), potom pomocí druhých parciálních derivací zjistíme, zda v tomto bodě existuje maximum nebo minimum, ev. že v stacionárním bodě nemá funkce extrém.

Hledání extrému funkce $z = f(x, y)$:

1. Spočítáme $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ a položíme je rovny nule.
2. Najdeme stacionární bod $T = [x_0, y_0]$, ve kterém $\frac{\partial f}{\partial x}(T) = 0$ a zároveň $\frac{\partial f}{\partial y}(T) = 0$.
3. Spočítáme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(T)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(T)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(T)$ a z těchto tří derivací vytvoříme jedno číslo:

$$D(T) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(T) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(T) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(T) \right)^2.$$

4. Podle znaménka $D(T)$ rozhodneme o existenci extrému v bodě $T = [x_0, y_0]$.
 - (a) Pokud $D(T) < 0$, funkce nemá v tomto bodě lokální extrém.
 - (b) Pokud $D(T) > 0$, funkce má v bodě T extrém. V tomto případě ještě musíme rozhodnout, zda jde o maximum nebo minimum:
 - (i) Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(T) > 0$, funkce f má v bodě T lokální minimum $z_0 = f(x_0, y_0)$.
 - (ii) Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(T) < 0$, funkce f má v bodě T lokální maximum $z_0 = f(x_0, y_0)$.
 - (c) Pokud $D(T) = 0$, nemůžeme na základě této metody rozhodnout o existenci extrému v bodě T .

Poznámka. Rovnice $\frac{\partial f}{\partial x}(T) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(T) = 0$ vlastně tvrdí, že $\mathbf{grad} f(T) = \mathbf{0}$.

Příklad 1.2.1. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Řešení: Hledáme stacionární body – body, ve kterých má funkce nulový gradient:

$$\mathbf{grad} f = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \Rightarrow y = x^2, \\ 3y^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = y^2. \end{cases}$$

Po dosazení za y do druhé rovnice máme

$$x = x^4 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0.$$

Potom $x = 0$ nebo $x = 1$. Dopočítáme příslušné hodnoty y a dostáváme dva stacionární body $A = [0, 0]$, $B = [1, 1]$.

Vypočítáme druhé parciální derivace funkce:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

V bodě $A = [0, 0]$ máme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = -3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 0$.

Potom $D(A) = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$. Funkce nemá v bodě A lokální extrém.

Teď vyšetříme bod $B = [1, 1]$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(B) = -3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(B) = 6$.

Z toho $D(B) = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$, a funkce má v bodě B lokální extrém.

Vidíme, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) = 6 > 0$. V bodě B nastane minimum.

Ještě spočítáme hodnotu funkce v tomto bodě: $f(B) = 1 + 1 - 3 = -1$.

Příklad 1.2.2. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$.

Řešení:

$$\mathbf{grad} f = \left(e^{-x^2 - y^2}(-2x), e^{-x^2 - y^2}(-2y) \right) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Bod $A = [0, 0]$ je jediný stacionární bod. Vypočítáme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{-x^2 - y^2}(2x^2 - 1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy e^{-x^2 - y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{-x^2 - y^2}(2y^2 - 1).$$

V bodě $A = [0, 0]$ máme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = -2$.
 $D(A) = -2 \cdot (-2) = 4 > 0$

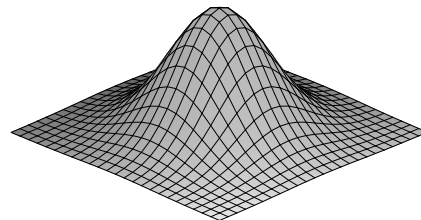
a zároveň $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$.

Funkce má v bodě $A = [0, 0]$

lokální maximum; $f(A) = 1$.

Na obrázku je graf funkce v

okolí stacionárního bodu.



$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

Příklad 1.2.3. Zjistěte, zda funkce $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$ má lokální extrémy v bodech $A = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ a $B = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$.

Řešení:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x - 4y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 4x - 4y.$$

Dosadíme bod $A = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$: $\frac{\partial z}{\partial x}(A) = 4 \cdot 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 0$,

a $\frac{\partial z}{\partial y}(A) = 4 \cdot 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 0$. Bod $A = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ je stacionární bod.

Podobně můžeme dosadit i bod $B = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$ do prvních parciálních derivací a ukázat, že i bod B je stacionární bod.

Druhé parciální derivace funkce jsou $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 4$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4$. Tedy $D = (12x^2 - 4)(12y^2 - 4) - (-4)^2$.

V bodě $A = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ máme $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(A) = 20$ a $D(A) = 400 - 16 > 0$. Funkce má v bodě $A = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ lokální minimum.

V bodě $B = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$ máme také $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(B) = 20$ a $D(B) = 400 - 16 > 0$. Funkce má i v bodě $B = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$ lokální minimum.

Příklad 1.2.4. Najděte lokální extrémy následujících funkcí $z = f(x, y)$

- | | |
|--|--|
| (a) $z = x^2 - xy + y^2 - 2y + 1$ | (b) $z = x + y + \frac{1}{xy}$ |
| (c) $z = 2x^3 + 3x^2 + y^3 - 3y - 12x$ | (d) $z = 2x^3 + xy^2 - 216x$ |
| (e) $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x$ | (f) $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$ |
| (g) $z = x^4 + 8x^2 + y^2 - 4y$ | (h) $z = 12xy - x^3 - y^3$ |
| (i) $z = x^2 + xy - 3y^2 + y + x - 1$ | (j) $z = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}$ |

Řešení: (a) $\mathbf{grad} f = (2x - y, -x + 2y - 2) = (0, 0) \Rightarrow T = [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$ stacionární bod. Dále $f''_{xx} = 2$, $f''_{yy} = 2$, $f''_{xy} = -1$ a $D(T) = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$. Funkce má v bodě T lokální minimum $\frac{1}{3}$.

(b) $\mathbf{grad} f = (1 - \frac{1}{x^2y}, 1 - \frac{1}{xy^2}) = (0, 0) \Rightarrow T = [1, 1]$ jediný stacionární bod.
 $f''_{xx} = \frac{2}{x^3y}$, $f''_{yy} = \frac{2}{xy^3}$, $f''_{xy} = \frac{1}{x^2y^2}$; $D(T) = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$, $f''_{xx}(T) = 2 > 0$.
 Funkce má v bodě $T = [1, 1]$ lokální minimum 3.

$$(c) \text{ grad } f = (6x^2 + 6x - 12, 3y^2 - 3) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1) = 0, \\ y^2 = 1. \end{cases}$$

Potom $x = -2$ nebo $x = 1$ a $y = -1$ nebo $y = 1$.

Stacionární body jsou $A = [-2, 1]$, $B = [-2, -1]$, $C = [1, 1]$ a $D = [1, -1]$.

$$f''_{xx} = 12x + 6, f''_{yy} = 6y, f''_{xy} = 0 \text{ a } D(x, y) = 36y(2x + 1).$$

$$D(A) = 36(-3) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{neexistuje extrém v bodě } A = [-2, 1]}}$$

$$D(B) = -36(-3) > 0, f''_{xx}(B) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{v } B = [-2, -1] \text{ lokální maximum}}}}$$

$$D(C) = 36(3) > 0, f''_{xx}(C) > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{v } C = [1, 1] \text{ lokální minimum}}}}$$

$$D(D) = -36(3) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{neexistuje extrém v bodě } D = [1, -1]}}$$

(d) $\text{grad } f = (6x^2 + y^2 - 216, 2xy) = (0, 0)$. Z druhé rovnice $x = 0$ nebo $y = 0$.

Je-li $x = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{216} = \pm 6\sqrt{6}$. Je-li $y = 0 \Rightarrow x = \pm 6$.

Stacionární body jsou $A = [0, 6\sqrt{6}]$, $B = [0, -6\sqrt{6}]$, $C = [6, 0]$ a $D = [-6, 0]$.

$$f''_{xx} = 12x, f''_{yy} = 2x, f''_{xy} = 2y \text{ a } D(x, y) = 4(3x^2 - y^2).$$

$$D(A) = 4(-216) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{neexistuje extrém v bodě } A = [0, 6\sqrt{6}]}}$$

$$D(B) = 4(-216) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{neexistuje extrém v bodě } B = [0, -6\sqrt{6}]}}$$

$$D(C) = 4(3 \cdot 36) > 0, f''_{xx}(C) > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{v } C = [6, 0] \text{ lokální minimum}}}}$$

$$D(D) = 4(3 \cdot 36) > 0, f''_{xx}(D) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{v } D = [-6, 0] \text{ lokální maximum}}}}$$

e) minimum -8 v $[-4, -2]$, f) minimum 5 v $[4, 2]$, g) minimum -4 v $[0, 2]$,

h) minimum 64 v $[4, 4]$, i) nemá extrémy, j) minimum 30 v $[\frac{5}{2}, \frac{4}{5}]$.

Příklad 1.2.5. Najděte rozměry balíku tak, aby jeho kombinovaná délka, tzn. obvod podstavy plus výška, byla nanajvýš 108 cm a zároveň měl maximální objem.

Řešení: Rozměry podstavy balíku označíme x , y a výšku z . Chceme aby objem byl maximální, a tak můžeme předpokládat, že kombinovaná délka je $2x + 2y + z = 108$. Z toho $z = 108 - 2x - 2y$. Balík je kvádr a proto jeho objem je $V = xyz = xy(108 - 2x - 2y)$. Navíc musí platit, že $x, y, z > 0$.

Hledáme maximum funkce $f(x, y) = xy(108 - 2x - 2y) = 108xy - 2x^2y - 2y^2x$.

$$\text{grad } f = (108y - 4xy - 2y^2, 108x - 2x^2 - 4xy) = (0, 0) \Rightarrow x = y.$$

Stacionární body řeší rovnici $108x - 6x^2 = 0$.

Máme $6x(18 - x) = 0 \Rightarrow x = 0$ nebo $x = 18$. Ale délka podstavy nemůže být 0 . Zajímá nás jediný stacionární bod $A = [18, 18]$. Vypočítáme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 108 - 4x - 4y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x.$$

V bodě $A = [18, 18]$ máme $f''_{xx}(A) = -4 \cdot 18$, $f''_{xy}(A) = -36$, $f''_{yy}(A) = -4 \cdot 18$.
 $D(A) = 36 \cdot 18^2 - 4 \cdot 18^2 > 0$. Funkce má v bodě A lokální maximum.

Rozměry hledaného balíku budou $x = 18$ cm, $y = 18$ cm a výška $z = 36$ cm.

Příklad 1.2.6. *Najděte rozměry otevřené obdélníkové krabice o objemu 1 m^3 tak, aby její povrch byl minimální.*

Řešení: Hledáme minimum funkce $f(x, y) = xy + 2x \frac{1}{xy} + 2y \frac{1}{xy} = xy + \frac{2}{y} + \frac{2}{x}$,
kde x, y jsou rozměry podstavce balíku a $z = \frac{1}{xy}$ je jeho výška.

Tato funkce má lokální minimum v bodě $A = [\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]$.

Rozměry hledané krabice jsou $x = \sqrt[3]{2}$ m, $y = \sqrt[3]{2}$ m a výška $z = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ m.

STUDIJNÍ JEDNOTKA

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

Cíle studijní jednotky. K této studijní jednotce potřebujete znát diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné. Začátek je krátký úvod do teorie diferenciálních rovnic. Procvičíte si základní pojmy jako diferenciální rovnice, obecné řešení, partikulární řešení. Potom se naučíte řešit dva typy rovnic prvního řádu: separovatelnou a lineární. Na konci této jednotky najdete různé úlohy, kde si můžete vyzkoušet, zda dokážete jednotlivé typy rovnic nejen řešit, ale také od sebe rozlišit.

2 Diferenciální rovnice prvního řádu**2.1 Základní pojmy**

Obyčejná diferenciální rovnice — rovnice, v níž se vyskytuje derivace neznámé funkce jedné proměnné.

Řád diferenciální rovnice — řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje.

Řešit diferenciální rovnici — najít všechny funkce, které vyhovují dané rovnici.

Obecné řešení diferenciální rovnice n -tého řádu — řešení, které závisí na n různých parametrech takovým způsobem, že všechna řešení rovnice můžeme získat vhodnou volbou těchto konstant.

Partikulární řešení diferenciální rovnice n -tého řádu — řešení, které dostaneme z obecního řešení konkrétní volbou všech n parametrů.

Integrální křivka — řešení diferenciální rovnice, graf řešení diferenciální rovnice.

Počáteční úloha — problém najít partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje tzv. počáteční podmínky.

Může se stát, že diferenciální rovnice nemá žádné řešení. Diferenciální rovnice, s nimiž se zde setkáte, řešení mají. Obecné podmínky pro existenci řešení najdete v Matematice 2.

Příklad 2.1.1. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y''' = 18 e^{3x} + \sin x$.

Řešení: Je to obyčejná diferenciální rovnice třetího řádu, velmi speciální, protože pravá strana závisí pouze na x . Řešení dostaneme postupným integrováním.

$$y''' = 18 e^{3x} + \sin x \Rightarrow y'' = \int (18 e^{3x} + \sin x) dx = 6 e^{3x} - \cos x + C_1,$$

$$y' = \int (6 e^{3x} - \cos x + C_1) dx = 2 e^{3x} - \sin x + C_1 x + C_2.$$

A konečně obecné řešení bude

$$y = \int (2 e^{3x} - \sin x + C_1 x + C_2) dx = \underline{\underline{\frac{2}{3} e^{3x} + \cos x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3.}}$$

Protože šlo o rovnici třetího řádu, jsou v obecném řešení tři parametry. Dosazením konkrétních hodnot za konstanty C_1, C_2, C_3 se dostanou partikulární řešení této rovnice.

Příklad 2.1.2. Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' = 12 x^3 + 8$, které splňuje počáteční podmínky $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Řešení: Je-li $y'' = 12 x^3 + 8$, potom $y' = \int (12 x^3 + 8) dx = 3 x^4 + 8 x + C_1$.

Obecné řešení bude $y = \int (3 x^4 + 8 x + C_1) dx = \frac{3}{5} x^5 + 4 x^2 + C_1 x + C_2$.

Konstanty budeme počítat dosazením počátečních podmínek do y a y' :

$$0 = y(0) = \frac{3}{5} 0^5 + 4 \cdot 0^2 + C_1 0 + C_2 = C_2; \quad 1 = y'(0) = 3 \cdot 0^4 + 8 \cdot 0 + C_1 = C_1.$$

Z této soustavy rovnic dostaneme $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Hledané partikulární řešení je $y = \underline{\underline{\frac{3}{5} x^5 + 4x^2 + x.}}$

Příklad 2.1.3. Najděte integrální křivku rovnice $y' = \operatorname{tg} x$, která prochází bodem $[0, 1]$.

Řešení: Integrální křivka procházející daným bodem je partikulární řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$.

$$y' = \operatorname{tg} x \Rightarrow y = \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(-\sin x)}{\cos x} dx =$$

$$= - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = - \ln |\cos x| + C.$$

Obecné řešení je $y = - \ln |\cos x| + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k celé.

Dále $1 = y(0) = - \ln |\cos 0| + C = 0 + C$. Dostali jsme, že $C = 1$.

Potom hledané řešení je $y = \underline{\underline{1 - \ln |\cos x|.}}$

Příklad 2.1.4. Ukažte, že funkce $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{3x}$ je obecné řešení rovnice $y''' - 3y'' = 0$, a najděte partikulární řešení, pro které $y(0) = 3$, $y'(0) = 6$, $y''(0) = 18$.

$$\text{Řešení: } y' = C_2 + 3 C_3 e^{3x}, \quad y'' = 9 C_3 e^{3x}, \quad y''' = 27 C_3 e^{3x}.$$

$$\text{Po dosazení } y''' - 3y'' = 27 C_3 e^{3x} - 3 \cdot 9 C_3 e^{3x} = 0.$$

$$\text{Dále } 3 = y(0) = C_1 + C_3, \quad 6 = y'(0) = C_2 + 3 C_3, \quad 18 = y''(0) = 9 C_3.$$

$$\text{Řešíme soustavu rovnic: } C_1 + C_3 = 3, \quad C_2 + 3 C_3 = 6, \quad 9 C_3 = 18.$$

$$\text{Z toho } C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 2. \text{ Hledané partikulární řešení je } \underline{y = 1 + 2 e^{3x}}.$$

Příklad 2.1.5. Ukažte, že funkce $y = C_1 (x^2 + 1) + C_2 (x + (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x)$ je obecné řešení rovnice $(x^2 + 1) y'' - 2y = 0$, a najděte partikulární řešení této rovnice, pro které platí $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

$$\text{Řešení: } y' = C_1 \cdot 2x + C_2 \left(1 + 2x \operatorname{arctg} x + \frac{x^2+1}{x^2+1} \right) = C_1 \cdot 2x + C_2 (2 + 2x \operatorname{arctg} x),$$

$$y'' = 2C_1 + C_2 \left(2 \operatorname{arctg} x + \frac{2x}{x^2+1} \right).$$

Po dosazení dostaneme:

$$(x^2 + 1) y'' - 2y =$$

$$2(x^2+1)C_1 + C_2 (2(x^2+1) \operatorname{arctg} x + 2x) - 2C_1(x^2+1) - 2C_2(x + (x^2+1) \operatorname{arctg} x) = 0.$$

Funkce řeší diferenciální rovnici. Dále dosadíme počáteční podmínky

$$1 = y(0) = C_1 + C_2 \cdot 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1,$$

$$0 = y'(0) = 2 \cdot 0 \cdot C_1 + 2 C_2 = 2 C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

$$\text{Hledané partikulární řešení je } \underline{y = x^2 + 1}.$$

Příklad 2.1.6. Ukažte, že funkce $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{2x}$ je obecné řešení rovnice $y'' + y = 5 e^{2x}$, a najděte partikulární řešení, pro která platí

$$a) y(0) = 6, \quad y'(0) = 6$$

$$b) y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

$$c) y(0) = \frac{3}{2}, \quad y'(0) = \frac{5}{2}$$

$$d) y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^\pi, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2e^\pi - 1$$

$$\text{Řešení: } a) y = 5 \cos x + 4 \sin x + e^{2x}; \quad b) y = e^{2x} - 3 \sin x;$$

$$c) y = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x + e^{2x}; \quad d) y = \cos x + e^{2x}.$$

Příklad 2.1.7. Ukažte, že funkce $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x}$ je obecné řešení rovnice $y''' - 3y' + 2y = 0$, a najděte partikulární řešení rovnice, které splňuje počáteční podmínky $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 11$.

$$\text{Řešení: } y = -e^x + 4x e^x + e^{-2x}$$

Další část této jednotky bude věnovaná diferenciálním rovnicím prvního řádu. Naučíte se řešit dva typy rovnic prvního řádu.

2.2 Separovatelné diferenciální rovnice

Separovatelná diferenciální rovnice — rovnice, která se dá upravit na tvar

$$y' = f(x) \cdot g(y).$$

Pokud rozpoznáte separovatelnou rovnici postupujte při řešení následovně:

1. y' nahraďte výrazem $\frac{dy}{dx}$;
2. celou rovnici vynásobte dx ;
3. odseparujte proměnné, tzn. členy, které obsahují y , převed'te na levou stranu rovnice spolu s dy a členy, které obsahují x , převed'te na pravou stranu spolu s dx ;
4. integrujte obě strany poslední rovnice.

Příklad 2.2.1. Řešte separovatelnou diferenciální rovnici $y' = \frac{1 - 2x}{y^3}$.

Řešení: Postupujeme podle návodu: 1.) $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x}{y^3}$

2.) $dy = \frac{1 - 2x}{y^3} dx$

3.) $y^3 dy = (1 - 2x) dx$

4.) $\int y^3 dy = \int (1 - 2x) dx$

Z toho po integrování dostaneme $\frac{y^4}{4} + C = x - x^2 + K$, kde C a K jsou integrační konstanty. Převedeme-li konstantu C na pravou stranu, dostaneme řešení ve tvaru $\frac{y^4}{4} = x - x^2 + K - C$. Označíme konstantu $K - C = c$ a dostaneme obecné řešení rovnice

$$\underline{\underline{\frac{y^4}{4} = x - x^2 + c.}}$$

Tuto úpravu s konstantami můžete udělat pokaždé, a proto stačí psát integrační konstantu pouze jednou (obvykle ji píšeme do pravé strany).

Řešení, která se dostanou při řešení separovatelné rovnice, jsou obvykle v **implicitním tvaru**. Úpravou se někdy podaří získat **explicitní tvar** řešení $y = \varphi(x)$.

Příklad 2.2.2. Řešte separovatelnou diferenciální rovnici $(1 + y^2) dx + (1 + x^2) dy = 0$.

Řešení: Upravíme na $(1 + x^2) dy = -(1 + y^2) dx$ a pokračujeme 3. krokem:

$$\frac{1}{(1 + y^2)} dy = -\frac{1}{(1 + x^2)} dx; \quad \int \frac{1}{(1 + y^2)} dy = -\int \frac{1}{(1 + x^2)} dx;$$

$\arctg y = -\arctg x + C$. Obecné řešení bude $\arctg x + \arctg y = C$.

Příklad 2.2.3. Řešte separovatelnou diferenciální rovnici $y' \operatorname{tg} x = y$.

Řešení: 1.) $\operatorname{tg} x \frac{dy}{dx} = y$; 2.) $\operatorname{tg} x \, dy = y \, dx$; 3.) $\frac{1}{y} \, dy = \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$;

4.) $\int \frac{1}{y} \, dy = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$; $\int \frac{1}{y} \, dy = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} \, dx$.

Po integrování dostaneme

$$\ln |y| = \ln |\sin x| + c.$$

Získané řešení upravíme: $|y| = e^{\ln |\sin x| + c} = e^{\ln |\sin x|} \cdot e^c = e^c |\sin x|$.

Označíme $C = \pm e^c$. Obecně takové $C \neq 0$. Někdy můžeme připustit i $C = 0$, jako v tomto příkladě. Můžeme tedy napsat obecné řešení naší rovnice ve tvaru

$$\underline{\underline{y = C \sin x.}}$$

Příklad 2.2.4. Najděte partikulární řešení separovatelné diferenciální rovnice

$$(1 + e^x) y y' = e^x, \quad y(0) = \sqrt{2}.$$

Řešení: 1.) $(1 + e^x) y \frac{dy}{dx} = e^x$; 2.) $(1 + e^x) y \, dy = e^x \, dx$;

3.) $y \, dy = \frac{e^x}{(1 + e^x)} \, dx$; 4.) $\int y \, dy = \int \frac{e^x}{(1 + e^x)} \, dx$.

Dostali jsme obecné řešení ve tvaru $\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C$.

Hledáme partikulární řešení: $\frac{\sqrt{2}^2}{2} = \ln(1 + e^0) + C$. Potom $C = 1 - \ln 2$.

Partikulární řešení je $\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + 1 - \ln 2$.

Po úpravě $\underline{\underline{y = \sqrt{2 \ln(1 + e^x) + 2 - \ln 4}}}$.

Příklad 2.2.5. Řešte separovatelné diferenciální rovnice

a) $x y y' = 1 - x^2$

b) $y' = y \operatorname{tg} x$

c) $y' + \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

d) $y' = (y - 1)(y - 2)$

e) $y' = e^{x+y}$

f) $(xy^2 + x) \, dx + (y - x^2y) \, dy = 0$

Řešení: a) $\frac{y^2}{2} = \ln |x| - \frac{x^2}{2} + c$, po úpravě $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$, $C > 0$;

b) $y = \frac{C}{\cos x}$; c) $C = \arcsin x + \arcsin y$, $y = 1$, $y = -1$;

d) integrál dle dy počítejte rozkladem na parciální zlomky.

Řešení je $\ln \left| \frac{y-2}{y-1} \right| = x + c$. Po úpravě $y - 2 = Ce^x(y - 1)$. Další řešení je $y = 1$;

e) Využijte vztah $e^{x+y} = e^x e^y$ a $e^{-y} = \frac{1}{e^y}$. Řešení bude $e^x + e^{-y} = C$;

f) $\frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + c$. Po úpravě $y^2 + 1 = C(x^2 - 1)$.

2.3 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu — rovnice, která se dá upravit na tvar

$$y' + f(x) \cdot y = g(x). \quad (\text{LR})$$

Homogenní lineární dif. rovnice prvního řádu — rovnice tvaru $y' + f(x) \cdot y = 0$.

Metoda variace konstanty — metoda na řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu, při které se nejdřív metodou separace proměnných najde řešení homogenní rovnice

$$y' + f(x) \cdot y = 0.$$

Toto řešení se upraví na tvar $y = C \cdot F(x)$. Potom se předpokládá, že $C = C(x)$, tj. konstanta závisí na x , a řešení lineární rovnice hledáme ve tvaru

$$y = C(x) \cdot F(x).$$

Předpokládaný tvar řešení se dosadí do diferenciální rovnice (LR). Vznikne rovnice typu $C'(x) = \phi(x)$. Z toho se vypočítá konkrétní funkce $C(x)$.

Příklad 2.3.1. Řešte lineární diferenciální rovnici $y' + 2xy = e^{-x^2}$.

Řešení: Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici $y' + 2xy = 0$:

$$y' = -2xy; \quad \frac{dy}{dx} = -2xy; \quad \frac{1}{y} dy = -2x dx; \quad \int \frac{1}{y} dy = \int -2x dx; \quad \ln |y| = -x^2 + c.$$

Potřebujeme vyjádřit y , a proto musíme dále upravovat:

$$|y| = e^{-x^2+c}; \quad |y| = e^{-x^2} \cdot e^c; \quad y = C \cdot e^{-x^2}, \quad \text{kde } C = \pm e^c.$$

Našli jsme obecné řešení lineární homogenní rovnice $y' + 2xy = 0$. Obecné řešení lineární nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru $y = C(x) \cdot e^{-x^2}$. Abychom mohli určit $C(x)$, musíme dosadit do diferenciální rovnice, a k tomu musíme nejdřív y derivovat.

$$y = C(x) \cdot e^{-x^2}; \quad y' = C'(x) \cdot e^{-x^2} + C(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x).$$

Po dosazení dostaneme podmínku pro $C'(x)$:

$$C'(x) \cdot e^{-x^2} + C(x) \cdot e^{-x^2}(-2x) + 2x \cdot C(x) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2}.$$

$$C'(x) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2}; \quad C'(x) = 1.$$

Z toho integrováním dostaneme, že $C(x) = \int 1 dx = x + K$.

Zbývá už jenom dosadit za $C(x)$. Hledané obecné řešení bude

$$y = C(x) \cdot e^{-x^2} = (x + K) \cdot e^{-x^2} = \underline{\underline{K \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2}}}.$$

Příklad 2.3.2. Řešte lineární diferenciální rovnici $y' - \frac{xy}{1+x^2} = x$, $y(0) = 2$.

Řešení: $y' = \frac{xy}{1+x^2}$; $\int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$.

$\ln |y| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c = \ln \sqrt{1+x^2} + c$, potom $y = C \cdot \sqrt{1+x^2}$.

Variace konstanty: $y = C(x) \cdot \sqrt{1+x^2}$; $y' = C'(x) \cdot \sqrt{1+x^2} + C(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Po dosazení: $C'(x)\sqrt{1+x^2} = x$; $C'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $C(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Substituce $1+x^2 = t^2$ vede na $C(x) = \sqrt{1+x^2} + K$.

Obecné řešení dané rovnice je $y = K \cdot \sqrt{1+x^2} + x^2 + 1$.

Dosadíme počáteční podmínku: $2 = y(0) = K \cdot \sqrt{1} + 1 = K + 1$.

Z toho $K = 1$ a hledané partikulární řešení bude $y = \sqrt{1+x^2} + x^2 + 1$.

Příklad 2.3.3. Najděte obecné řešení rovnice $xy' + y - e^x = 0$.

Řešení: Rovnice není ve tvaru lineární diferenciální rovnice. Nejdřív ji musíme upravit. Převědeme e^x na pravou stranu a pak celou rovnici vydělíme x . Dostaneme

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}.$$

Tato rovnice už je ve tvaru (LR) a vyřešíme ji metodou variace konstanty.

$y' + \frac{y}{x} = 0$; $y' = -\frac{y}{x}$; $\int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{x} dx$; $\ln |y| = -\ln |x| + c$; $y = \frac{C}{x}$.

Variace konstanty: $y = \frac{C(x)}{x}$; $y' = \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2}$.

Po dosazení: $\frac{C'(x)}{x} = \frac{e^x}{x}$; $C'(x) = e^x$; $C(x) = e^x + K$. Pak $y = \frac{e^x + K}{x}$.

Příklad 2.3.4. Je dán elektrický RL obvod s cívkou o samoindukčnosti L , ohmickým odporem R a napětím E . Dle Kirchhoffova zákona závislost proudu I na čase t vyjadřuje diferenciální rovnice

$$L \frac{dI}{dt} + IR = E.$$

Najděte vzorec pro řešení $I(t)$, jestliže víte, že na počátku byl proud nulový.

Řešení: Rovnici upravíme na tvar $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L}$ a řešíme jako (LR):

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0, \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{IR}{L}, \quad \frac{1}{I} dI = -\frac{R}{L} dt, \quad \int \frac{1}{I} dI = -\int \frac{R}{L} dt.$$

Řešení homogenní rovnice bude $\ln |I| = -\frac{R}{L}t + c \Rightarrow I = C e^{-\frac{R}{L}t}$.

Variace konstanty: $I = C(t) e^{-\frac{R}{L}t}$, $I' = C'(t) e^{-\frac{R}{L}t} - C(t) \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$.

Po dosazení $C'(t) e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{L}$, $C'(t) = \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t}$, $C(t) = \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + K$.

Obecné řešení je tedy $I = \left(\frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + K \right) e^{-\frac{R}{L}t} = K e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$.

Z počáteční podmínky $I(0) = 0$ dostaneme, že $K = -\frac{E}{R}$.

Hledaný vzorec pro proud v elektrickém RL obvodu je $I = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$.

Příklad 2.3.5. Kondenzátor o kapacitě $C = 10^{-3}F$ je zapojen do série s odporem $R = 200\Omega$ a nabíjen ze sériově zapojeného zdroje o napětí $E = 12V$. Určete napětí na kondenzátoru jednu sekundu po zapojení zdroje za předpokladu, že v čase $t = 0$ byl kondenzátor vybit.

Řešení: Podle druhého Kirchhoffova zákona závislost proudu I na čase t vyjadřuje integrální rovnice

$$\frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau + RI = E.$$

Po dosazení vztahu $I(t) = \frac{dQ}{dt}$ do této rovnice dostaneme rovnici pro náboj na kondenzátoru

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E.$$

Dosadíme hodnoty za konstanty a dostaneme lineární diferenciální rovnici

$$Q' + 5Q = 0,06.$$

Obecné řešení této rovnice je $Q(t) = K e^{-5t} + 0,012$.

Partikulární řešení s počáteční podmínkou $Q(0) = 0$ je $Q(t) = 0,012 \left(1 - e^{-5t} \right)$.

Napětí na kondenzátoru v čase t se rovná $E_C(t) = \frac{1}{C} Q(t) = 12 \left(1 - e^{-5t} \right)$.

Z toho

$$\underline{\underline{E_C(1) = 12(1 - e^{-5}) = 11,92.}}$$

Kondenzátor je během jedné sekundy nabit téměř na maximální hodnotu 12 V.

Příklad 2.3.6. Řešte lineární diferenciální rovnice

a) $y' + \frac{y}{x} = 6x$

b) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$

c) $y' + 2xy = x e^{-x^2}$

d) $xy' - \frac{y}{x+1} = x$

e) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$

f) $y' + y \cos x = \sin x \cos x$

Řešení: a) $y = \frac{C}{x} + 2x^2$; b) $y = C \cos x + \sin x$; c) $y = e^{-x^2} (\frac{x^2}{2} + C)$;

d) dostanete $\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x(x+1)} dx$. Použijte rozklad na parciální zlomky.

Výsledek: $y = \frac{x}{x+1} (C + x + \ln |x|)$; e) $y = (1 + x^2)(C + x)$;

f) dostanete $C(x) = \int e^{\sin x} \sin x \cos x dx$. Použijte nejdřív substituci a potom per partes. Výsledek: $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$.

Příklad 2.3.7. Najděte řešení $y(x)$ počáteční úlohy

$$a) y' \cos x - y \sin x = 2x, y(0) = 0 \quad b) y' = 6y - 4e^{6x} \cos 5x + 24, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$$

$$c) y' - \frac{y}{x+1} = x - 1, y(0) = 0 \quad d) y' = \frac{y}{x-5} + 5x - 25, y(6) = 14$$

Řešení: a) $y = \frac{x^2}{\cos x}$; b) $y = \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{5} \sin 5x - 4e^{-6x}\right) e^{6x}$;

c) $y = (x+1)(x - 2 \ln |x+1|)$; d) $y = (5x - 16)(x - 5) = 5x^2 - 41x + 80$.

Příklad 2.3.8. Řešte následující rovnice prvního řádu

$$a) y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x} \quad b) xy' + y = y^2$$

$$c) y'x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x \quad d) y' = x^2 - x^2y$$

Řešení: a) lineární, řešení: $y = \frac{\operatorname{tg} x + K}{\cos x}$;

b) separovatelná, řešení: $y = \frac{1}{1-Kx}$ a $y = 0$;

c) lineární, řešení: $y = (x^3 + K) \ln x$;

d) lineární a také separovatelná, řešení: $y = 1 + K e^{-\frac{x^3}{3}}$.

STUDIJNÍ JEDNOTKA

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE VYŠŠÍHO ŘÁDU

Cíle studijní jednotky. Naučíte se řešit diferenciální rovnice vyššího řádu s konstantními koeficienty. Nejdřív to budou homogenní rovnice, které se budou řešit pomocí charakteristické rovnice. Nehomogenní rovnice budeme řešit pouze v případě, je-li funkce na pravé straně ve speciálním tvaru. Budete využívat diferenciální počet funkce jedné proměnné a vzorec na řešení kvadratické rovnice.

3 Diferenciální rovnice vyššího řádu

3.1 Homogenní diferenciální rovnice vyššího řádu

Homogenní lineární dif. rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty — rovnice, která má tvar

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0.$$

Fundamentální systém řešení homogenní dif. rovnice n-tého řádu — n lineárně nezávislých partikulárních řešení příslušné rovnice

Charakteristická rovnice — rovnice, která vznikne při hledání partikulárních řešení homogenní rovnice ve tvaru $e^{\lambda x}$

K nalezení obecného řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty je třeba vyřešit příslušnou charakteristickou rovnici

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Jde o algebraickou rovnici, která má n kořenů. Ke každému nalezenému kořenu se přiřadí jedno partikulární řešení a tak se dostane celý fundamentální systém. Na příkladu rovnice druhého řádu ukážeme jak toto přiřazení provést.

Charakteristická rovnice homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu je rovnice $a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$. Tuto rovnici vyřešíme (pomocí vzorce pro kvadratickou rovnici). Mohou nastat tři případy (v závislosti na diskriminantu):

1. Diskriminant je kladný, rovnice má dva navzájem různé reálné kořeny $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Potom fundamentální systém rovnice je

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

2. Diskriminant je nulový, rovnice má dvojnásobný reálný kořen $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Potom fundamentální systém rovnice je

$$y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_2 = x e^{\lambda x}.$$

3. Diskriminant je záporný, rovnice má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$, kde i označuje komplexní jednotku. Hledá se reálné řešení, a proto se zvolí (vzhledem k platnosti Eulerovy identity $e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$) fundamentální systém:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Obecné řešení pak bude (ve všech třech případech): $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

V případě rovnic třetího a vyššího řádu k řešení charakteristické rovnice přiřazujeme fundamentální systém stejným způsobem jako v případě rovnice druhého řádu.

Příklad 3.1.1. Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu

a) $y'' - y' - 2y = 0$ b) $4y'' - 4y' + y = 0$

c) $y'' + 4y = 0$ d) $y'' - 4y' + 13y = 0$

Řešení: a) Napíšeme charakteristickou rovnici $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Tu vyřešíme

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2, \\ -1. \end{cases}$$

Potom $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-x}$, a ze vztahu $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ dostaneme obecné řešení

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}}}$$

b) Charakteristická rovnice je $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$; $\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{1}{2}$.

Charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen, a proto $y_1 = e^{\frac{1}{2}x}$, $y_2 = x e^{\frac{1}{2}x}$. Obecné řešení této rovnice je

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{\frac{1}{2}x}}}$$

c) Charakteristická rovnice je $\lambda^2 + 4 = 0$ a má komplexní kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.
Potom $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$. Obecné řešení bude

$$\underline{y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.}$$

d) Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$.

Dostaneme zase komplexní kořeny $\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm 3i$.

Z toho $y_1 = e^{2x} \cos 3x$, $y_2 = e^{2x} \sin 3x$ a obecné řešení je

$$\underline{y = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x.}$$

Příklad 3.1.2. Najděte řešení Cauchyho úlohy

a) $y'' - 4y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 8$ b) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

Řešení: a) Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 4\lambda = 0$ má reálné kořeny
 $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 4$. Potom $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = e^{4x}$ a $y = C_1 + C_2 e^{4x}$.

Spočítáme $y' = 4 C_2 e^{4x}$ a dosadíme počáteční podmínky

$3 = y(0) = C_1 + C_2$, $8 = y'(0) = 4 C_2$. Řešením této soustavy rovnic je

$C_1 = 1$, $C_2 = 2$. Z toho partikulární řešení bude $\underline{y = 1 + 2 e^{4x}}$.

b) Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ má komplexní kořeny $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$.

Potom $y_1 = e^x \cos x$, $y_2 = e^x \sin x$ a $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$.

Z toho $y' = C_1 e^x \cos x - C_1 e^x \sin x + C_2 e^x \sin x + C_2 e^x \cos x$.

Po dosazení podmínek dostaneme soustavu $C_1 = 0$, $C_1 + C_2 = 2$.

Pak $C_1 = 0$, $C_2 = 2$ a hledané řešení bude $\underline{y = 2 e^x \sin x}$.

Příklad 3.1.3. Najděte obecné řešení rovnic druhého řádu

a) $y'' - 5y' + 6y = 0$

b) $y'' - 4y' + 4y = 0$

c) $y'' - y = 0$

d) $y'' - 4y' + 5y = 0$

e) $y'' + 2y' + 10y = 0$

f) $y'' + 2y = 0$

Řešení: a) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$; b) $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$;

c) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$; d) $y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$;

e) $y = C_1 e^{-x} \cos 3x + C_2 e^{-x} \sin 3x$; f) $y = C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x$.

Příklad 3.1.4. Najděte řešení Cauchyho úlohy

a) $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$

b) $4y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

c) $y'' - 6y' + 13y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$

Řešení: a) $y = 4 e^x + 2 e^{3x}$; b) $y = \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2}$; c) $y = 2e^{3x} \cos 2x$.

3.2 Nehomogenní diferenciální rovnice vyššího řádu

Obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice n -tého řádu

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

je součtem obecného řešení homogenní rovnice (budeme ho značit y_h) a jednoho partikulárního řešení nehomogenní rovnice (budeme ho značit Y),

$$y = y_h + Y.$$

Metoda, pomocí které se dá určit jedno partikulární řešení Y v případě speciální pravé strany, se nazývá **metoda neurčitých koeficientů**. Tvar partikulárního řešení se odhadne z tvaru pravé strany diferenciální rovnice:

Pravá strana $f(x)$	Partikulární řešení Y
$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ kde $P_n(x)$ je polynom n -tého stupně	$Y = e^{\alpha x} x^k Q_n(x)$ α je k -násobný kořen char. rovnice $Q_n(x)$ je obecný polynom n -tého stupně
$f(x) = e^{\alpha x} (M \cos \beta x + N \sin \beta x)$	$Y = e^{\alpha x} x^k (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ $\alpha + i\beta$ je k -násobný kořen char. rovnice A, B jsou reálná čísla

Poznámka. V případě, že α (resp. $\alpha + i\beta$) není kořen charakteristické rovnice, $k = 0$.

Princip superpozice. Jestliže funkce na pravé straně je součtem speciálních pravých stran

$$f(x) = f_1(x) + \dots + f_m(x),$$

potom i partikulární řešení nehomogenní rovnice bude součtem partikulárních řešení pro jednotlivé speciální pravé strany,

$$Y = Y_1 + \dots + Y_m.$$

Příklad 3.2.1. Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu se speciální pravou stranou

a) $y'' - 4y = 10 e^{3x}$

b) $y'' + 4y = 8x^2 - 32x + 4$

c) $y'' + 2y' - 3y = (4x - 3) e^x$

d) $3y'' - 2y' = 10 \cos 2x$

Řešení: a) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' - 4y = 0$. Máme $\lambda^2 - 4 = 0$.

Kořeny charakteristické rovnice jsou $\lambda_{1,2} = \pm 2$ a $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 10 e^{3x} = e^{3x} P_0(x).$$

Zde $\alpha = 3$ není kořen charakteristické rovnice ($3 \neq \pm 2$), a proto $k = 0$. Obecný polynom nultého stupně je konstanta, označíme ji A . Potom partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{3x} x^0 A = A e^{3x}$$

a musí splňovat rovnici $Y'' - 4Y = 10 e^{3x}$. Musíme Y dvakrát derivovat a dosadit do rovnice: $Y = A e^{3x}$, $Y' = 3A e^{3x}$, $Y'' = 9A e^{3x}$. Po dosazení

$$9A e^{3x} - 4A e^{3x} = 10 e^{3x}.$$

Rovnici nejdřív vydělíme e^{3x} a dostaneme $9A - 4A = 10$; $5A = 10$; $A = 2$. Máme jedno partikulární řešení $Y = 2 e^{3x}$ a obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = y_h + Y = \underline{\underline{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + 2 e^{3x}}}.$$

b) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' + 4y = 0$. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 + 4 = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ a $y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 8x^2 - 32x + 4 = e^{0x} (8x^2 - 32x + 4) = e^{0x} P_2(x).$$

Zde $\alpha = 0$ není kořen charakteristické rovnice ($0 \neq \pm 2i$), a proto $k = 0$. Obecný polynom druhého stupně je $Ax^2 + Bx + C$. Potom partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{0x} x^0 (Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx + C$$

a musí splňovat rovnici $Y'' + 4Y = 8x^2 - 32x + 4$. Musíme Y dvakrát derivovat $Y = Ax^2 + Bx + C$, $Y' = 2Ax + B$, $Y'' = 2A$, a po dosazení

$$2A + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = 8x^2 - 32x + 4.$$

Na obou stranách rovnice jsou polynomy druhého stupně. Aby platila rovnost musí se rovnat koeficienty u jednotlivých mocnin (odtud pochází také název metoda neurčitých koeficientů).

$$x^2 : 4A = 8$$

$$x^1 : 4B = -32$$

$$x^0 : 2A + 4C = 4$$

Dostali jsme soustavu rovnic. Po vyřešení máme $A = 2$, $B = -8$, $C = 0$.

Získali jsme jedno partikulární řešení nehomogenní rovnice $Y = 2x^2 - 8x$.

Potom obecné řešení nehomogenní rovnice bude

$$y = y_h + Y = \underline{\underline{C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2x^2 - 8x}}$$

c) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' + 2y' - 3y = 0$. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$ a $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$.

Pravá strana je tvaru

$$f(x) = (4x - 3)e^x = e^x P_1(x).$$

Zde $\alpha = 1$ je jednonásobný kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 1$. Obecný polynom prvního stupně je $Ax + B$, a partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^x x^1 (Ax + B) = e^x (Ax^2 + Bx)$$

a musí splňovat rovnici $Y'' + 2Y' - 3Y = (4x - 3)e^x$.

Musíme Y dvakrát derivovat (jako součin): $Y = e^x (Ax^2 + Bx)$,

$$Y' = e^x (Ax^2 + Bx) + e^x (2Ax + B) = e^x (Ax^2 + Bx + 2Ax + B),$$

$$Y'' = e^x (Ax^2 + Bx + 2Ax + B) + e^x (2Ax + B + 2A) =$$

$$= e^x (Ax^2 + Bx + 2Ax + B + 2Ax + B + 2A) = e^x (Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A),$$

a po dosazení

$$\begin{aligned} e^x (Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A) + 2e^x (Ax^2 + Bx + 2Ax + B) - 3e^x (Ax^2 + Bx) &= \\ = (4x - 3)e^x. \end{aligned}$$

Rovnici nejdřív vydělíme e^x a dostaneme

$$Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A + 2Ax^2 + 2Bx + 4Ax + 2B - 3Ax^2 - 3Bx = 4x - 3.$$

Porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin.

$$x^2 : \quad A + 2A - 3A = 0$$

$$x^1 : \quad B + 4A + 2B + 4A - 3B = 4$$

$$x^0 : \quad 2B + 2A + 2B = -3$$

Dostali jsme soustavu $8A = 4$, $2A + 4B = -3$. Potom $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$.

Partikulární řešení je $Y = e^x \left(\frac{x^2}{2} - x \right)$. Potom obecné řešení bude

$$y = y_h + Y = \underline{\underline{C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + e^x \left(\frac{x^2}{2} - x \right)}}.$$

d) Vyřešíme homogenní rovnici $3y'' - 2y' = 0$. Charakteristická rovnice je $3\lambda^2 - 2\lambda = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}$ a $y_h = C_1 + C_2 e^{\frac{2}{3}x}$.

Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 10 \cos 2x = e^{0x} (10 \cos 2x + 0 \sin 2x).$$

Zde $\alpha + i\beta = 0 + 2i$ není kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 0$. Partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{0x} x^0 (A \cos 2x + B \sin 2x) = A \cos 2x + B \sin 2x$$

a musí splňovat rovnici $3Y'' - 2Y' = 10 \cos 2x$. Musíme Y dvakrát derivovat:

$$Y' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \quad Y'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x. \text{ Dosadíme}$$

$$3(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x) - 2(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) = 10 \cos 2x,$$

$$-12A \cos 2x - 12B \sin 2x + 4A \sin 2x - 4B \cos 2x = 10 \cos 2x.$$

Aby rovnice platila, musí se rovnat koeficienty při $\cos 2x$ a $\sin 2x$ na obou stranách:

$$\cos 2x : \quad -12A - 4B = 10$$

$$\sin 2x : \quad -12B + 4A = 0$$

$$\text{Zase jsme dostali soustavu rovnic: } -12A - 4B = 10, \quad A - 3B = 0.$$

$$\text{Odtud } A = -\frac{3}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}. \text{ Partikulární řešení je } Y = -\frac{3}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x,$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice bude

$$y = y_h + Y = \underline{\underline{C_1 + C_2 e^{\frac{2}{3}x} - \frac{3}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x.}}$$

Příklad 3.2.2. Najděte partikulární řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu se speciální pravou stranou

$$a) y'' + 2y' + y = 2x - 1, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4$$

$$b) y'' + y = 8 \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3$$

Řešení: a) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' + 2y' + 1 = 0$. Máme $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$.

Kořeny charakteristické rovnice jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ a $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 2x - 1 = e^{0x} (2x - 1) = e^{0x} P_1(x).$$

Zde $\alpha = 0$ není kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 0$. Potom

$Y = e^{0x} x^0 (Ax + B) = Ax + B$, $Y' = A$, $Y'' = 0$ a po dosazení

$$0 + 2A + Ax + B = 2x - 1.$$

Porovnáme koeficienty: x^1 : $A = 2$

$$x^0 : 2A + B = -1$$

a dostaneme $A = 2$ a $B = -5$. Potom $Y = 2x - 5$ a obecné řešení

$$y = y_h + Y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 2x - 5.$$

Spočítáme ještě y' , abychom mohli dosadit počáteční podmínky,

$$y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x} + 2.$$

Z toho $3 = y(0) = C_1 - 5$, $-4 = y'(0) = -C_1 + C_2 + 2$. Pak $C_1 = 8$, $C_2 = 2$.

Hledané partikulární řešení bude $y = 8 e^{-x} + 2 x e^{-x} + 2x - 5$.

b) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' + y = 0$. Máme $\lambda^2 + 1 = 0$.

Kořeny charakteristické rovnice jsou $\lambda_{1,2} = \pm i$ a $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 8 \sin x = e^{0x} (0 \cos x + 8 \sin x).$$

Zde $\alpha + i\beta = 0 + i$ je kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 1$ a

$$Y = e^{0x} x^1 (A \cos x + B \sin x) = x(A \cos x + B \sin x).$$

Spočítáme derivace a dosadíme do rovnice:

$$Y' = A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x) = (A + Bx) \cos x + (B - Ax) \sin x,$$

$$Y'' = (2B - Ax) \cos x + (-2A - Bx) \sin x,$$

$$(2B - Ax) \cos x + (-2A - Bx) \sin x + Ax \cos x + Bx \sin x = 8 \sin x.$$

Musí se rovnat koeficienty při $\cos x$ a $\sin x$ na obou stranách:

$$\cos x : 2B - Ax + Ax = 0$$

$$\sin x : -2A - Bx + Bx = 8$$

Potom $A = -4$, $B = 0$, $Y = -4x \cos x$ a $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 4x \cos x$.

Spočítáme $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - 4 \cos x + 4x \sin x$ a dosadíme počáteční

podmínky: $1 = y(0) = C_1$, $-3 = y'(0) = C_2 - 4 \Rightarrow C_1 = 1$, $C_2 = 1$.

Hledané řešení je $y = \cos x + \sin x - 4x \cos x$.

Příklad 3.2.3. Je dán elektrický LC obvod, kde cívka o indukčnosti $L = 10 \text{ H}$ má velmi malý ohmický odpor. Do série k ní je zařazen kondenzátor o kapacitě $C = 0.1 \text{ F}$ a zdroj, jehož napětí lineárně roste s časem podle vztahu $E = 10t$. Určete závislost proudu teokoucího obvodem na čase, je-li $I(0) = 0$ a kondenzátor byl v čase $t = 0$ vybit.

Řešení: Pro tento obvod platí

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau = E.$$

Po derivování a dosazení dostaneme lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$10 \frac{d^2 I}{dt^2} + 10I = 10.$$

Obecné řešení této rovnice je $I(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1$.

Partikulární řešení splňující dané počáteční podmínky $I(0) = 0$ a $I'(0) = 0$ určíme z $I(0) = C_1 + 1 = 0$, $I'(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$ a $I'(0) = C_2 = 0$.

Řešení úlohy tedy je

$$\underline{\underline{I(t) = 1 - \cos t.}}$$

Přestože napětí neomezeně roste, zůstává proud v takovém obvodu omezený.

Příklad 3.2.4. Principem superpozice vyřešte lineární diferenciální rovnici druhého řádu $y'' + y' = 5x + 2e^x$.

Řešení: Kořeny charakteristické rovnice $\lambda^2 + \lambda = 0$ jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ a $y_h = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Partikulární řešení dostaneme jako součet partikulárních řešení dvou rovnic, které mají speciální pravé strany: $y'' + y' = 5x$ a $y'' + y' = 2e^x$.

U první rovnice je pravá strana tvaru

$$f_1(x) = 5x = e^{0x} 5x = e^{0x} P_1(x).$$

Zde $\alpha = 0$ je jednoduchý kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 1$.
Potom

$Y_1 = e^{0x} x^1 (Ax + B) = Ax^2 + Bx$, $Y_1' = 2Ax + B$, $Y_1'' = 2A$ a po dosazení do rovnice $Y_1'' + Y_1' = 5x$ máme $2A + 2Ax + B = 5x$.

Porovnáme koeficienty: x^1 : $2A = 5$

$$x^0 : 2A + B = 0$$

Z toho $A = \frac{5}{2}$ a $B = -5$. Dostali jsme $Y_1 = \frac{5}{2}x^2 - 5x$.

U druhé rovnice je pravá strana tvaru

$$f_2(x) = 2e^x = e^x 2 = e^x P_0(x).$$

Zde $\alpha = 1$ není kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 0$. Potom píšeme $Y_2 = e^x x^0 A = Ae^x$, $Y_2' = Ae^x$, $Y_2'' = Ae^x$ a po dosazení do $Y_2'' + Y_2' = 2e^x$,

$$Ae^x + Ae^x = 2e^x, \quad 2Ae^x = 2e^x, \quad 2A = 2, \quad A = 1.$$

Potom $Y_2 = e^x$ a jedno partikulární řešení původní rovnice dostaneme jako

$$Y = Y_1 + Y_2 = \frac{5}{2}x^2 - 5x + e^x.$$

Hledané obecné řešení je $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{5}{2}x^2 - 5x + e^x$.

Příklad 3.2.5. Najděte obecné řešení rovnic druhého řádu metodou neurčitých koeficientů

a) $2y'' - 5y' - 7y = 18e^{2x}$

b) $y'' - 2y' - 3y = 1 - x$

c) $y'' + 3y = 9x^2$

d) $y'' + 6y' + 9y = 36xe^{3x}$

e) $y'' + 2y' + 5y = 17 \sin 2x$

f) $3y'' - 4y' = 25 \sin x$

Řešení: a) $y = C_1 e^{\frac{7}{2}x} + C_2 e^{-x} - 2e^{2x}$; b) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{9}(3x - 5)$;

c) $y = C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x + 3x^2 - 2$; d) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + e^{3x}(x - \frac{1}{3})$;

e) $y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x - 4 \cos 2x + \sin 2x$;

f) $y = C_1 + C_2 e^{\frac{4}{3}x} + 4 \cos x - 3 \sin x$.

Příklad 3.2.6. Najděte partikulární řešení rovnic metodou neurčitých koeficientů

a) $y'' - 2y' = 2x^2 e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$

b) $y'' - 2y = (2x - 1)^2$, $y(0) = -\frac{1}{2}$, $y'(0) = 2$

c) $y'' - 7y' + 10y = 116 \sin 2x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$

Řešení: a) $y = \frac{1}{2} + \frac{9}{2}e^{2x} + e^x(-2x^2 - 4)$; b) $y = e^{\sqrt{2}x} + e^{-\sqrt{2}x} - 2x^2 + 2x - \frac{5}{2}$;

c) $y = -4e^{2x} + 7 \cos 2x + 3 \sin 2x$.

STUDIJNÍ JEDNOTKA

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

Cíle studijní jednotky. V první části si můžete osvěžit své znalosti o komplexních číslech, které máte ze střední školy. Ke zvládnutí dalších kapitol je nutné, abyste uměli pracovat s komplexními čísly a zobrazovat je v komplexní rovině. Dále se seznámíte s pojmem komplexní funkce a holomorfní funkce, naučíte se tyto funkce derivovat. Předpokládám, že už umíte derivovat funkci jedné reálné proměnné a počítat parciální derivace funkce více proměnných.

4 Funkce komplexní proměnné

4.1 Komplexní čísla

Komplexní jednotka — číslo j , pro které platí $j^2 = -1$, někdy se označuje také jako i .

Algebraický tvar komplexního čísla — komplexní číslo zapsané ve tvaru

$$z = a + jb, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z.$$

Číslo a nazýváme **reálnou částí** z , číslo b nazýváme **imaginární částí** z .

Číslo komplexně sdružené — k číslu $z = a + jb$ je to číslo $\bar{z} = a - jb$.

Absolutní hodnota komplexního čísla — pro $z = a + jb$ je to reálné číslo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Argument komplexního čísla — $\arg z = \varphi$ je úhel mezi kladnou x -ovou poloosou a polopřímkou, spojující bod z s počátkem. Uvažujeme-li pouze $\varphi \in (-\pi, \pi)$, píšeme $\operatorname{Arg} z = \varphi$. Pro argument φ komplexního čísla $z = a + jb$ platí

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Gaussova rovina — rovina xy , ve které komplexní číslo $z = a + jb$ je znázorněno bodem $[a, b]$. Absolutní hodnota čísla z se potom rovná vzdálenosti bodu $[a, b]$ od počátku. Absolutní hodnota rozdílu dvou komplexních čísel se rovná jejich vzdálenosti v komplexní rovině.

Goniometrický tvar komplexního čísla — komplexní číslo zapsané ve tvaru

$$z = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi),$$

kde $|z|$ je absolutní hodnota komplexního čísla a φ je argument čísla z .

Eulerův tvar komplexního čísla — komplexní číslo zapsané ve tvaru

$$z = |z| e^{j\varphi},$$

kde $|z|$ a φ mají stejný význam jako u goniometrického tvaru.

Pro $a + jb$ a $c + jd$ libovolná komplexní čísla se definuje **sčítání a násobení** takto:

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d), \quad (a + jb) \cdot (c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc).$$

Při **dělení komplexních čísel** se využívá komplexně sdružené číslo jmenovatele:

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{a + jb}{c + jd} \cdot \frac{c - jd}{c - jd} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}; \quad a + jb, c + jd \in \mathbb{C}; c + jd \neq 0.$$

Komplexní čísla se zjednodušují podle pravidel ($k \in \mathbb{Z}$):

$$j^2 = -1, j^3 = -j, j^4 = 1, j^5 = j, \dots, j^{4k} = 1, j^{4k+1} = j, j^{4k+2} = -1, j^{4k+3} = -j.$$

Násobení a dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru:

$$uv = |u| \cdot |v|(\cos(\alpha + \beta) + j \sin(\alpha + \beta)); \quad \frac{u}{v} = \frac{|u|}{|v|}(\cos(\alpha - \beta) + j \sin(\alpha - \beta)),$$

kde $u = |u|(\cos \alpha + j \sin \alpha)$ a $v = |v|(\cos \beta + j \sin \beta)$ jsou dvě nenulová komplexní čísla.

Pro umocňování platí **Moivreova věta**:

$$z^n = (|z|(\cos \varphi + j \sin \varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + j \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 4.1.1. *Vypočítejte komplexní číslo*

$$a) z = (2 + j)(5 + j) \quad b) z = j + j^3 + j^{15} + j^{29} \quad c) z = \frac{1 + 2j}{3 - 4j}$$

$$\text{Řešení: } a) (2 + j)(5 + j) = 10 + 5j + 2j - 1 = (10 - 1) + j(5 + 2) = \underline{\underline{9 + 7j}};$$

$$b) j + j^3 + j^{15} + j^{29} = j + j^3 + j^3 + j = j - j - j + j = \underline{\underline{0}};$$

$$c) \frac{1 + 2j}{3 - 4j} = \frac{(1 + 2j)(3 + 4j)}{3^2 - (4j)^2} = \frac{3 + 4j + 6j + 8j^2}{9 - (-16)} = \frac{-5 + 10j}{25} = \underline{\underline{-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}j}}.$$

Příklad 4.1.2. Určete absolutní hodnotu a argument komplexních čísel

a) $-1 + j$ b) j c) -1 d) $2 + 2j$

Řešení: a) $|-1 + j| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$; $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Potom $\varphi = \underline{\underline{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}}$, k celé.

b) $|j| = \sqrt{0 + 1^2} = \underline{\underline{1}}$; $\sin \varphi = 1$, $\cos \varphi = 0$. Z toho $\varphi = \underline{\underline{\frac{1}{2}\pi + 2k\pi}}$.

c) $|-1| = \sqrt{(-1)^2 + 0} = \underline{\underline{1}}$; $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = -1$. Z toho $\varphi = \underline{\underline{\pi + 2k\pi}}$.

d) $|2 + 2j| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \underline{\underline{\sqrt{8}}}$, $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Potom $\varphi = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}}$.

Příklad 4.1.3. Najděte v Gaussově rovině čísla z , pro něž platí dané rovnice

a) $|z + 3 - 5j| = 3$

b) $|z - j| = 1$

c) $1 < |z + j| < 2$

d) $|z| = 1 - 2j$

e) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$

f) $\operatorname{Im} z = -j$

Řešení: a) $|z + 3 - 5j| = |z - (-3 + 5j)| = 3$. V Gaussově rovině $|z + 3 - 5j|$ vyjadřuje vzdálenost bodů z a $-3 + 5j$ a tato vzdálenost musí být pro každé z rovna třem. Množina všech takových z je tedy kružnice se středem v bodě $-3 + 5j$ a poloměrem 3.

b) Kružnice se středem v bodě j a poloměrem 1.

c) Vzdálenost bodu z od $-j$ musí být v rozmezí od 1 do 2. Množina všech takových z je tedy vnitřek mezikruží se středem v bodě $-j$. Poloměry hraničních kružnic jsou 1 a 2.

d) Absolutní hodnota komplexního čísla musí být reálné číslo. Daná rovnice nemá řešení.

e) Vzdálenost čísla z od reálné osy musí být stejná jako vzdálenost čísla z od imaginární osy. Množina všech takových z je osa prvního a třetího kvadrantu.

f) Imaginární část komplexního čísla musí být reálné číslo. Daná rovnice nemá řešení.

Příklad 4.1.4. Zapište v Eulerově tvaru $z = |z| e^{j\varphi}$ komplexní čísla

a) $1 - j\sqrt{3}$ b) $-j$ c) -1 d) 1

Řešení: a) $2 e^{(-\frac{1}{3} + 2k)\pi j}$; b) $e^{(-\frac{1}{2} + 2k)\pi j}$; c) $e^{(1 + 2k)\pi j}$; d) $e^{2k\pi j}$.

4.2 Funkce komplexní proměnné

Funkce $w = f(z)$ definovaná na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ s funkčními hodnotami v oboru komplexních čísel se nazývá **funkce komplexní proměnné**. Je-li ke každému $z \in \Omega$ přiřazeno právě jedno komplexní číslo w , pak říkáme, že funkce je **jednoznačná**, v opačném případě říkáme, že je **mnohoznačná**. Komplexní funkci $w = f(z)$ můžeme napsat i v algebraickém tvaru

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y),$$

kde $z = x + jy$ a $u(x, y)$, $v(x, y)$ jsou reálné funkce dvou proměnných. Funkci $u(x, y)$ nazýváme reálnou částí f , píšeme $\operatorname{Re} f$ a $v(x, y)$ nazýváme imaginární částí funkce f , značíme $\operatorname{Im} f$.

Přehled některých důležitých komplexních funkcí

Název komplexní funkce	Vzorec pro komplexní funkci	Podmínky platnosti vzorce
Exponenciální funkce	$e^z = e^x(\cos y + j \sin y)$	$z = x + jy, z \in \mathbb{C}$
Kosinus	$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$	$z \in \mathbb{C}$
Sinus	$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$	$z \in \mathbb{C}$
Tangens	$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$	$z \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \text{ celé}$
Kotangens	$\operatorname{cot} z = \frac{\cos z}{\sin z}$	$z \neq k\pi, k \text{ celé}$
Kosinus hyperbolický	$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$	$z \in \mathbb{C}$
Sinus hyperbolický	$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$	$z \in \mathbb{C}$
Logaritmická funkce	$\ln z = \ln z + j \operatorname{arg} z$	$z \in \mathbb{C}, z \neq 0$
Mocninná funkce	$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$	$z, \alpha \in \mathbb{C}, z \neq 0$

Funkce e^z , $\sinh z$ a $\cosh z$ jsou periodické s periodou $2\pi j$, funkce $\sin z$ a $\cos z$ s periodou 2π . Funkce $\ln z$ a z^α jsou víceznačné, ke každému číslu je přiřazeno více komplexních čísel. Omezíme-li se na $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi)$ dostaneme tzv. **hlavní větve logaritmu** resp. **hlavní hodnotu mocninné funkce**.

Příklad 4.2.1. Určete reálnou a imaginární část funkce $f(z)$

$$a) f(z) = (z + j)^2 \qquad b) f(z) = e^{-jz}$$

Řešení: a) $f(x+jy) = (x + jy + j)^2 = (x + j(y+1))^2 = x^2 + 2jx(y+1) - (y+1)^2 = x^2 - y^2 - 2y - 1 + j2(xy+x)$.

Z toho píšeme, že $\operatorname{Re} f(z) = \underline{x^2 - y^2 - 2y - 1}$ a $\operatorname{Im} f(z) = \underline{2xy + 2x}$.

b) $f(x+jy) = e^{-j(x+jy)} = e^{(y-jx)} = e^y(\cos(-x) + j \sin(-x)) = e^y(\cos x - j \sin x)$.

Potom $\operatorname{Re} f(z) = \underline{e^y \cos x}$ a $\operatorname{Im} f(z) = \underline{-e^y \sin x}$.

Příklad 4.2.2. Vypočítejte hodnoty následujících výrazů, v části d) až h) hlavní hodnoty výrazů

$$\begin{array}{llll} a) e^{1+j\pi} & b) e^{j\frac{\pi}{2}} & c) \ln(e^{j\frac{\pi}{3}}) & d) \ln(1+j) \\ e) \ln(-1) & f) (-1)^j & g) j^j & h) j^\pi \end{array}$$

Řešení: a) $e^{1+j\pi} = e(\cos \pi + j \sin \pi) = \underline{-e}$.

b) $e^{j\frac{\pi}{2}} = (\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2}) = \underline{j}$.

c) $\ln(e^{j\frac{\pi}{3}}) = \ln 1 + j\frac{\pi}{3} = \underline{j\frac{\pi}{3}}$.

d) $1+j = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) + j \sin(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))$. Pak $\ln(1+j) = \underline{\ln(\sqrt{2}) + j\frac{\pi}{4}}$.

e) $-1 = 1(\cos(\pi + 2k\pi) + j \sin(\pi + 2k\pi))$. Omezíme-li se na hlavní větev logaritmu, bereme $k = 0$ a dostaneme, že $\ln(-1) = \ln 1 + j\pi = \underline{j\pi}$.

f) $(-1)^j = e^{j \ln(-1)} = e^{j\pi} = \underline{e^{-\pi}}$.

g) $j^j = e^{j \ln j} = e^{j(\ln 1 + j\frac{\pi}{2})} = \underline{e^{-\frac{\pi}{2}}}$.

h) $j^\pi = e^{\pi \ln j} = e^{\pi j\frac{\pi}{2}} = e^{j\frac{\pi^2}{2}} = \underline{\cos \frac{\pi^2}{2} + j \sin \frac{\pi^2}{2}}$.

Příklad 4.2.3. Vyjádřete $\cos^2 \varphi$ a $\sin^2 \varphi$ pomocí komplexních goniometrických funkcí argumentu 2φ .

Řešení: Nejdřív spočítáme $\cos^2 \varphi$:

$$\cos^2 \varphi = \frac{(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})^2}{4} = \frac{e^{2j\varphi} + 2 + e^{-2j\varphi}}{4} = \frac{1 + \frac{e^{2j\varphi} + e^{-2j\varphi}}{2}}{2} = \underline{\underline{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}}}$$

$$\text{Podobně } \sin^2 \varphi = \underline{\underline{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}}}$$

4.3 Derivace funkce komplexní proměnné, Cauchy-Riemannovy podmínky

Analogicky jako u funkcí reálné proměnné se definuje limita komplexní funkce $w = f(z)$ v bodě z_0 a derivace $f'(z_0)$, jako

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Pro komplexní funkci platí stejná pravidla pro derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu jako pro reálné funkce. Stejně tak platí i pravidlo pro derivování složené funkce.

Jestliže $f'(z_0)$ existuje, říkáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě z_0 .

Jestliže f' existuje v bodě z_0 a v nějakém jeho okolí, nazývá se funkce f **analytická** nebo také **holomorfní** v z_0 .

Funkce $f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ je holomorfní v bodě z_0 , právě když v nějakém okolí tohoto bodu splňuje tzv. **Cauchy-Riemannovy podmínky**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Příklad 4.3.1. Zjistěte z Cauchy-Riemannových podmínek, na které oblasti jsou následující funkce holomorfní, a na této oblasti spočítejte jejich derivace

$$a) f(z) = e^z \quad b) f(z) = \frac{1}{z} \quad c) f(z) = \operatorname{Im} z \quad d) f(z) = |z| \quad e) f(z) = z^2$$

Řešení: a) Nejdřív musíme určit reálnou a imaginární část funkce.

$f(x + jy) = e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x (\cos y + j \sin y) = e^x \cos y + j e^x \sin y$. Potom

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad a \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Rovnice $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^x (-\sin y) = -\frac{\partial v}{\partial x}$ platí na celém \mathbb{C} .

Funkce $f(z) = e^z$ je holomorfní pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a $f'(z) = e^z$.

$$b) f(x + jy) = \frac{1}{x + jy} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Potom

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad a \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - x2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x^2 + y^2 - y2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Cauchy-Riemannovy podmínky platí pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Funkce $f(z) = \frac{1}{z}$ je holomorfní v každém bodě kromě nuly a $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ pro $z \neq 0$.

c) Pro $f(z) = \operatorname{Im} z$ máme $f(x + jy) = y$. Potom $u(x, y) = y$ a $v(x, y) = 0$ a $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $1 \neq 0$. Rovnice neplatí v žádném bodě. Funkce není holomorfní v žádném bodě, a proto $f'(z)$ neexistuje.

d) Pro $f(z) = |z|$ máme $f(x + jy) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Potom $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $v(x, y) = 0$ a $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\partial v}{\partial y}$ pouze

pro $x = 0$. Podobně $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ pro $y = 0$. Ale v bodě $z = 0 + 0j$ příslušné

derivace nejsou definované. Rovnice neplatí v žádném bodě.

Funkce není holomorfní v žádném bodě a proto $f'(z)$ neexistuje.

e) $f(x + jy) = (x + jy)^2 = x^2 + 2xyj - y^2 = x^2 - y^2 + j2xy$.

Potom $u(x, y) = x^2 - y^2$ a $v(x, y) = 2xy$.

Rovnice $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$ platí na celém \mathbb{C} .

Funkce $f(z) = z^2$ je holomorfní pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a $f'(z) = 2z$.

Příklad 4.3.2. Zjistěte oblast na které je funkce $f(z) = \frac{j}{z - j}$ holomorfní, a vypočítejte $f'(2 - j)$, jestliže derivace v tomto bodě existuje.

Řešení: $f(x + jy) = \frac{j}{x + jy - j} = \frac{j}{x + j(y - 1)} \cdot \frac{x - j(y - 1)}{x - j(y - 1)} = \frac{(y - 1) + jx}{x^2 + (y - 1)^2}$.

Potom $u(x, y) = \frac{(y - 1)}{x^2 + (y - 1)^2}$ a $v(x, y) = \frac{x}{x^2 + (y - 1)^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-(y - 1)2x}{(x^2 + (y - 1)^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-x2(y - 1)}{(x^2 + (y - 1)^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2 - (y - 1)^2}{(x^2 + (y - 1)^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(y - 1)^2 - x^2}{(x^2 + (y - 1)^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Cauchy-Riemannovy podmínky platí všude kromě bodu $x = 0$, $y = 1$.

Funkce je holomorfní pro všechna $z \in \mathbb{C} - \{j\}$.

$$f'(z) = \frac{-j}{(z - j)^2}, \quad f'(2 - j) = \frac{-j}{(2 - j - j)^2} = \frac{-j}{-8j} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}.$$

Příklad 4.3.3. Zjistěte z Cauchy-Riemannových podmínek, na které oblasti jsou následující funkce holomorfní, a na této oblasti spočítejte jejich derivace

$$a) f(z) = z^3 \quad b) f(z) = \frac{1}{z-1} \quad c) f(z) = \operatorname{Re} z \quad d) f(z) = z + \bar{z} \quad e) f(z) = \cos z$$

Řešení: a) $f'(z) = 3z^2$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$; b) $f'(z) = -\frac{1}{(z-1)^2}$ pro všechna $z \in \mathbb{C} - \{1\}$; c) není holomorfní v žádném bodě; d) není holomorfní v žádném bodě; e) $f'(z) = -\sin z$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$.

Příklad 4.3.4. Najděte holomorfní funkci $f(z)$, která má při $z = x + jy$ reálnou část $u = x^2 - y^2 + x$.

Řešení: **První metoda:** $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x+1 = \frac{\partial v}{\partial y}$. Z toho integrováním dostaneme

$$v = \int (2x+1) dy = 2xy + y + C(x) \quad \text{a z toho} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + C'(x).$$

Na druhé straně $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$. Dostali jsme rovnost $2y + C'(x) = 2y$.

Z toho $C'(x) = 0$, a pak $C(x) = \int 0 dx = K$.

Po dosazení $v = 2xy + y + K$ a máme řešení

$$f(x + jy) = x^2 - y^2 + x + j(2xy + y + K).$$

Když chceme vyjádřit tuto funkci v závislosti na z , nahradíme $x = z$ a $y = 0$.

$$\text{Potom} \quad f(z) = z^2 - 0^2 + z + j(2z \cdot 0 + 0 + K) = \underline{\underline{z^2 + z + jK}}.$$

Druhá metoda: Z Cauchy-Riemannových podmínek odvodíme vzorec na derivaci funkce v bodě pouze pomocí reálné části funkce:

$$f'(x + jy) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - j \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

Víme, že $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1$ a $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$. Z toho $f'(x + jy) = 2x + 1 - j(-2y)$.

Potom $f'(z) = 2z + 1$ a $f(z) = \int 2z + 1 dz = \underline{\underline{z^2 + z + c}}$, $c \in \mathbb{C}$.

Reálná část konstanty je nula, protože naše funkce je $u = x^2 - y^2 + x$. Z toho plyne, že komplexní číslo c bude ryze imaginární.

Příklad 4.3.5. Najděte holomorfní funkci $f(z)$, která má při $z = x + jy$ imaginární část $v = x + y - 3$ a $f(0) = -3j$.

Řešení: **První metoda:** $\frac{\partial v}{\partial y} = 1 = \frac{\partial u}{\partial x}$. Z toho $u = \int 1 \, dx = x + C(y)$.

Potom $\frac{\partial u}{\partial y} = C'(y)$.

Na druhé straně $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -1$. Dostali jsme rovnost $C'(y) = -1$.

Pak $C(y) = -\int 1 \, dy = -y + K$. Po dosazení $u = x - y + K$,

$$f(x + jy) = x - y + K + j(x + y - 3),$$

$$f(z) = z + jz - 3j + K.$$

Musí platit, že $f(0) = 0 + j0 - 3j + K = -3j$. Potom $K = 0$.

Hledaná funkce je $f(z) = z + jz - 3j$.

Druhá metoda: Z Cauchy-Riemannových podmínek odvodíme vzorec na derivaci funkce v bodě pouze pomocí imaginární části funkce:

$$f'(x + jy) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + j \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

Víme, že $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$ a $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$. Z toho $f'(x + jy) = 1 + j$.

Potom $f'(z) = 1 + j$ a $f(z) = \int 1 + j \, dz = (1 + j)z + c$, $c \in \mathbb{C}$.

Imaginární část konstanty c je $-3j$, protože naše funkce je $v = x + y - 3$. Z toho plyne, že komplexní číslo $c = a - 3j$. Dosazením počáteční podmínky dostaneme, že $a = 0$, a proto $f(z) = (1 + j)z - 3j$.

Příklad 4.3.6. Najděte holomorfní funkci $f(z)$, která má při $z = x + jy$ reálnou část

$$a) u = 6xy + 3x^2y - y^3 \quad a) f(0) = 5j \quad b) u = x^2 - 2xy \quad a) f(0) = 0$$

Řešení: a) $f(z) = -jz^3 - 3jz^2 + 5j$; b) u není harmonická, proto neexistuje holomorfní funkce, která má za reálnou část u .

Příklad 4.3.7. Najděte holomorfní funkci $f(z)$, která má při $z = x + jy$ imaginární část

$$a) v = 9x^3y - 9xy^3 + 5x \quad a) f(0) = 6 \quad b) v = 7xy^3 - 7x^3y - 8x \quad a) f(0) = 3$$

Řešení:

$$a) f(z) = \frac{9}{4}x^4 - \frac{27}{2}x^2y^2 + \frac{9}{4}y^4 - 5y + 6 + j(9x^3y - 9xy^3 + 5x) = \frac{9}{4}z^4 + 5jz + 6;$$

$$b) f(z) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{21}{2}x^2y^2 - \frac{7}{4}y^4 + 8y + 3 + j(7xy^3 - 7x^3y - 8x) = -\frac{7}{4}z^4 - 8jz + 3.$$

STUDIJNÍ JEDNOTKA

INTEGRÁL FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

Cíle studijní jednotky. Naučíte se integrovat komplexní funkci přes křivku v komplexní rovině tak, že komplexní integrál převedete na výpočet určitého integrálu funkce reálné proměnné. Budete k tomu potřebovat integrální počet funkce jedné proměnné a také doporučuji zopakovat si některé části z analytické geometrie, a to popis kružnice, přímky a úsečky. Naučíte se také Cauchyovu větu a Cauchyův vzorec.

5 Integrál funkce komplexní proměnné

5.1 Integrál komplexní funkce pomocí parametrizace křivky

Nechť je daná $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ komplexní funkce reálné proměnné

$$\Gamma : z(t) = x(t) + jy(t); \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle.$$

kde funkce $x(t), y(t)$ jsou spojité reálné funkce jedné proměnné takové, že jejich derivace $x'(t), y'(t)$ jsou po částech spojité. Potom říkáme, že Γ je **po částech hladká orientovaná křivka** v komplexní rovině začínající v bodě $z(\alpha)$ a končící v bodě $z(\beta)$.

Z křivek budeme nejčastěji uvažovat úsečky a kružnice, jejichž parametrické rovnice v Gaussově rovině jsou tyto:

1. Obecně úsečka o krajních bodech z_1, z_2 má parametrickou rovnici

$$z(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

Speciálním případem jsou úsečky ležící na souřadnicových osách. Nejjednodušší popis úsečky ležící na x -ové ose mezi body $z_1 = \alpha, z_2 = \beta$ je $z(t) = t, t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a podobně úsečku ležící na y -ové ose mezi body $z_1 = \alpha j, z_2 = \beta j$ popisujeme jako $z(t) = jt, t \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

2. Kladně orientovaná kružnice se středem v bodě z_0 o poloměru r má parametrickou rovnici

$$z(t) = z_0 + r \cdot e^{jt}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Nechť je $w = f(z)$ komplexní funkce, jednoznačná a spojitá na křivce Γ . Potom integrál z funkce f po křivce Γ je definován takto:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t) dt.$$

O integrálu funkce komplexní proměnné platí řada vět analogicky k větám o integrálu reálných funkcí, zejména tyto:

$$\int_{\Gamma} (f_1(z) + f_2(z)) dz = \int_{\Gamma} f_1(z) dz + \int_{\Gamma} f_2(z) dz$$

$$\int_{\Gamma} k \cdot f(z) dz = k \int_{\Gamma} f(z) dz$$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz, \text{ skládá-li se } \Gamma \text{ z křivek } \Gamma_1 \text{ a } \Gamma_2,$$

Γ_1 a Γ_2 mají jediný společný bod

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = - \int_{\Gamma_1} f(z) dz, \text{ značí-li } \Gamma_1 \text{ opačně orientovanou křivku } \Gamma$$

Příklad 5.1.1. Vypočtete integrál $\int_{\Gamma} \bar{z} dz$, kde Γ je úsečka z bodu -1 do bodu 3 .

Řešení: Parametrická rovnice této úsečky je $z(t) = t$, $t \in \langle -1, 3 \rangle$.

Z toho vyjádříme $\bar{z}(t) = t$ a $dz = 1 dt$.

$$\int_{\Gamma} \bar{z} dz = \int_{-1}^3 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^3 = \frac{9}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \underline{\underline{4}}.$$

Příklad 5.1.2. Vypočtete $\int_{\Gamma} |z| dz$, kde Γ je horní půlkružnice z bodu 1 do bodu -1 .

Řešení: Parametrická rovnice půlkružnice je $z(t) = e^{jt}$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

Z toho vyjádříme $|z(t)| = 1$ a $dz = j e^{jt} dt$.

$$\int_{\Gamma} |z| dz = \int_0^{\pi} j e^{jt} dt = j \int_0^{\pi} e^{jt} dt = j \left[\frac{e^{jt}}{j} \right]_0^{\pi} = [e^{jt}]_0^{\pi} = e^{j\pi} - e^0 = \cos \pi + j \sin \pi - 1 = -1 + j \cdot 0 - 1 = \underline{\underline{-2}}.$$

Příklad 5.1.3. Vypočtete $\int_{\Gamma} |z| \bar{z} dz$, kde Γ je horní půlkružnice z bodu -1 do bodu 1 .

Řešení: Parametrická rovnice půlkružnice je $z(t) = e^{jt}$, $t = \pi \rightarrow t = 0$.

Z toho vyjádříme $|z(t)| \bar{z} = e^{-jt}$ a $dz = j e^{jt} dt$.

$$\int_{\Gamma} |z| \bar{z} dz = \int_{\pi}^0 e^{-jt} j e^{jt} dt = j \int_{\pi}^0 1 dt = j [t]_{\pi}^0 = j(0 - \pi) = \underline{\underline{-j\pi}}.$$

Příklad 5.1.4. Vypočtete $\int_{\Gamma} \operatorname{Re} z \, dz$, kde Γ je horní půlkružnice z bodu 3 do bodu -3 .

Řešení: Parametrická rovnice půlkružnice je $z(t) = 3e^{jt}$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

Potřebujeme vyjádřit $\operatorname{Re} z$ ale z této rovnice půlkružnice to nejde, musíme použít jiný zápis: $z(t) = 3(\cos t + j \sin t)$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

$$\begin{aligned} \text{Potom } \operatorname{Re} z &= 3 \cos t, \text{ a } dz = (-3 \sin t + j 3 \cos t) dt, \text{ a } \int_{\Gamma} \operatorname{Re} z \, dz = \\ &= \int_0^{\pi} 3 \cos t (-3 \sin t + j 3 \cos t) dt = 9 \int_0^{\pi} (-\cos t \sin t) dt + 9j \int_0^{\pi} \cos^2 t \, dt. \end{aligned}$$

Nejdřív spočítáme první integrál pomocí substituce $u = \cos t$.

Pak $du = -\sin t \, dt$, a pro $t = 0$ je $u = 1$, pro $t = \pi$ je $u = -1$.

$$\text{Dostaneme } 9 \int_0^{\pi} (-\cos t \sin t) dt = 9 \int_1^{-1} u \, du = 9 \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^{-1} = 9 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Pro výpočet druhého integrálu použijeme vzorec: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Potom } \int_0^{\pi} \cos^2 t \, dt &= \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} dt + \int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{2} dt = \\ &= \left[\frac{t}{2} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}. \text{ Dostali jsme, že } \int_{\Gamma} \operatorname{Re} z \, dz = 0 + 9j \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{9}{2}\pi j}}. \end{aligned}$$

Příklad 5.1.5. Vypočtete integrál $\int_{\Gamma} \operatorname{Im} z \, dz$, kde Γ je úsečka z bodu 0 do bodu $1 + j$.

Řešení: Parametrická rovnice této úsečky je $z(t) = t + jt$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

$$\begin{aligned} \text{Z toho } \operatorname{Im} z(t) &= t \text{ a } dz = (1 + j) dt \text{ a } \int_{\Gamma} \operatorname{Im} z \, dz = \\ \int_0^1 t \cdot (1 + j) dt &= \int_0^1 t \, dt + j \int_0^1 t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 + j \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j}}. \end{aligned}$$

Příklad 5.1.6. Vypočtete $\int_{\Gamma} \operatorname{Re} z \, dz$, kde Γ je oblouk paraboly z bodu 0 do bodu 1, který má parametrickou rovnici $z(t) = t + jt^2$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Řešení: $\Gamma: z(t) = t + jt^2$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, $\operatorname{Re} z(t) = t$ a $dz = (1 + j2t) dt$.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \operatorname{Re} z \, dz &= \int_0^1 t(1 + 2jt) dt = \int_0^1 t \, dt + 2j \int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 + 2j \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}j}}. \end{aligned}$$

Příklad 5.1.7. Vypočtete $\int_{\Gamma} \operatorname{Re} z \, dz$, kde Γ je lomená čára spojující body 0 , 1 a $1 + j$.

Řešení: Křivka Γ se skládá ze dvou úseček Γ_1 a Γ_2 .

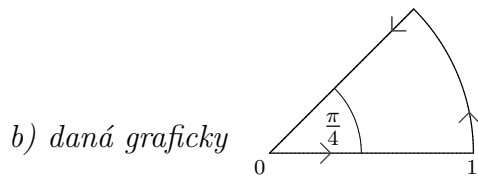
$$\Gamma_1: z(t) = t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \operatorname{Re} z(t) = t \quad \text{a} \quad dz = dt.$$

$$\Gamma_2: z(t) = 1 + jt, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \operatorname{Re} z(t) = 1 \quad \text{a} \quad dz = j \, dt.$$

$$\int_{\Gamma} \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t \, dt + j \int_0^1 1 \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 + j [t]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2} + j}}.$$

Příklad 5.1.8. Vypočtete $\int_{\Gamma} |z| \bar{z} \, dz$, kde Γ je

a) kladně orientována kružnice $|z| = 2$



Řešení: a) $z(t) = 2e^{jt}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $|z(t)| \bar{z}(t) = 2 \cdot 2e^{-jt}$ a $dz = 2je^{jt} \, dt$.

$$\int_{\Gamma} |z| \bar{z} \, dz = \int_0^{2\pi} 4e^{-jt} 2j e^{jt} \, dt = 8j \int_0^{2\pi} dt = 8j [t]_0^{2\pi} = 8j 2\pi = \underline{\underline{16\pi j}}.$$

b) Křivka se skládá ze tří částí: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

$$\Gamma_1: z(t) = t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad |z(t)| \bar{z}(t) = t \cdot t = t^2 \quad \text{a} \quad dz = dt.$$

$$\int_{\Gamma_1} |z| \bar{z} \, dz = \int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$\Gamma_2: z(t) = e^{jt}, \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle, \quad |z(t)| \bar{z}(t) = e^{-jt} \quad \text{a} \quad dz = je^{jt} \, dt.$$

$$\int_{\Gamma_2} |z| \bar{z} \, dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-jt} j e^{jt} \, dt = j \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = j [t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} j.$$

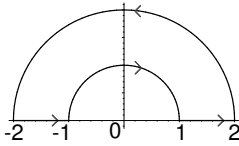
$$\Gamma_3: z(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t + j \frac{\sqrt{2}}{2}t = \frac{\sqrt{2}}{2}t(1 + j), \quad dz = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j) \, dt$$

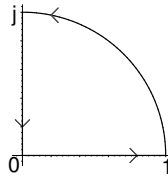
$$\text{a) } |z(t)| \bar{z}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2}t(1 - j) = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2(1 - j).$$

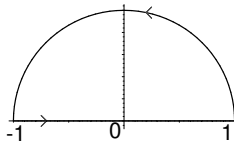
$$\int_{\Gamma_3} |z| \bar{z} \, dz = \int_1^0 t^2 \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j) \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j) \, dt = \frac{1}{2}(1 - j)(1 + j) \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^0 = -\frac{1}{3}.$$

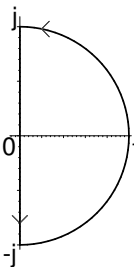
$$\int_{\Gamma} |z| \bar{z} \, dz = \int_{\Gamma_1} |z| \bar{z} \, dz + \int_{\Gamma_2} |z| \bar{z} \, dz + \int_{\Gamma_3} |z| \bar{z} \, dz = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}j - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}j}}.$$

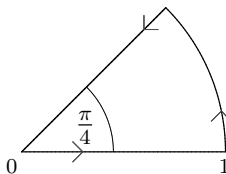
Příklad 5.1.9. Vypočtěte integrály, když integrační cesta je daná graficky

a) $\int_{\Gamma} |z| \bar{z} dz$, kde Γ je: 

b) $\int_{\Gamma} |z| z dz$, kde Γ je: 

c) $\int_{\Gamma} \frac{z}{\bar{z}} dz$, kde Γ je: 

d) $\int_{\Gamma} |z|^2 dz$, kde Γ je: 

e) $\int_{\Gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz$, kde Γ je čtvrtkružnice: 

Řešení: a) $7\pi j$; b) $-\frac{1}{3}$; c) $\frac{4}{3}$; d) $\frac{4}{3}j$; e) $2 + \sqrt{2}(j - 1)$.

Ve všech příkladech v této kapitole jsme integrovali funkce, které nejsou holomorfní na \mathbb{C} . Byly to funkce $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, \bar{z} , anebo funkce z nich složené. Budeme-li chtít integrovat holomorfní funkce, anebo funkce které jsou holomorfní až na konečný počet bodů v \mathbb{C} , nemusíme křivku parametrizovat, ale využíváme Cauchyovu větu, Cauchyův vzorec případně reziduovou větu.

5.2 Cauchyův vzorec a Cauchyova věta

Cauchyova věta. Jestliže funkce $f(z)$ je holomorfní v jednoduše souvislé oblasti v níž leží křivka Γ , potom hodnota integrálu $\int_{\Gamma} f(z) dz$ nezávisí na tvaru křivky Γ , pouze na jejích krajních bodech. V takovém případě

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1),$$

kde z_1 je počáteční a z_2 koncový bod křivky Γ , a pro funkci $F(z)$ platí, že $F'(z) = f(z)$.

Pro uzavřenou křivku Γ v této oblasti platí, že $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

Cauchyův vzorec. Jestliže funkce $f(z)$ je holomorfní v jednoduše souvislé oblasti Ω v níž leží uzavřená křivka Γ , potom platí

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} 2\pi j f(z_0), & \text{jestliže } z_0 \text{ leží uvnitř } \Gamma, \\ 0, & \text{jestliže } z_0 \text{ leží vně } \Gamma. \end{cases}$$

Příklad 5.2.1. *Vypočtěte následující integrály*

a) $\int_{\Gamma} z^2 dz$, kde $\Gamma : |z - 3 + 5j| = \frac{1}{2}$ je kladně orientovaná kružnice

b) $\int_{\Gamma} e^z dz$, kde Γ je obvod obdélníka s vrcholy $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + j$, $z_4 = -1 + j$, kladně orientovaný

c) $\int_{\Gamma} \sin jz dz$, kde Γ je libovolná křivka spojující body 0 a πj

d) $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z - j} dz$, $\Gamma : |z + j| = 1$ je kladně orientovaná kružnice

e) $\int_{\Gamma} \frac{z}{z + 2j} dz$, kde Γ je trojúhelník spojující body 0 , $2j$ a $3 + j$

Řešení: a) z^2 je holomorfní funkce na množině \mathbb{C} , a proto $\int_{\Gamma} z^2 dz = \underline{\underline{0}}$.

b) e^z je holomorfní funkce na množině \mathbb{C} , a proto $\int_{\Gamma} e^z dz = \underline{\underline{0}}$.

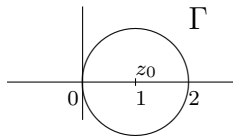
c) $\int_{\Gamma} \sin jz dz = -\frac{1}{j} [\cos jz]_0^{\pi j} = j (\cos(-\pi) - \cos 0) = j(-1 - 1) = \underline{\underline{-2j}}$.

d) $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z - j} dz = 0$; e) $\int_{\Gamma} \frac{z}{z + 2j} dz = 0$.

Příklad 5.2.2. Využitím Cauchyho vzorce vypočtete následující integrály

- a) $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z-1} dz$, kde $\Gamma : |z-1| = 1$ je kladně orientovaná kružnice
- b) $\int_{\Gamma} \frac{z^2 + 2z + 2}{z-2} dz$, kde Γ je daná rovnicí $|z| = 3$, kladně orientovaná
- c) $\int_{\Gamma} \frac{e^{jz}}{z} dz$, kde Γ je daná rovnicí $|z+1| = 2$, kladně orientovaná
- d) $\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z} dz$, $\Gamma : |z| = 1$ je kladně orientovaná kružnice
- e) $\int_{\Gamma} \frac{z^2}{z+5-2j} dz$, kde Γ je daná rovnicí $|z+j| = 1$, kladně orientovaná

Řešení: a) $f(z) = e^z$ je holomorfní funkce na množině \mathbb{C} , a bod $z_0 = 1$ leží uvnitř křivky Γ .



Dle Cauchyho vzorce $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z-1} dz = \underline{\underline{2\pi j e}}$.

b) V tomto případě $f(z) = z^2 + 2z + 2$ a $z_0 = 2$ leží uvnitř křivky Γ .

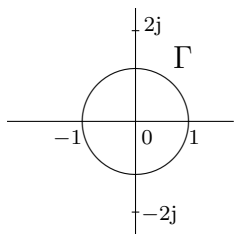
Podle Cauchyho vzorce $\int_{\Gamma} \frac{z^2 + 2z + 2}{z-2} dz = 2\pi j (4 + 4 + 2) = \underline{\underline{20\pi j}}$.

c) $\int_{\Gamma} \frac{e^{jz}}{z} dz = 2\pi j$; d) $\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi j$; e) $\int_{\Gamma} \frac{z^2}{z+5-2j} dz = 0$.

Příklad 5.2.3. Využitím Cauchyho vzorce vypočtete následující integrály

- a) $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2+4)}$, kde $\Gamma : |z| = 1$ je kladně orientovaná kružnice
- b) $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2+1}$, kde Γ je daná rovnicí $|z-j| = 1$, kladně orientovaná
- c) $\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2+1)(z+1)^2}$, kde Γ je daná rovnicí $|z-1-j| = 2$, kladně orientovaná
- d) $\int_{\Gamma} \frac{z^2+2z-1}{z(z+2)} dz$, kde Γ je daná rovnicí $|z+2| = 1$, kladně orientovaná
- e) $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2+1}$, kde Γ je daná rovnicí $|z| = 3$, kladně orientovaná

Řešení: a) Funkce $f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 4)}$ je holomorfní na $\mathbb{C} - \{0, 2j, -2j\}$.



Bod $z_0 = 0$ leží uvnitř křivky Γ , další body, ve kterých funkce není holomorfní leží mimo křivku. Proto funkci upravíme takto:

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 4)} = \frac{\frac{1}{z^2+4}}{z}.$$

Funkce $f(z) = \frac{1}{z^2 + 4}$ spolu s křivkou Γ a bodem $z_0 = 0$ splňují předpoklady k použití Cauchyho vzorce. Můžeme psát

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2 + 4)} = \int_{\Gamma} \frac{\frac{1}{z^2+4}}{z} dz = 2\pi j \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\pi j}}.$$

b) Funkce $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z + j)(z - j)}$ je holomorfní na $\mathbb{C} - \{j, -j\}$.

Bod $z_0 = j$ leží uvnitř křivky Γ , bod $z_1 = -j$ leží mimo křivku.

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 1} = \int_{\Gamma} \frac{\frac{1}{z+j}}{z-j} dz = 2\pi j \frac{1}{2j} = \underline{\underline{\pi}}.$$

c) $\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2 + 1)(z + 1)^2} = \int_{\Gamma} \frac{\frac{1}{(z+j)(z+1)^2}}{z-j} dz = -\frac{\pi}{2}j$; d) $\int_{\Gamma} \frac{z^2 + 2z - 1}{z(z + 2)} dz = \pi j$.

e) Funkce $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z + j)(z - j)}$ je holomorfní na $\mathbb{C} - \{j, -j\}$.

Body $z_0 = j$, a $z_1 = -j$ leží uvnitř křivky Γ a nemůžeme použít Cauchyův vzorec pro tuto funkci ani po úpravě. Rozložíme funkci na parciální zlomky.

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{A}{z + j} + \frac{B}{z - j}$$

$$1 = A(z - j) + B(z + j) \Rightarrow A = \frac{j}{2}, B = -\frac{j}{2}$$

Potom máme

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{j}{2} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z + j} - \frac{j}{2} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - j} = \frac{j}{2} 2\pi j - \frac{j}{2} 2\pi j = \underline{\underline{0}}.$$

(Použili jsme Cauchyův vzorec na každý integrál zvlášť.)

STUDIJNÍ JEDNOTKA

TEORIE REZIDUÍ

Cíle studijní jednotky. V této části ukážeme, jak se dá komplexní funkce rozvinout v mocninnou řadu. Také se naučíte rozpoznat singulární body funkce a určovat reziduum v těchto bodech. Nakonec ukážeme, jak pomocí reziduí počítat komplexní integrály.

6 Teorie reziduí

6.1 Laurentova řada

Nechť je Ω mezikruhová oblast se středem v bodě z_0 . Jestliže komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní v oblasti Ω , potom pro každé $z \in \Omega$ je možno funkci $f(z)$ vyjádřit **Laurentovou řadou**:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde konstanty a_n jsou určeny vzorcí

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

a Γ je libovolná kružnice ležící v mezikruží Ω .

Část $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ se nazývá **hlavní část Laurentovy řady**.

Je vidět, že Taylorova řada je zvláštním případem Laurentovy řady, kde hlavní část se rovná 0.

Poznámka. Pro rozvoj racionální komplexní funkce v Laurentovu řadu využíváme vzorec na součet geometrické řady raději než výpočet jednotlivých koeficientů pomocí křivkového integrálu, jak jsme to uvedli v definici. Je to mnohem rychlejší a přehlednější. Zopakujme si proto geometrickou řadu.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_0 q^n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá **geometrická posloupnost**.

Je-li $|q| \geq 1$, geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$ diverguje.

Je-li $|q| < 1$, je geometrická řada konvergentní a $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}$.

Příklad 6.1.1. Pro funkci $f(z) = \frac{1}{1+z}$ určete Laurantovu řadu se středem v bodě

a) $z_0 = 0$ b) $z_0 = -1$ c) $z_0 = 1$

Řešení: a) Pro $|z| < 1$ je funkce $f(z)$ součtem geometrické řady,

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

Tato řada je Taylorovou řadou.

Pro $|z| > 1$ je $|\frac{1}{z}| < 1$, a proto vyjdeme z jiného vyjádření funkce $f(z)$,

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}} = \frac{\frac{1}{z}}{1-(-\frac{1}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z} \cdot (-\frac{1}{z})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

b) V tomto případě funkce $f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{z-(-1)}$ je dána přímo

Laurentova řadou, která se redukuje na jeden člen.

Laurentova řada funkce je tedy $f(z) = \underline{\underline{(z+1)^{-1}}}$.

c) Funkci upravíme, abychom dostali součet geometrické řady, kde kvocient se dá vyjádřit pomocí $z-1$.

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+(z-1)+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2(1+\frac{z-1}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$$

Pro $|\frac{z-1}{2}| < 1$ platí

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z-1}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

Pro $|\frac{z-1}{2}| > 1$ upravujeme podobně jako v části a).

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{\frac{1}{z-1}}{1+\frac{2}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z-1} \cdot \left(-\frac{2}{z-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}$$

6.2 Singulární body komplexní funkce, reziduová věta

Nechť komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní v určitém okolí bodu z_0 s výjimkou bodu z_0 . Pak z_0 se nazývá **singulárním bodem** funkce $f(z)$.

Klasifikace singulárních bodů:

odstranitelná singularita — hlavní část Laurentovy řady v bodě z_0 se rovná 0 a zřejmě $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$, a je tedy konečná,

podstatná singularita — hlavní část Laurentovy řady v bodě z_0 má nekonečně mnoho nenulových členů, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ neexistuje,

pól m-tého řádu — hlavní část Laurentovy řady v bodě z_0 má konečně mnoho nenulových koeficientů, tj. $a_n = 0$ pro $n < -m$, $a_{-m} \neq 0$, a platí, že $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

Nejdůležitějšími singulárními body komplexní funkce jsou póly. Pro určení řádu pólu užíváme limity $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = a_{-m}$, která musí být vždy konečná a nenulová.

Koeficient a_{-1} z Laurentovy řady funkce $f(z)$ v bodě z_0 se nazývá **reziduem funkce $f(z)$ v bodě z_0** . Značíme $a_{-1} = \operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$.

Vzorec na výpočet rezidua pro pól prvního řádu

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

Vzorec na výpočet rezidua pro pól m-tého řádu

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

Nechť $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, kde funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ jsou holomorfní v bodě z_0 , $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. Potom má funkce $f(z)$ v bodě z_0 pól prvního řádu a platí, že

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

Reziduová věta. Nechť komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní uvnitř a na jednoduché uzavřené, kladně orientované křivce Γ s výjimkou pólů z_1, z_2, \dots, z_n uvnitř křivky Γ , potom

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z)$$

Sčítáme tedy pouze rezidua v pólech, které leží uvnitř křivky Γ .

Příklad 6.2.1. Vypočítejte rezidua v pólech funkce $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$.

Řešení: Funkce $f(z)$ je racionální lomená funkce, takže má za singularity pouze póly, a to jsou kořeny jmenovatele.

Řešíme rovnici $z^3 - z^5 = 0$, $z^3(1 - z^2) = 0$, $z^3(1 - z)(1 + z) = 0$. Máme dva jednoduché kořeny $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, a jeden trojnásobný kořen $z_3 = 0$.

Funkce $f(z)$ má v bodech $z_1 = 1$ a $z_2 = -1$ póly prvního řádu a v bodě $z_3 = 0$ pól třetího řádu.

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{z^3 - z^5} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{z^3(1-z)(1+z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{-z^3(1+z)} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}} \\ \operatorname{res}_{z=-1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{1}{z^3 - z^5} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z+1)}{z^3(1-z)(1+z)} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}, \\ \operatorname{res}_{z=0} f(z) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \left(z^3 \frac{1}{z^3 - z^5} \right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z^3}{z^3(1-z^2)} \right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-z^2} \right)'' = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{2z}{(1-z^2)^2} \right)' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2(1-z^2)^2 + 2z \cdot 2(1-z^2) \cdot 2z}{(1-z^2)^4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Příklad 6.2.2. Vypočítejte rezidua v pólech funkce $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$.

Řešení: Řešíme rovnici $(1+z^2)^2 = 0$, $(z+j)^2(z-j)^2 = 0$.

Funkce $f(z)$ má v bodech $z_1 = j$ a $z_2 = -j$ póly druhého řádu.

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=j} f(z) &= \lim_{z \rightarrow j} \left((z-j)^2 \frac{z^2}{(1+z^2)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow j} \left(\frac{z^2(z-j)^2}{(z-j)^2(z+j)^2} \right)' = \\ &= \lim_{z \rightarrow j} \left(\frac{z^2}{(z+j)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow j} \frac{2zj}{(z+j)^3} = \frac{1}{4j} = \underline{\underline{-\frac{j}{4}}}, \\ \operatorname{res}_{z=-j} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -j} \left((z+j)^2 \frac{z^2}{(1+z^2)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow -j} \frac{-2zj}{(z-j)^3} = \frac{-1}{4j} = \underline{\underline{\frac{j}{4}}}. \end{aligned}$$

Příklad 6.2.3. Vypočítejte rezidua v pólech funkce $f(z) = \frac{1}{\sin z}$.

Řešení: Funkce $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, kde $\varphi(z) = 1$ a $\psi(z) = \sin z$ jsou holomorfní funkce na \mathbb{C} , funkce $\varphi(z) = 1$ je nenulová všude a $\psi(z) = \sin z = 0$ v bodech $z_k = k\pi$, k celé. Navíc $(\sin z)' = \cos z$ je v bodech z_k nenulové.

Funkce $f(z)$ má tedy v bodech $z_k = k\pi$, k celé, póly prvního řádu a

$$\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{\cos k\pi} = \frac{1}{(-1)^k} = \underline{\underline{(-1)^k}}.$$

Příklad 6.2.4. Vypočítejte rezidua v pólech daných funkcí

$$a) f(z) = \frac{1}{1+z^4} \quad b) f(z) = \frac{1}{1+z^n}$$

Řešení: a) Funkce $f(z)$ je podílem dvou holomorfních funkcí, kde $\varphi(z) = 1$ je nenulová na \mathbb{C} . Musíme vyřešit rovnici $1+z^4=0$. Je to binomická rovnice, po úpravě máme $z^4 = -1$. Při řešení této rovnice využijeme zápis komplexních čísel v goniometrickém tvaru na obou stranách rovnice a Moivreovou větu.

Dostaneme kořeny $z_k = \cos \omega_k + j \sin \omega_k$, $k = 0, 1, 2, 3$, kde $\omega_k = \frac{(2k+1)\pi}{4}$.

Navíc $(1+z^4)' = 4z^3$ je v bodech z_k nenulové.

Funkce $f(z)$ má tehdy v bodech z_k s argumenty $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$, $\omega_2 = \frac{3\pi}{4}$, $\omega_3 = \frac{5\pi}{4}$ a $\omega_4 = \frac{7\pi}{4}$ póly prvního řádu a $\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = \frac{z_k}{4(-1)} = -\frac{z_k}{4}$.

b) Postupujeme podobně jako v části a). Řešíme binomickou rovnici $1+z^n=0$.

Dostaneme kořeny z_k s argumenty $\omega_k = \frac{(2k+1)\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Derivace $(1+z^n)' = nz^{n-1}$ je v bodech z_k nenulové. Jsou to póly prvního řádu.

$$\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{nz_k^{n-1}} = \frac{z_k}{nz_k^n} = \frac{z_k}{n(-1)} = -\frac{z_k}{n}.$$

Příklad 6.2.5. Určete u daných funkcí řád pólů a vypočítejte rezidua v těchto pólech

$$a) f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)} \quad b) f(z) = \frac{1}{1+z^3} \quad c) f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$$

$$d) f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z-1)} \quad e) f(z) = \frac{1}{\cos z} \quad f) f(z) = \frac{1}{e^z-1}$$

Řešení: a) $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1$, $\operatorname{res}_{z=1} f(z) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = -\frac{1}{2}$;

b) $\operatorname{res}_{z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j} f(z) = -\frac{1}{6}(1+\sqrt{3}j)$, $\operatorname{res}_{z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j} f(z) = -\frac{1}{6}(1-\sqrt{3}j)$

$\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{3}$; c) $\operatorname{res}_{z=1} f(z) = 1$, $\operatorname{res}_{z=2} f(z) = -1$;

d) $\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{4}$, $\operatorname{res}_{z=j} f(z) = -\frac{1}{8}$, $\operatorname{res}_{z=-j} f(z) = -\frac{1}{8}$;

e) $\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} f(z) = (-1)^{k+1}$, k celé; f) $\operatorname{res}_{z=2k\pi j} f(z) = 1$, k celé.

Příklad 6.2.6. *Vypočtete následující integrály pomocí reziduí*

a) $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z-1)^2}$, kde $\Gamma : |z| = \frac{1}{2}$ je kladně orientovaná kružnice

b) $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz$, kde $\Gamma : |z+1+j| = 2$ je kladně orientovaná kružnice

c) $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz$, kde $\Gamma : |z| = \frac{1}{2}$ je kladně orientovaná kružnice

d) $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z-1)^2}$, kde $\Gamma : |z| = 2$ je kladně orientovaná kružnice

e) $\int_{\Gamma} \frac{z^2+z+1}{z(z-1)^2} dz$, kde $\Gamma : |z| = 2$ je kladně orientovaná kružnice

Řešení: a) Funkce $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ má v bodě $z_1 = 0$ pól prvního řádu a v bodě $z_2 = 1$ pól druhého řádu.

Z obou pólů leží uvnitř křivky Γ pouze pól $z_1 = 0$ a $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1$.

Podle reziduové věty $\int_{\Gamma} \frac{1}{z(z-1)^2} dz = 2\pi j \operatorname{res}_{z=0} f(z) = \underline{\underline{2\pi j}}$.

b) Funkce $f(z) = \frac{e^z}{z(z^2+1)}$ má v bodech $z_1 = 0$, $z_2 = j$ a $z_3 = -j$ póly prvního řádu. Uvnitř křivky Γ leží pouze póly $z_1 = 0$ a $z_3 = -j$.

Dále $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1$ a $\operatorname{res}_{z=-j} f(z) = -\frac{e^{-j}}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz &= 2\pi j \left(\operatorname{res}_{z=0} f(z) + \operatorname{res}_{z=-j} f(z) \right) = 2\pi j \left(1 - \frac{e^{-j}}{2} \right) = \\ &= \underline{\underline{-\pi \sin 1 + j(2\pi - \pi \cos 1)}}. \end{aligned}$$

c) $2\pi j$; d) 0 ; e) $2\pi j$.

STUDIJNÍ JEDNOTKA

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

Cíle studijní jednotky. V této části se naučíte řešit diferenciální rovnice pomocí Laplaceovy transformace. Ukážeme, jak se dají řešit pomocí Laplaceovy transformace integrální diferenciální rovnice a také diferenciální rovnice s nespojitou pravou stranou.

7 Laplaceova integrální transformace

7.1 Definice a vlastnosti Laplaceovy transformace

Nechť funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje následující podmínky:

1. funkce $f(t)$ je po částech spojitá,
2. funkce $f(t) = 0$ pro $t < 0$,
3. funkce $f(t)$ je exponenciálního řádu, tzn. existují konstanty $M, s, t_0 \in \mathbb{R}$, $M, t_0 > 0$, takové, že pro všechna $t \geq t_0$ platí $|f(t)| \leq Me^{st}$.

Potom definujeme funkci komplexní proměnné

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

a říkáme ji **Laplaceova transformace funkce $f(t)$** . Značíme $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$.

Funkce $f(t)$, která splňuje podmínky 1., 2., 3. se nazývá **předmět** a funkce $F(p)$ se nazývá **obraz** funkce $f(t)$.

Budeme předpokládat, že podmínka 2. je automaticky splněná.

Např. výrazem $\mathcal{L}\{e^t\}$ rozumíme obraz funkce $f(t) = 0$ pro $t < 0$ a $f(t) = e^t$ pro $t \geq 0$.

Laplaceova transformace je lineární:

$$\mathcal{L}\{a f(t) + b g(t)\} = a \mathcal{L}\{f(t)\} + b \mathcal{L}\{g(t)\}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Základní slovník a gramatika Laplaceovy transformace

Číslo vzorce	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$
1.	c	$\frac{c}{p}$
2.	$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3.	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
4.	$t^n e^{at}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
5.	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
6.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
7.	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$
8.	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$
9.	$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
10.	$f''(t)$	$p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$
11.	$f'''(t)$	$p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0)$
12.	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
13.	$\int_0^t f(u) du$	$\frac{F(p)}{p}$
14.	$f(t-a), a \geq 0$	$e^{-ap}F(p)$

Příklad 7.1.1. *Přímým výpočtem určete obraz funkce $f(t) = t$.*

Řešení: Budeme hledat obraz funkce

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \geq 0, \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

Tato funkce je spojitá, její derivace je po částech spojitá ($f'(t) = 0$ pro $t < 0$ a $f'(t) = 1$ pro $t > 0$) a splňuje podmínku 2. Zbývá ověřit 3. podmínku.

Platí, že $t < e^t$ pro $t \geq 0$. Daná funkce je vzorem Laplaceovy transformace.

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^{\infty} t e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A t e^{-pt} dt.$$

Integrál spočítáme metodou per partes:

$$\begin{aligned} u &= t & u' &= 1 \\ v' &= e^{-pt} & v &= -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{aligned}$$

po dosazení

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A t e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\left[-\frac{t}{p} e^{-pt} \right]_0^A - \int_0^A \left(-\frac{1}{p}\right) e^{-pt} dt \right) = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{A}{p} e^{-pA} + \frac{1}{p} \int_0^A e^{-pt} dt \right) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{A}{p e^{pA}} + \frac{1}{p} \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^A \right) = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{pro } \operatorname{Re} p > 0 \text{ je} \\ \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A}{p e^{pA}} = 0 \end{array} \right| = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{p^2} (e^{-pA} - 1) \right) = \underline{\underline{\frac{1}{p^2}}}. \end{aligned}$$

Příklad 7.1.2. *Pomocí tabulky určete obraz funkce $f(t) = t^3 + 3t^2 + 2t + 1$.*

Řešení: Budeme používat vzorec číslo 2.

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{p^4} = \frac{6}{p^4}, \quad \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{p^3} = \frac{2}{p^3}, \quad \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{p^2}, \quad \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}.$$

Z linearity Laplaceovy transformace dostaneme

$$\mathcal{L}\{t^3 + 3t^2 + 2t + 1\} = \frac{6}{p^4} + 3\frac{2}{p^3} + 2\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} = \underline{\underline{\frac{6}{p^4} + \frac{6}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}}}.$$

7.2 Zpětná Laplaceova transformace

Přechod od operátorové funkce $F(p)$ ke vzoru $f(t)$ se nazývá **zpětná Laplaceova transformace** a značí se symbolem $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$.

Ke každému obrazu je předmět určen jednoznačně. Při hledání předmětu užíváme pak slovník Laplaceovy transformace nebo použijeme tzv. Heavisideovu větu o rozkladu.

Věta o rozkladu. Nechť operátorová funkce $F(p)$ má tvar ryze racionální lomené funkce

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)},$$

kde $M(p)$ a $N(p)$ jsou polynomy a stupeň polynomu $M(p)$ je menší než stupeň polynomu $N(p)$. Označme p_k póly funkce $F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$. Pak pro zpětnou Laplaceovou transformaci funkce $F(p)$ platí

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \sum_{p_k} \operatorname{res}_{p=p_k} [F(p) e^{pt}], \quad t > 0$$

Poznámka. Jestliže funkce $F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$ s reálními koeficienty má komplexní póly $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, stačí vypočítat reziduum pouze pro jeden kořen, protože platí:

$$\operatorname{res}_{p=\alpha+j\beta} [F(p) e^{pt}] + \operatorname{res}_{p=\alpha-j\beta} [F(p) e^{pt}] = 2\operatorname{Re} \operatorname{res}_{p=\alpha+j\beta} [F(p) e^{pt}]$$

Příklad 7.2.1. Najděte vzor funkce $F(p) = \frac{1}{p^2(p-4)}$.

Řešení: 1. Při hledání vzoru pomocí tabulky nejdřív musíme funkci rozložit na parciální zlomky a pak použít vzorce z tabulky na všechny parciální zlomky postupně.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2(p-4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{4p^2} - \frac{1}{16p} + \frac{1}{16(p-4)}\right\} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}t - \frac{1}{16} + \frac{1}{16}e^{4t}}}.$$

2. Při hledání vzoru pomocí věty o rozkladu nejdřív najdeme póly funkce.

Funkce $F(p) = \frac{1}{p^2(p-4)}$ má v bodě $p_1 = 0$ pól druhého řádu a v bodě $p_2 = 4$ pól prvního řádu. Vypočítáme příslušná rezidua a dosadíme.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2(p-4)}\right\} &= \operatorname{res}_{p=0} F(p) e^{pt} + \operatorname{res}_{p=4} F(p) e^{pt} = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p^2 \frac{e^{pt}}{p^2(p-4)}\right)' + \\ &+ \lim_{p \rightarrow 4} \left((p-4) \frac{e^{pt}}{p^2(p-4)}\right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{e^{pt}t(p-4) - e^{pt}}{(p-4)^2}\right) + \lim_{p \rightarrow 4} \frac{e^{pt}}{p^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}t - \frac{1}{16} + \frac{1}{16}e^{4t}}}. \end{aligned}$$

Příklad 7.2.2. Pomocí tabulky najděte vzory daných obrazů $F(p)$

$$\begin{array}{lll} a) F(p) = \frac{3}{p-8} & b) F(p) = \frac{1}{p^2+4} & c) F(p) = \frac{p+1}{p^2+9} \\ d) F(p) = \frac{p+1}{p^2+2p+2} & e) F(p) = \frac{p}{p^2+2p+2} & f) F(p) = \frac{2p}{p^2+4p+7} \\ g) F(p) = \frac{p+1}{p(p+2)} & h) F(p) = \frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)} & \end{array}$$

Řešení:

$$a) \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{p-8}\right\} = 3 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-8}\right\} = \underline{\underline{3e^{8t}}}. \quad (\text{Vzorec č. 3.})$$

$$b) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+4}\right\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p^2+4}\right\} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \sin 2t}}. \quad (\text{Vzorec č. 6.})$$

$$\begin{aligned} c) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+1}{p^2+9}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+9} + \frac{1}{p^2+9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+9}\right\} + \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{p^2+9}\right\} = \\ &= \underline{\underline{\cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t}}. \quad (\text{Vzorce č. 5. a 6.}) \end{aligned}$$

$$d) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+1}{p^2+2p+2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+1}{(p+1)^2+1}\right\} = \underline{\underline{e^{-t} \cos t}}. \quad (\text{Vzorec č. 7.})$$

$$\begin{aligned} e) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+2p+2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+1-1}{(p+1)^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+1}{(p+1)^2+1}\right\} - \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)^2+1}\right\} = \underline{\underline{e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t}}. \quad (\text{Vzorce č. 7. a 8.}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2p}{p^2+4p+7}\right\} &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+2-2}{(p+2)^2+3}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+2}{(p+2)^2+3}\right\} - \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(p+2)^2+3}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+2}{(p+2)^2+3}\right\} - \frac{4}{\sqrt{3}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}}{(p+2)^2+3}\right\} = \\ &= \underline{\underline{2e^{-2t} \cos \sqrt{3} t - \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-2t} \sin \sqrt{3} t}}. \quad (\text{Vzorce č. 7. a 8.}) \end{aligned}$$

$$g) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+1}{p(p+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2(p+2)}\right\} = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t}}}. \quad (\text{Vzorce č. 1. a 3.})$$

$$\begin{aligned} h) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-1} + \frac{-p+2}{(p+1)^2+4}\right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-1} - \frac{p+1}{(p+1)^2+4} + \frac{3}{2} \frac{2}{(p+1)^2+4}\right\} = \underline{\underline{e^t - e^{-t} \cos 2t + \frac{3}{2} e^{-t} \sin 2t}}. \end{aligned}$$

(Vzorce č. 3., 7. a 8.)

Příklad 7.2.3. Pomocí věty o rozkladu najděte vzory daných obrazů $F(p)$.

$$a) F(p) = \frac{p+2}{p^2-4p+3}$$

$$b) F(p) = \frac{p^2+1}{(p+1)^2(p-1)}$$

$$c) F(p) = \frac{p^2+p-1}{(p-2)(p^2-p-20)}$$

$$d) F(p) = \frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$$

Řešení: a) Funkce $\frac{p+2}{p^2-4p+3}$ má póly prvního řádu v bodech $p_1 = 3$ a $p_2 = 1$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+2}{p^2-4p+3}\right\} = \operatorname{res}_{p=p_1} F(p) e^{pt} + \operatorname{res}_{p=p_2} F(p) e^{pt} =$$

$$\lim_{p \rightarrow 3} \left((p-3) \frac{(p+2)e^{pt}}{(p-3)(p-1)} \right) + \lim_{p \rightarrow 1} \left((p-1) \frac{(p+2)e^{pt}}{(p-3)(p-1)} \right) = \underline{\underline{\frac{5}{2} e^{3t} - \frac{3}{2} e^t.}}$$

b) Funkce $F(p) = \frac{p^2+1}{(p+1)^2(p-1)}$ má pól druhého řádu v bodě $p_1 = -1$ a pól prvního řádu v bodě $p_2 = 1$.

$$\text{Potom } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p^2+1}{(p+1)^2(p-1)}\right\} = \operatorname{res}_{p=1} F(p) e^{pt} + \operatorname{res}_{p=-1} F(p) e^{pt} =$$

$$= \lim_{p \rightarrow 1} \left((p-1) \frac{(p^2+1)e^{pt}}{(p+1)^2(p-1)} \right) + \lim_{p \rightarrow -1} \left((p+1)^2 \frac{(p^2+1)e^{pt}}{(p+1)^2(p-1)} \right)' =$$

$$\lim_{p \rightarrow 1} \frac{(p^2+1)e^{pt}}{(p+1)^2} + \lim_{p \rightarrow -1} \frac{(2pe^{pt} + (p^2+1)e^{pt}t)(p-1) - (p^2+1)e^{pt}}{(p-1)^2} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-t} - te^{-t}.}}$$

c) Funkce $F(p) = \frac{p^2+p-1}{(p-2)(p^2-p-20)} = \frac{p^2+p-1}{(p-2)(p-5)(p+4)}$ má v bodech $p_1 = 2$, $p_2 = 5$ a $p_3 = -4$ póly prvního řádu.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p^2+p-1}{(p-2)(p^2-p-20)}\right\} = \operatorname{res}_{p=2} F(p) e^{pt} + \operatorname{res}_{p=5} F(p) e^{pt} + \operatorname{res}_{p=-4} F(p) e^{pt} =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{5}{18} e^{2t} + \frac{29}{27} e^{5t} + \frac{11}{54} e^{-4t}.}}$$

d) Funkce $F(p) = \frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$ má póly prvního řádu v bodech $p_1 = 1$, $p_2 = -1 + 2j$ a $p_3 = -1 - 2j$.

Nejdřív spočítáme reziduum v bodě $p_2 = -1 + 2j$.

$$\operatorname{res}_{p=p_2} F(p) e^{pt} = \lim_{p \rightarrow -1+2j} \left((p+1-2j) \frac{(5p+3)e^{pt}}{(p-1)(p+1-2j)(p+1+2j)} \right) =$$

$$= \lim_{p \rightarrow -1+2j} \frac{(5p+3)e^{pt}}{(p-1)(p+1+2j)} = -\frac{2+3j}{4} e^{(-1+2j)t}.$$

$$\begin{aligned} \text{Platí, že } \operatorname{res}_{p=p_2} F(p) e^{pt} + \operatorname{res}_{p=p_3} F(p) e^{pt} &= 2\mathcal{R}e \operatorname{res}_{p=p_2} F(p) e^{pt} = \\ &= 2\mathcal{R}e \left(-\frac{2+3j}{4} e^{-t} (\cos 2t + j \sin 2t) \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} e^{-t} \cos 2t + \frac{3}{4} e^{-t} \sin 2t \right). \end{aligned}$$

Ještě spočítáme, že $\operatorname{res}_{p=p_1} F(p) e^{pt} = e^t$ a výsledky sečteme.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)} \right\} = \underline{\underline{e^t - e^{-t} \cos 2t + \frac{3}{2} e^{-t} \sin 2t.}}$$

Příklad 7.2.4. Najděte vzory daných obrazů $F(p)$

$$a) F(p) = \frac{p^2+4}{p^3+p^2-2p}$$

$$b) F(p) = \frac{4}{(p+1)^4} - \frac{p}{p^2+2}$$

$$c) F(p) = \frac{2p}{(p^2+1)(p^2+4)}$$

$$d) F(p) = \frac{1}{(p+3)(p-2)^2}$$

$$e) F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$$

$$f) F(p) = \frac{p^2+1}{p(p+2)(p+1)}$$

Řešení: a) $f(t) = -2 + \frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^t$; b) $f(t) = \frac{2}{3}t^3e^{-t} - \cos \sqrt{2}t$;

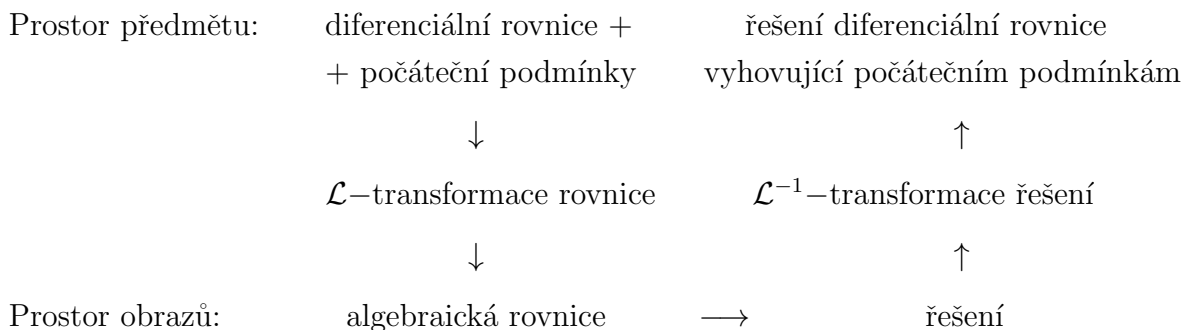
c) $f(t) = \frac{2}{3}(\cos t - \cos 2t)$; d) $f(t) = \frac{1}{25}(e^{-3t} + (5t-1)e^{2t})$;

e) $f(t) = \frac{1}{2}t^2e^{2t} - 4te^{2t} + 6e^{2t} - 2te^t - 6e^t$; f) $f(t) = \frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t}$.

7.3 Řešení diferenciálních rovnic Laplaceovou transformací

Ze základního slovníku Laplaceovy transformace víme, že operaci derivování podle t v prostoru předmětů odpovídá násobení proměnnou p v prostoru obrazů. Můžeme proto očekávat, že Laplaceova transformace převede jisté typy diferenciálních rovnic na algebraické.

Řešení diferenciálních rovnic Laplaceovou transformací můžeme schematicky znázornit takto:



Uvedený způsob řešení můžeme použít i pro řešení integrálně diferenciálních rovnic, kde se v rovnici objevuje i integrál neznámé funkce.

Příklad 7.3.1. Laplaceovou transformací řešte následující diferenciální rovnice

a) $y' - 2y = 1, \quad y(0) = -2$

b) $y''' + y' = e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

c) $y'' + 4y' + 8y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

d) $y'' - 18y' + 72y = -36t e^{6t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

e) $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$

f) $y'' - 4y = 4t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

g) $y''' - 3y' + 2y = 8te^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$

Řešení: Podle tabulky přetransformujeme celou rovnici.

a) $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p); \quad \mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p) - (-2); \quad \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}.$

Dostali jsme rovnici $pY(p) + 2 - 2Y(p) = \frac{1}{p}$, z které vyjádříme $Y(p)$.

$$Y(p)(p - 2) = \frac{1}{p} - 2; \quad Y(p) = \frac{1 - 2p}{p(p - 2)} = -\frac{1}{2p} - \frac{3}{2(p - 2)}.$$

Zpětnou transformací dostaneme, že $y(t) = \underline{\underline{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{2t}}}$.

b) $\mathcal{L}\{y'''(t)\} = p^3Y(p); \quad \mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p); \quad \mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{p - 2}.$

Dostali jsme rovnici $p^3Y(p) + pY(p) = \frac{1}{p - 2}$, z které $Y(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)(p - 2)}$.

K zpětné transformaci použijeme větu o rozkladu.

$$y(t) = \underline{\underline{-\frac{1}{2} + \frac{1}{10} e^{2t} + \frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t}}.$$

c) $\mathcal{L}\{y''(t)\} = p^2Y(p) - 1; \quad \mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p); \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p).$

$$p^2Y(p) - 1 + 4pY(p) + 8Y(p) = 0; \quad Y(p)(p^2 + 4p + 8) = 1,$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 8} = \frac{1}{(p + 2)^2 + 4},$$

$$y(t) = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{-2t} \sin 2t}}.$$

d) $y = (t + 3t^2) e^{6t}; \quad e) \quad y = e^{3t} + te^{3t}; \quad f) \quad y = \frac{3}{4} e^{2t} + \frac{1}{4} e^{-2t} - t;$

g) $y = 2te^{-t} + te^t - e^t + e^{-2t}.$

Příklad 7.3.2. Laplaceovou transformací řešte následující integrálně diferenciální rovnice

$$a) y' + 2y + 2 \int_0^t y(s) ds = 1, \quad y(0) = 0$$

$$b) y' + 2y + 5 \int_0^t y(s) ds = 2, \quad y(0) = 1$$

Řešení:

$$a) \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p); \quad \mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p); \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^t y(s) ds\right\} = \frac{1}{p}Y(p); \quad \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}.$$

Dostali jsme rovnici $pY(p) + 2Y(p) + \frac{2}{p}Y(p) = \frac{1}{p}$, z které vyjádříme $Y(p)$.

$$\text{Máme } Y(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 2} = \frac{1}{(p+1)^2 + 1}. \quad \text{Potom } \underline{\underline{y(t) = e^{-t} \sin t.}}$$

$$b) \mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p) - 1; \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^t y(s) ds\right\} = \frac{1}{p}Y(p); \quad \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}.$$

$$\text{Řešíme algebraickou rovnici } pY(p) - 1 + 2Y(p) + \frac{5}{p}Y(p) = \frac{2}{p}.$$

$$\text{Z toho } Y(p) = \frac{2+p}{p^2 + 2p + 5} = \frac{p+1+1}{(p+1)^2 + 4} = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(p+1)^2 + 4}.$$

$$\text{Potom } \underline{\underline{y(t) = e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t.}}$$

Příklad 7.3.3. Najděte proudovou odezvu v jednoduchém RLC obvodu, kde odpor resistoru je $R = 20 \Omega$, samoindukce cívky je $L = 0,1 H$, kapacita kondenzátoru je $C = 1 \mu F = 10^{-6} F$ a napětí $U = 100 V$. Počáteční proud je $i(0) = 0$.

Řešení: Proud v obvodu splňuje integrálně diferenciální rovnici

$$Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds = U, \quad i(0) = 0.$$

Dosadíme do rovnice za R, L, C a U . Vzniklou rovnici budeme řešit pomocí

$$\text{Laplaceovy transformace: } 20i(t) + 0,1i'(t) + 10^6 \int_0^t i(s) ds = 100, \quad i(0) = 0.$$

$$20I(p) + 0,1pI(p) + \frac{10^6}{p}I(p) = \frac{100}{p}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vyjádříme } I(p): \quad I(p) &= \frac{100}{p} \cdot \frac{p}{0,1p^2 + 20p + 10^6} = \frac{1000}{p^2 + 200p + 10^7} = \\ &= \frac{1000}{(p+100)^2 + 9990000} \doteq \frac{1000}{(p+100)^2 + 3160^2} \doteq 0,3 \cdot \frac{3160}{(p+100)^2 + 3160^2}. \end{aligned}$$

Zpětnou transformací dostaneme, že $\underline{\underline{i(t) = 0,3 e^{-100t} \sin 3160t.}}$

7.4 Laplaceovy obrazy konečných impulsů

Při hledání obrazů konečných impulsů užíváme tzv. Diracův impuls. Jedná se o zobecněnou funkci $\delta(t - a)$, soustředěnou do bodu $a \in \mathbb{R}^+$, která má následující vlastnosti:

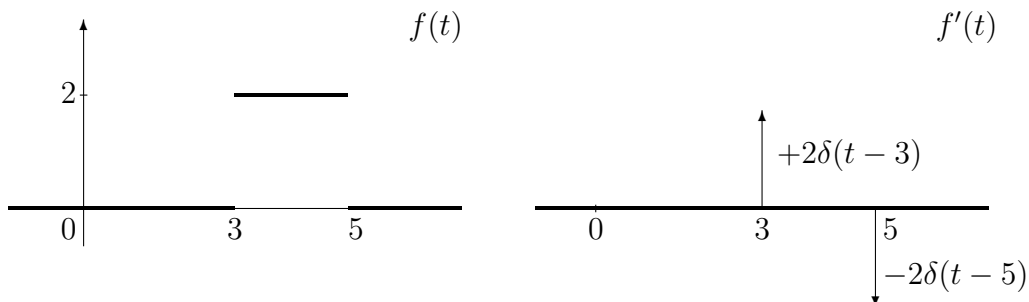
1. $\delta(t - a) = \begin{cases} \infty & \text{pro } t = a \\ 0 & \text{pro } t \neq a \end{cases}$
2. $\int_0^\infty \delta(t - a) dt = 1$
3. $\mathcal{L}\{\delta(t - a)\} = e^{-ap}$
4. $\mathcal{L}\{\delta'(t - a)\} = p e^{-ap}$
5. $\mathcal{L}\{\delta^n(t - a)\} = p^n e^{-ap}$

Zobecněná derivace nespojitě funkce v bodě t_0 , kde má daná funkce skok k , se rovná $k\delta(t - t_0)$. Na základě toho napíšeme zobecněnou derivaci konečného impulsu jako součet Diracových impulsů a jejich derivací a použijeme Laplaceovou transformaci na vzniklou rovnici. Postup ukážeme na příkladě.

Příklad 7.4.1. *Určete Laplaceovu transformaci funkcí*

- | | |
|---|---|
| <p>a) $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro } t \in \langle 3, 5 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 3, 5 \rangle \end{cases}$</p> | <p>b) $f(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$</p> |
| <p>c) $f(t) = \begin{cases} t - t^2 & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$</p> | <p>d) $f(t) = \begin{cases} 2t & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 2 & \text{pro } t \in \langle 1, 3 \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$</p> |
| <p>e) $f(t) = \begin{cases} 4 - t & \text{pro } t \in \langle 1, 4 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 1, 4 \rangle \end{cases}$</p> | <p>f) $f(t) = \begin{cases} 3t & \text{pro } t \in \langle 0, 3 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, 3 \rangle \end{cases}$</p> |

Řešení: a) Nakreslíme grafy funkcí $f(t)$ a $f'(t)$.



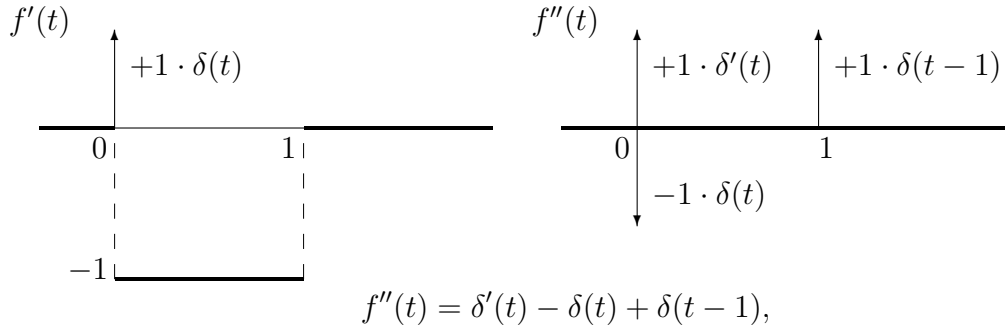
Vidíme, že $f'(t) = 2\delta(t - 3) - 2\delta(t - 5)$.

Použijeme Laplaceovou transformaci na obě strany rovnice. Dostaneme

$$pF(p) = \mathcal{L}\{f'(t)\} = \mathcal{L}\{2\delta(t - 3) - 2\delta(t - 5)\} = 2e^{-3p} - 2e^{-5p}.$$

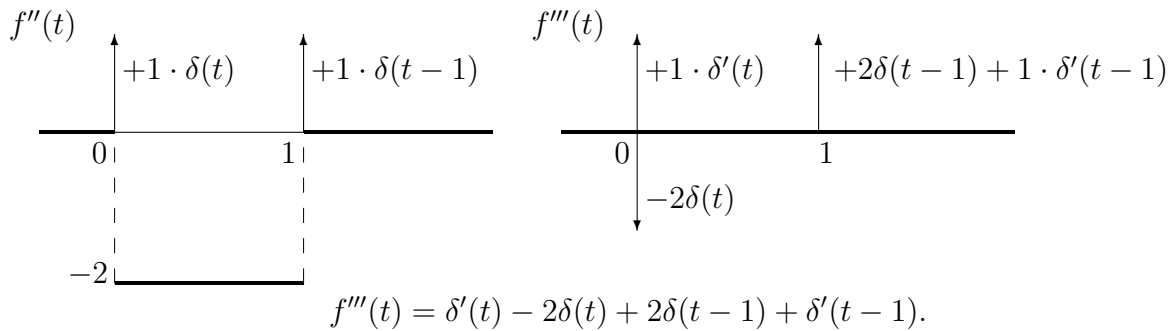
Z vnější rovnosti vyjádříme $F(p) = \frac{2}{p} (e^{-3p} - e^{-5p})$.

b) Po nakreslení obrázku funkce a její zobecněné derivace dostaneme pořád nespojitou funkci. Až druhou derivaci můžeme vyjádřit pouze pomocí Diracových impulsů.



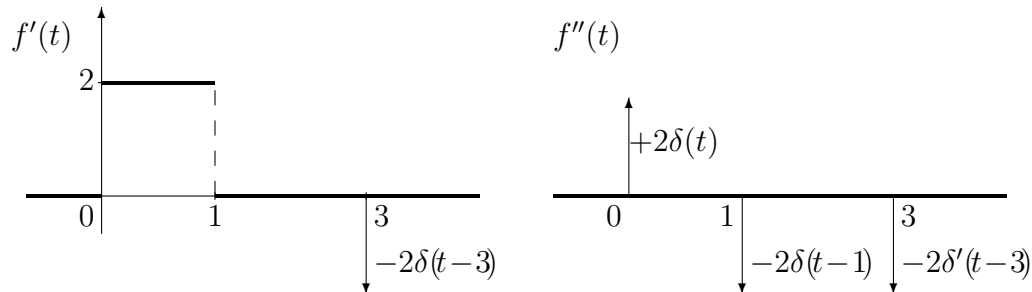
$$p^2 F(p) = \mathcal{L}\{f''(t)\} = p - 1 + e^{-p}. \quad \text{Z toho } \underline{\underline{F(p) = \frac{1}{p^2} (p - 1 + e^{-p}).}}$$

c) Až v druhé a třetí zobecněné derivaci se objeví Diracovy impulsy.



$$\text{Potom } \underline{\underline{\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{p^3} (p - 2 + 2e^{-p} + pe^{-p}).}}$$

d) I v tomto příkladě musíme počítat druhou zobecněnou derivaci dané funkce.



$$p^2 F(p) = \mathcal{L}\{2\delta(t) - 2\delta(t - 1) - 2\delta'(t - 3)\} = 2 - 2e^{-p} - 2pe^{-3p}.$$

$$\text{Z toho } \underline{\underline{\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{p^2} (2 - 2e^{-p} - 2pe^{-3p}).}}$$

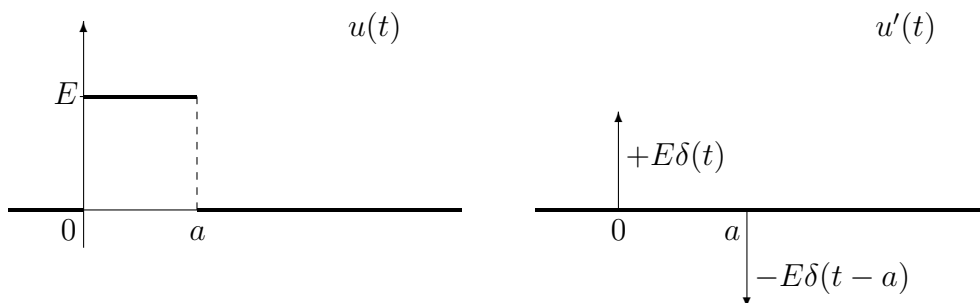
$$\text{e) } F(p) = \frac{1}{p^2} (3pe^{-p} - e^{-p} + e^{-4p}); \quad \text{f) } F(p) = \frac{1}{p^2} (3 - 9pe^{-3p} - 3e^{-3p}).$$

Příklad 7.4.2. Řešte diferenciální rovnici $L \frac{di}{dt} + Ri = u(t)$, $i(0) = 0$, kterou je popsán průběh proudu v elektrickém obvodu se seriově zapojenou cívku s indukčností L , ohmickým odporem R a vnějším napětím $u(t)$, kde

$$u(t) = \begin{cases} E & \text{pro } t \in \langle 0, a \rangle, \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0, a \rangle. \end{cases}$$

Řešení: $\mathcal{L}\{i(t)\} = I(p)$; $\mathcal{L}\{i'(t)\} = pI(p)$;

Pro určení Laplaceovy transformace pravé strany musíme přetransformovat konečný impuls:



Vidíme, že $u'(t) = E\delta(t) - E\delta(t-a)$. Použijeme Laplaceovou transformaci na obě strany této rovnice a dostaneme

$$pU(p) = \mathcal{L}\{E\delta(t) - E\delta(t-a)\} = E - Ee^{-ap} \quad \text{a} \quad U(p) = \frac{E}{p}(1 - e^{-ap}).$$

Dostali jsme rovnici $pLI(p) + RI(p) = \frac{E}{p}(1 - e^{-ap})$, z které vyjádříme

$$I(p) = E \frac{1 - e^{-ap}}{p(Lp + R)} = \frac{E}{L} \frac{1 - e^{-ap}}{p(p + \frac{R}{L})} = \frac{E}{L} \left(\frac{1}{p(p + \frac{R}{L})} - \frac{e^{-ap}}{p(p + \frac{R}{L})} \right).$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p(p + \frac{R}{L})} \right\} = \operatorname{res}_{p=0} \frac{1}{p(p + \frac{R}{L})} e^{pt} + \operatorname{res}_{p=-\frac{R}{L}} \frac{1}{p(p + \frac{R}{L})} e^{pt} =$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{pt}}{p + \frac{R}{L}} + \lim_{p \rightarrow -\frac{R}{L}} \frac{e^{pt}}{p} = \frac{L}{R} - \frac{L}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{L}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right);$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-ap}}{p(p + \frac{R}{L})} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-ap} \cdot \frac{1}{p(p + \frac{R}{L})} \right\} = \frac{L}{R} - \frac{L}{R} e^{-\frac{R}{L}(t-a)}; \quad t \geq a.$$

Pro $t < a$ dodefinujeme funkci $i(t)$ nulou. Potom dostaneme řešení obvodu

$$i(t) = \begin{cases} \frac{E}{L} \frac{L}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) & \text{pro } t \in \langle 0, a \rangle, \\ \frac{E}{L} \left(\frac{L}{R} - \frac{L}{R} e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{L}{R} + \frac{L}{R} e^{-\frac{R}{L}(t-a)} \right) = \frac{E}{R} \left(e^{-\frac{R}{L}(t-a)} - e^{-\frac{R}{L}t} \right), & \text{pro } t > a. \end{cases}$$

STUDIJNÍ JEDNOTKA

FOURIEROVY ŘADY

Cíle studijní jednotky. V této části ukážeme, jak je možné danou reálnou funkci na konečném intervalu vyjádřit ve tvaru nekonečné řady ze sinů a kosinů - tedy ve tvaru Fourierovy řady.

8 Fourierovy řady

8.1 Definice a vlastnosti Fourierovy řady

Nekonečná řada, která má tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

se nazývá **trigonometrickou řadou** s periodou T .

Nechť $T > 0$ a $f : \langle a, a+T \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je reálná funkce reálné proměnné, která je na tomto intervalu po částech spojitá a má po částech spojitou derivaci (říkáme, že funkce je po částech hladká). Potom můžeme k funkci f sestrojít v trigonometrickou řadu periodou T , ve které pro čísla a_n, b_n platí

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos n\omega t \, dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin n\omega t \, dt$$

a kterou nazýváme **Fourierovou řadou funkce f** a píšeme

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Čísla a_n, b_n se nazývají **Fourierovy koeficienty**. Symbol \approx znamená skoro rovnost. Kdy se funkce přesně rovná své Fourierové řadě a jak se chová v bodech, kde rovnost neplatí uvádíme níže.

Součet Fourierovy řady je roven zadané funkci tam, kde je funkce spojitá:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = f(t), \quad t \in (a, a + T),$$

$t \in (a, a + T)$, funkce spojitá v t .

V bodech nespojitosti se součet rovná aritmetickému průměru limity zprava a limity zleva:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)],$$

$t \in (a, a + T)$, funkce nespojitá v t .

Nechť funkce f po částech hladká na symetrickém intervalu $\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$. Potom:

- Je-li f **sudá** funkce, pak

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t \, dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

a Fourierův rozvoj funkce se redukuje na **kosinovou řadu**.

- Je-li f **lichá** funkce, pak

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t \, dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

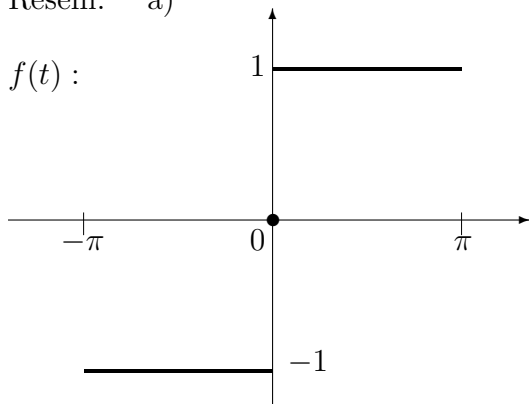
a Fourierův rozvoj funkce se redukuje na **sinovou řadu**.

Příklad 8.1.1. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(t)$ na daném intervalu

$$a) f(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, \pi) \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t \in \langle -\pi, 0 \rangle \end{cases} \quad b) f(t) = |t|; \quad t \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$c) f(t) = t^2; \quad t \in \langle -\pi, \pi \rangle \quad d) f(t) = \begin{cases} 0, & t \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ t, & t \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases}$$

Řešení: a)



Nejdříve jsme nakreslili graf funkce. Z obrázku vidíme, že funkce je po částech spojitá na $\langle -\pi, \pi \rangle$ a je lichá. Potom $a_n = 0$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$, $T = 2\pi$ a

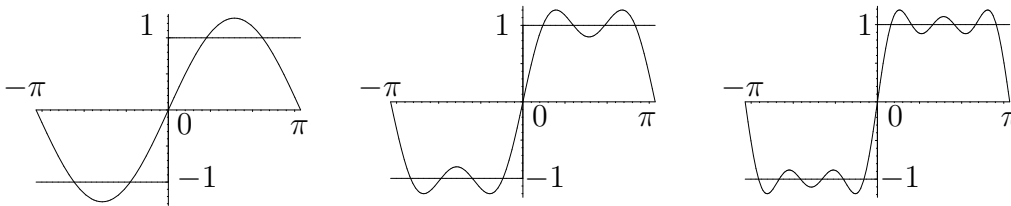
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

Koeficienty b_n spočítáme podle vzorce: $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt =$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt = \frac{2}{n\pi} [-\cos nt]_0^{\pi} = \frac{-2 \cos n\pi + 2}{n\pi} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k, \\ \frac{4}{n\pi} & \text{pro } n = 2k - 1. \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)t = \frac{4}{\pi} \sin t + \frac{4}{3\pi} \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \sin 5t + \dots$$

Do následujících obrázků jsme nakreslili grafy funkce $f(t)$ a součtů S_N prvních N členů jeho Fourierovy řady ($N = 1, 3, 5$).

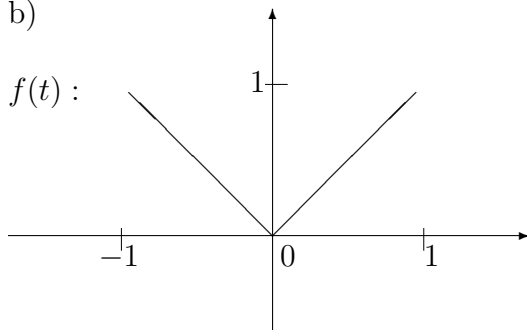


$$f(t) \text{ a } S_1(t) = \frac{4}{\pi} \sin t$$

$$f(t) \text{ a } S_3(t) = \frac{4}{\pi} \sin t + \frac{4}{3\pi} \sin 3t$$

$$f(t) \text{ a } S_5(t) = \frac{4}{\pi} \sin t + \frac{4}{3\pi} \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \sin 5t$$

b)



Funkce $f(t) = |t|$ je spojitá na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ a je sudá. Potom $b_n = 0$.

Perioda funkce $T = 2$ a $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Koeficienty a_n spočítáme podle vzorce: $a_0 = \int_{-1}^1 f(t) \, dt = 2 \int_0^1 t \, dt = 1,$

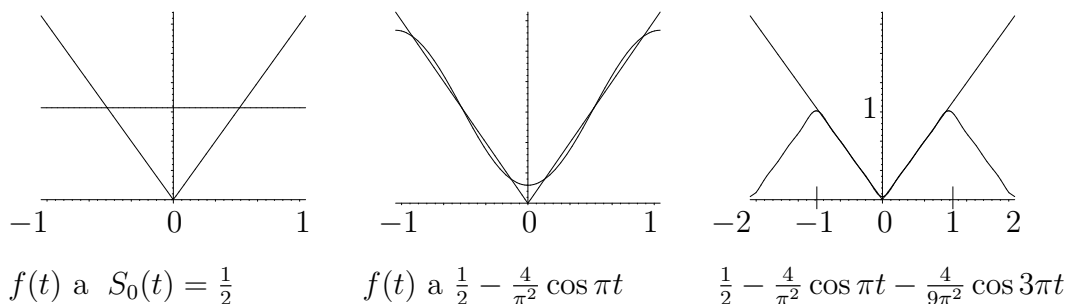
$$a_n = \int_{-1}^1 f(t) \cos n\pi t \, dt = 2 \int_0^1 t \cos n\pi t \, dt = [\text{metoda per partes}]$$

$$= 2 \left[\frac{t \sin n\pi t}{n\pi} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin n\pi t}{\pi n} \, dt = \frac{2}{\pi^2 n^2} [\cos n\pi t]_0^1 = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k, \\ \frac{-4}{\pi^2 n^2} & \text{pro } n = 2k - 1, \end{cases}$$

Dosadíme do vzorce pro Fourierovu řadu a dostaneme, že pro $t \in \langle -1, 1 \rangle$

$$|t| = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{\pi^2(2k-1)^2} \cos(2k-1)\pi t \right) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos \pi t - \frac{4}{9\pi^2} \cos 3\pi t - \dots$$

Znovu jsme nakreslili funkci $f(t)$ a částečné součty její Fourierovy řady.



Do posledního obrázku jsme nakreslili funkce $|t|$ a S_3 na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$. Je tady dobře vidět, že Fourierova řada funkce je periodická funkce a aproximuje $|t|$ pouze na $\langle -1, 1 \rangle$.

c) Funkce $f(t) = t^2$ je spojitá na $\langle -\pi, \pi \rangle$ a je sudá.

Potom $b_n = 0$ pro $n = 1, 2, \dots$, $T = 2\pi$, $\omega = 1$ a koeficienty a_n spočítáme:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos nt dt = [\text{metoda per partes}] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{t^2 \sin nt}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2t \sin nt}{n} dt = -\frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} t \sin nt dt = [\text{per partes}] \\ &= \frac{4}{\pi n^2} [t \cos nt]_0^{\pi} = \frac{4\pi \cos n\pi}{\pi n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

Dostali jsme, že pro $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nt \right) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos t + \cos 2t - \frac{4}{9} \cos 3t + \dots$$

d) Funkce $f(t)$ je spojitá a není sudá ani lichá.

$T = 2\pi$ a $\omega = 1$. Koeficienty spočítáme podle vzorců:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

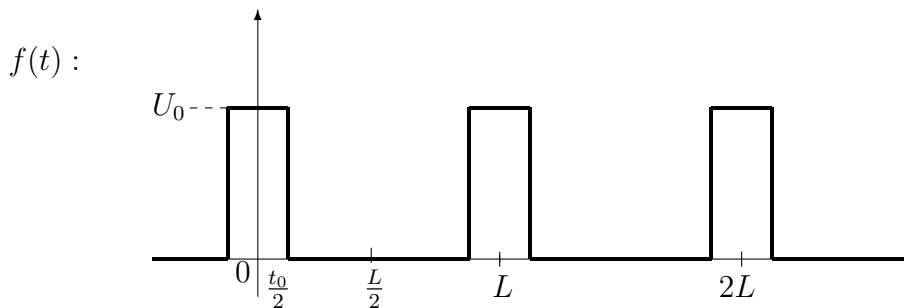
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt dt = [\text{metoda per partes}] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t \sin nt}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{n} dt = \frac{1}{\pi n^2} [\cos nt]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k, \\ \frac{-2}{\pi n^2} & \text{pro } n = 2k - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin nt dt = [\text{metoda per partes}] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-t \cos nt}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nt}{n} dt = \frac{-\cos n\pi}{n} = \begin{cases} \frac{-1}{n} & \text{pro } n = 2k, \\ \frac{1}{n} & \text{pro } n = 2k - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Dosadíme do vzorce pro Fourierovu řadu a dostaneme, že pro $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$

$$\underline{\underline{f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nt + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt \right)}}.$$

Příklad 8.1.2. Najděte Fourierovu řadu pro napětí tvořené sledem obdélníkových impulsů podle obrázku:



Řešení: Funkce je sudá a po částech hladká, a proto existuje Fourierův rozvoj funkce v kosinovou řadu. Potom $b_n = 0$. Perioda funkce $T = L$ a $\omega = \frac{2\pi}{L}$.

Koeficienty a_n spočítáme podle vzorce:

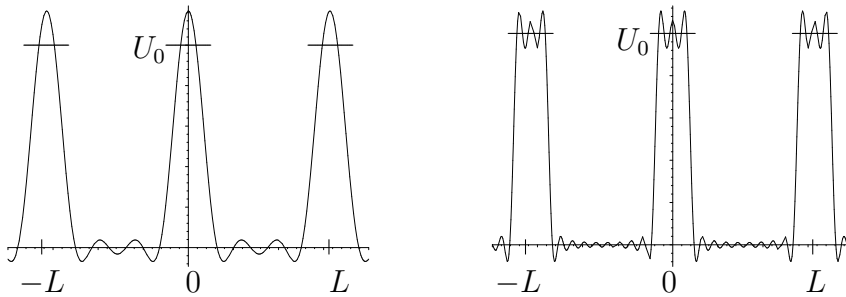
$$a_0 = \frac{4}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} f(t) dt = \frac{4}{L} \int_0^{\frac{t_0}{2}} U_0 dt = \frac{2U_0 t_0}{L},$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{4}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} f(t) \cos \frac{2n\pi t}{L} dt = \frac{4}{L} \int_0^{\frac{t_0}{2}} U_0 \cos \frac{2n\pi t}{L} dt = \\
 &= \frac{4U_0}{L} \left[\frac{L \sin \frac{2n\pi t}{L}}{2n\pi} \right]_0^{\frac{t_0}{2}} = \frac{4U_0}{L} \left(\frac{L \sin \frac{2n\pi t_0}{2L}}{2n\pi} \right) = \frac{2U_0}{n\pi} \sin \frac{n\pi t_0}{L}.
 \end{aligned}$$

Získané koeficienty dosadíme do vzorce pro Fourierovu řadu a dostaneme, že pro $t \in \mathbb{R}$

$$\underline{\underline{f(t) = \frac{U_0 t_0}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_0}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi t_0}{L} \right) \cos \left(\frac{2n\pi t}{L} \right).}}$$

Znovu jsme nakreslili funkci $f(t)$ a částečné součty její Fourierovy řady.



Příklad 8.1.3. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(t)$ na daném intervalu

a) $f(t) = t; \quad t \in \langle -\pi, \pi \rangle$

b) $f(t) = |t| - 1; \quad t \in \langle -1, 1 \rangle$

c) $f(t) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{t^2}{4}; \quad t \in \langle -\pi, \pi \rangle$

d) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 1, & t \in (0, \pi) \end{cases}$

Řešení: a) $f(t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nt;$

b) $f(t) = -\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos (2k-1)\pi t;$

c) $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nt \right);$

d) $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin (2n-1)t.$

Příklad 8.1.4. Pro funkci $f(t) = 1 - t$, $t \in \langle 0, 2 \rangle$ spočítejte

a) její rozvoj v kosinovou řadu b) její rozvoj v sinovou řadu.

Řešení: a) Funkci $f(t) = 1 - t$ rozšíříme na $f^*(t)$ tak, abychom dostali na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$ sudou funkci, a spočítáme Fourierovu řadu této funkce. Potom $b_n = 0$, perioda funkce $T = 2 - (-2) = 4$ a $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Koeficienty a_n spočítáme podle vzorce: $a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f^*(t) dt = \int_0^2 1 - t dt = 0$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f^*(t) \cos \frac{n\pi t}{2} dt = \int_0^2 (1 - t) \cos \frac{n\pi t}{2} dt = [\text{metoda per partes}] \\ &= \left[\frac{2(1-t)}{n\pi} \sin \frac{n\pi t}{2} \right]_0^2 + \frac{2}{\pi n} \int_0^2 \sin \frac{n\pi t}{2} dt = \frac{4}{\pi^2 n^2} \left[\cos \frac{n\pi t}{2} \right]_0^2 = \\ &= \frac{4}{\pi^2 n^2} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k, \\ \frac{8}{\pi^2 n^2} & \text{pro } n = 2k - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Dostali jsme kosinovou Fourierovu řadu funkce pro $t \in \langle 0, 2 \rangle$

$$1 - t = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{8}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi t}{2} \right) = \frac{8}{\pi^2} \cos \frac{\pi t}{2} + \frac{8}{9\pi^2} \cos \frac{3\pi t}{2} + \dots$$

b) Funkci $f(t) = 1 - t$ rozšíříme na $f^{**}(t)$ tak, abychom dostali na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$ lichou funkci, a spočítáme Fourierovu řadu této funkce. Potom $a_n = 0$, perioda funkce $T = 2 - (-2) = 4$ a $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f^{**}(t) \sin \frac{n\pi t}{2} dt = \int_0^2 (1 - t) \sin \frac{n\pi t}{2} dt = [\text{metoda per partes}] \\ &= \left[\frac{-2(1-t)}{n\pi} \cos \frac{n\pi t}{2} \right]_0^2 - \frac{2}{\pi n} \int_0^2 \cos \frac{n\pi t}{2} dt = \frac{2}{\pi n} ((-1)^n + 1) - 0 = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k - 1, \\ \frac{4}{\pi n} & \text{pro } n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

Dostali jsme sinovou Fourierovu řadu funkce pro $t \in \langle 0, 2 \rangle$:

$$1 - t = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{2k\pi} \sin \frac{2k\pi t}{2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi} \sin k\pi t \right) = \frac{2}{\pi} \sin \pi t + \frac{1}{\pi} \sin 2\pi t + \dots$$

Příklad 8.1.5. Najděte kosinovou Fourierovu řadu funkce $f(t)$

$$a) f(t) = 1 + t; \quad t \in \langle 0, \pi \rangle \qquad b) f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}; \quad t \in \langle 0, \pi \rangle$$

$$c) f(t) = t^2; \quad t \in \langle 0, \pi \rangle \qquad d) f(t) = t^3; \quad t \in \langle 0, \pi \rangle$$

$$\text{Řešení: a) } f(t) = 1 + \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos(2k-1)t$$

$$b) f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)t}{(2k-1)^2}; \qquad c) f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt;$$

$$d) f(t) = \frac{\pi^3}{4} + 6\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt.$$

Příklad 8.1.6. Najděte sinovou Fourierovu řadu funkce $f(t)$

$$a) f(t) = 1 + t; \quad t \in \langle 0, \pi \rangle \qquad b) f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}; \quad t \in \langle 0, \pi \rangle$$

$$c) f(t) = t^2; \quad t \in \langle 0, \pi \rangle \qquad d) f(t) = t^3; \quad t \in \langle 0, \pi \rangle$$

$$\text{Řešení: a) } f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n} \right) \sin nt;$$

$$b) f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nt}{2n};$$

$$c) f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi (-1)^{n+1}}{n} + \frac{4(-1)^n - 4}{\pi n^3} \right) \sin nt;$$

$$d) f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi^2 (-1)^{n-1}}{n} + \frac{12 (-1)^n}{n^3} \right) \sin nt.$$

STUDIJNÍ JEDNOTKA

Z - TRANSFORMACE

Cíle studijní jednotky. V této části se seznámíte se Z-transformací komplexní posloupností. Uvedeme tabulku, která usnadní hledání obrazů mnoha posloupností. Pro zpětnou Z-transformaci uvedeme pouze metodu, která využívá reziduovou větu. V poslední části je uvedena aplikace Z-transformace na řešení diferenčních rovnic.

9 Z-transformace**9.1 Definice a vlastnosti Z-transformace**

Nechť $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ je komplexní posloupnost. Definujeme funkci $F(z)$ jako součet řady

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots$$

a nazýváme jí **Z-transformace posloupnosti** $\{f(n)\}_{n=0}^{\infty}$. Značíme $\mathcal{Z}\{f(n)\} = F(z)$.

Vlastnosti Z-transformace:

1. Řada $\mathcal{Z}\{f(n)\}$ konverguje pro $|z| > R$, kde $R = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f(n)|}$.
2. Řada se dá derivovat a integrovat člen po členu pro $|z| > R$.
3. $F(z)$ je holomorfní pro $|z| > R$.
4. Z-transformace je lineární, tj.

$$\mathcal{Z}\{a f(n) + b g(n)\} = a \mathcal{Z}\{f(n)\} + b \mathcal{Z}\{g(n)\}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Příklad 9.1.1. Určete obraz posloupnosti $f(n) = 1$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$

Řešení: Podle definice

$$\mathcal{Z}\{f(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \underline{\underline{\frac{z}{z-1}}}.$$

Tato řada konverguje pro $|\frac{1}{z}| < 1$, tedy pro $|z| > 1$.

Pro určení obrazů některých vybraných posloupností můžeme použít následující tabulku:

Číslo vzorce	$f(n), n = 0, 1, 2, \dots$	$\mathcal{Z}\{f(n)\} = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$
1.	1	$\frac{z}{z-1}$
2.	a^n	$\frac{z}{z-a}$
3.	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
4.	n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
5.	na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$
6.	n^2a^n	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
7.	$\cos \omega n$	$\frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
8.	$\sin \omega n$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
9.	$\delta_0(n)$	1
10.	$\delta_m(n)$	z^{-m}
11.	$f(n+1)$	$zF(z) - zf(0)$
12.	$f(n+2)$	$z^2F(z) - z^2f(0) - zf(1)$
13.	$f(n+k)$	$z^kF(z) - \sum_{j=0}^{k-1} f(j)z^{k-j}$
14.	$f(n-k)$	$z^{-k}F(z)$

9.2 Zpětná Z-transformace

Zobrazení, které každému obrazu $F(z)$ přiřazuje jeho předmět $f(n)$ se nazývá **zpětná Z-transformace** a značí se symbolem $\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$.

Při hledání předmětu použijeme následující vzorec.

Nechť funkce $F(z)$ je holomorfní kromě konečného počtu svých singulárních bodů a $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ je konečná, pak pro zpětnou Z-transformaci $F(z)$ platí vzorec

$$f(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \sum_{z_k} \operatorname{res} [F(z) z^{n-1}], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

kde z_k jsou póly funkce $F(z)z^{n-1}$.

Příklad 9.2.1. Najděte vzory daných obrazů $F(z)$

a) $F(z) = \frac{z}{1+z}$

b) $F(z) = \frac{1}{z-2}$

c) $F(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$

d) $F(z) = \frac{z}{z-3}$

e) $F(z) = \frac{2z}{(z-1)^2}$

f) $F(z) = \frac{1}{(z+2)(z+1)}$

Řešení: a) Při hledání vzoru nejdřív najdeme póly funkce $F(z) z^{n-1} = \frac{z^n}{1+z}$. Tato funkce má v bodě $z_1 = -1$ pól prvního řádu. Pak pro $n = 0, 1, 2, \dots$

$$f(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \operatorname{res}_{z=-1} \left[\frac{z^n}{1+z} \right] = \lim_{z \rightarrow -1} \left((z+1) \frac{z^n}{1+z} \right) = (-1)^n.$$

Dostali jsme tedy, že $\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{1+z} \right\} = \{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty} = \underline{\underline{(1, -1, 1, -1, \dots)}}$.

b) $n = 0$: Funkce $F(z) z^{-1} = \frac{1}{z(z-2)}$ má póly prvního řádu v bodech $z_1 = 0$ a $z_2 = 2$. Můžeme spočítat

$$f(0) = \operatorname{res}_{z=0} \left[\frac{1}{z(z-2)} \right] + \operatorname{res}_{z=2} \left[\frac{1}{z(z-2)} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z-2} + \lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{z} = 0.$$

Pro $n = 1, 2, \dots$ funkce $F(z) z^{n-1} = \frac{z^{n-1}}{z-2}$ má pól prvního řádu pouze v bodě $z_1 = 2$.

$$\text{Potom } f(n) = \operatorname{res}_{z=2} \left[\frac{z^{n-1}}{z-2} \right] = \lim_{z \rightarrow 2} \left((z-2) \frac{z^{n-1}}{z-2} \right) = 2^{n-1}.$$

Vzorem funkce $F(z)$ je posloupnost $\underline{\underline{\{f(n)\}_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 2, 4, 8, \dots)}}$

c) $n = 0$: $F(z) z^{-1} = \frac{1}{z^2(z-1)^2}$ má v bodech $z_1 = 0$ a $z_2 = 1$ póly druhého řádu. Spočítáme

$$\begin{aligned} f(0) &= \operatorname{res}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2(z-1)^2} \right] + \operatorname{res}_{z=1} \left[\frac{1}{z^2(z-1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(z-1)^2} \right)' + \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{1}{z^2} \right)' \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2}{(z-1)^3} + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-2}{z^3} = 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

$n = 1$: $F(z) z^0 = \frac{1}{z(z-1)^2}$ má v bodě $z_1 = 0$ pól prvního řádu a v bodě $z_2 = 1$ pól druhého řádu. Potom

$$\begin{aligned} f(1) &= \operatorname{res}_{z=0} \left[\frac{1}{z(z-1)^2} \right] + \operatorname{res}_{z=1} \left[\frac{1}{z(z-1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z-1)^2} + \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{1}{z} \right)' \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

$n = 2, 3, \dots$: $F(z) z^{n-1} = \frac{z^{n-2}}{(z-1)^2}$ má pouze pól druhého řádu v bodě $z_1 = 1$.

$$\text{Potom } f(n) = \operatorname{res}_{z=1} \left[\frac{z^{n-2}}{(z-1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} (z^{n-2})' = (n-2) \cdot 1^{n-3} = n-2.$$

Vzorem funkce $F(z)$ je posloupnost $\{f(n)\}_{n=0}^{\infty} = (0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, \dots)$

d) $f(n) = 3^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$ e) $f(n) = 2n, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$

f) $f(0) = 0, \quad f(n) = (-1)^{n-1} - (-2)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

9.3 Řešení diferenčních rovnic pomocí Z-transformace

Lineární diferenční rovnice k-tého řádu — rovnice, která má tvar

$$y(n+k) + a_1 y(n+k-1) + \dots + a_k y(n) = g(n), \quad a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}.$$

Počáteční podmínky diferenční rovnice — podmínky, tvaru

$$y(0) = c_0, \quad y(1) = c_1, \dots, \quad y(k-1) = c_{k-1}, \quad c_0, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{C}.$$

Řešení diferenční rovnice k-tého řádu — komplexní posloupnost $\{y(n)\}_{n=0}^{\infty}$, která vyhovuje dané rovnici a splňuje dané počáteční podmínky.

Metoda řešení diferenční rovnice Z-transformací je podobná metodě řešení diferenciálních rovnic Laplaceovou transformací: Celou diferenční rovnici včetně pravé strany přetransformuje pomocí Z-transformace, ze vzniklé rovnice vyjádříme $Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\}$ a výsledek získáme pomocí zpětné Z-transformace.

Příklad 9.3.1. *Z-transformací řešte následující diferenční rovnice*

a) $y(n+2) - 3y(n+1) - 10y(n) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2$

b) $y(n+2) + y(n) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$

c) $y(n+2) + y(n+1) - 2y(n) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

d) $y(n+1) - y(n) = 2^n(n-1), \quad y(0) = 0$

e) $y(n+2) - 4y(n+1) + 4y(n) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 4$

f) $y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

g) $y(n+2) - 9y(n) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$

h) $y(n+2) - 5y(n+1) + 4y(n) = 2^n, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

i) $y(n+1) - 3y(n) = n(-1)^n, \quad y(0) = 1$

Řešení: a) Podle tabulky přetransformujeme celou rovnici.

$$\mathcal{Z}\{y(n)\} = Y(z); \quad \mathcal{Z}\{y(n+1)\} = zY(z) - 0 \cdot z = zY(z);$$

$$\mathcal{Z}\{y(n+2)\} = z^2Y(z) - 0 \cdot z^2 - 2z = z^2Y(z) - 2z;$$

Dostali jsme rovnici pro $Y(z)$: $z^2Y(z) - 2z - 3zY(z) - 10Y(z) = 0$.

Z toho $Y(z) = \frac{2z}{(z-5)(z+2)}$, a zpětnou transformací získáme

$$\underline{\underline{y(n) = \frac{2}{7}5^n - \frac{2}{7}(-2)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots}}$$

b) $\mathcal{Z}\{y(n)\} = Y(z); \quad \mathcal{Z}\{y(n+2)\} = z^2Y(z) - z;$

Rovnice pro $Y(z)$ je $z^2Y(z) - z + Y(z) = 0$, a z toho $Y(z) = \frac{z}{z^2+1}$.

Funkce $Y(z) z^{n-1} = \frac{z^n}{z^2+1}$ má v bodech $z_1 = j$ a $z_2 = -j$ póly prvního řádu.

$$\text{Pro } n = 0, 1, \dots: \quad y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \operatorname{res}_{z=j} \left[\frac{z^n}{z^2+1} \right] + \operatorname{res}_{z=-j} \left[\frac{z^n}{z^2+1} \right] =$$

$$\lim_{z \rightarrow j} \frac{z^n}{z+j} + \lim_{z \rightarrow -j} \frac{z^n}{z-j} = \frac{j^n}{2j} + \frac{(-j)^n}{-2j} = \frac{j^{n-1}}{2} + \frac{(-j)^{n-1}}{2} = j^{n-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{2} \right).$$

Řešením diferenční rovnice je posloupnost $\underline{\underline{\{y(n)\}_{n=0}^\infty = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \dots)}}$.

c) $\mathcal{Z}\{y(n)\} = Y(z); \quad \mathcal{Z}\{y(n+1)\} = zY(z); \quad \mathcal{Z}\{y(n+2)\} = z^2Y(z);$

Rovnice pro $Y(z)$ je $z^2Y(z) + zY(z) - 2Y(z) = \frac{z}{z-1}$ a $Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z+2)}$.

Funkce $Y(z) z^{n-1} = \frac{z^n}{(z-1)^2(z+2)}$ má v bodě $z_1 = -2$ pól prvního řádu a v bodě $z_2 = 1$ pól druhého řádu.

$$\begin{aligned} \text{Pro } n = 0, 1, 2, \dots : y(n) &= \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \operatorname{res}_{z=-2} \left[\frac{z^n}{(z-1)^2(z+2)} \right] + \\ &+ \operatorname{res}_{z=1} \left[\frac{z^n}{(z-1)^2(z+2)} \right] = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{z^n}{(z-1)^2} + \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z^n}{z+2} \right)' = \\ &= \frac{1}{9}(-2)^n + \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{nz^{n-1}(z+2) - z^n}{(z+2)^2} \right) = \frac{1}{9}(-2)^n + \frac{3n-1}{9} = \underline{\underline{\frac{(-2)^n + 3n - 1}{9}}}. \end{aligned}$$

$$\text{d) } \mathcal{Z}\{y(n+2)\} = z^2 Y(z); \quad \mathcal{Z}\{n2^n\} = \frac{2z}{(z-2)^2}; \quad \mathcal{Z}\{2^n\} = \frac{z}{z-2};$$

$$\text{Rovnice pro } Y(z) \text{ je } Y(z)(z-1) = \frac{2z}{(z-2)^2} - \frac{z}{z-2} = \frac{2z - z^2 + 2z}{(z-2)^2}.$$

$$\text{Z toho } Y(z) = \frac{4z - z^2}{(z-2)^2(z-1)}, \text{ a } Y(z) z^{n-1} = \frac{z^n(4-z)}{(z-2)^2(z-1)}.$$

Tato funkce má v $z_1 = 1$ pól prvního řádu a v bodě $z_2 = 2$ pól druhého řádu.

$$\begin{aligned} \text{Pro } n = 0, 1, 2, \dots : y(n) &= \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \operatorname{res}_{z=1} \left[\frac{z^n(4-z)}{(z-2)^2(z-1)} \right] + \\ &+ \operatorname{res}_{z=2} \left[\frac{z^n(4-z)}{(z-2)^2(z-1)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^n(4-z)}{(z-2)^2} + \lim_{z \rightarrow 2} \left(\frac{z^n(4-z)}{z-1} \right)' = \\ &= 3 + \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(nz^{n-1}(4-z) - z^n)(z-1) - z^n(4-z)}{(z-1)^2} = 3 + \frac{2n2^{n-1} - 2^n - 2 \cdot 2^n}{1} = \\ &= \underline{\underline{3 + 2^n(n-3)}}. \end{aligned}$$

$$\text{e) } \mathcal{Z}\{y(n)\} = Y(z); \quad \mathcal{Z}\{y(n+1)\} = zY(z) - z;$$

$$\mathcal{Z}\{y(n+2)\} = z^2 Y(z) - z^2 - 4z.$$

$$\text{Po dosazení do rovnice a po úpravě dostaneme } Y(z) = \frac{z^2}{(z-2)^2}.$$

Funkce $Y(z) z^{n-1} = \frac{z^{n+1}}{(z-2)^2}$ má v bodě $z_1 = 2$ pól druhého řádu.

$$\text{Pro } n = 0, 1, 2, \dots: y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \operatorname{res}_{z=2} \left[\frac{z^{n+1}}{(z-2)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 2} (z^{n+1})' =$$
$$= \lim_{z \rightarrow 2} (n+1) z^n = \underline{\underline{(n+1) 2^n}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{f) } y(n) = \frac{1}{2}(3^n + 1) - 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\text{g) } y(n) = \frac{1}{2}3^{n-1} + \frac{1}{2}(-3)^{n-1} = \frac{3^{n-1}}{2}(1 + (-1)^{n-1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\text{h) } y(n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}4^{n-1} - 2^{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\text{i) } y(n) = \frac{1}{16} [5 \cdot 3^{n+1} + (4n-1)(-1)^{n+1}], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Reference

- [1] Eliaš, J., Horváth J., Kajan J., Škulka R.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 4. Bratislava, Nakladateľstvo Alfa, 1970.
- [2] Haluzíková, A., Knéslová I., Kudláček V.: Aplikovaná matematika III. Brno, SNTL-Praha, 1972.
- [3] Chrastinová, M., Kolouchová V., Krupková V., Švarc, S.: Matematická analýza I. Brno, Ediční středisko VUT, 1978.
- [4] Koukal, S.: Laplaceova transformace. Brno, Ediční středisko VUT, 1979.
- [5] Mašek, J.: Sbírka úloh z vyšší matematiky. Plzeň, Ediční středisko VŠSE, 1965.
- [6] Novák, V.: Řešené úlohy z matematiky III. Praha, SNTL, 1966.
- [7] Voráček, J., Zapletal J., Zástěra B.: Matematická analýza III. Praha, SNTL, 1984.