Príklady na precvičovanie – komplexné čísla, postupnosti a funkcie

Riešené príklady

Príklad 1
Vypočítajme

$$\text{a)}\ \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} - \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}, \quad \text{b)}\ (1+\mathrm{i})^6, \quad \text{c)}\ \sqrt{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}.$$

Riešenie:
a) Elementárnym vypočtom dostaneme

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} - \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \cdot \frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} - \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \cdot \frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$$

$$= \frac{(1+\mathrm{i})^2}{2} - \frac{(1-\mathrm{i})^2}{2} = 2\mathrm{i}.$$

b) Podobne máme

$$(1+\mathrm{i})^6 = \left[(1+\mathrm{i})^2\right]^3 = [2\mathrm{i}]^3 = -8\mathrm{i}.$$

c) Označme $x + \mathrm{i}\, y = \sqrt{1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3}}$, kde x, y su neznáme reálne čísla. Potom

$$1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}.$$

Posledná rovnosť je ekvivalentná so sústavou

$$1 = x^2 - y^2, \quad \sqrt{3} = 2xy.$$

Ďalej môžeme postupovať dvomi vzájomne rovnocennými spôsobmi. Jedna možnosť je priamo vypočítať neznáme x, y z uvedenej sústavy. Platí $y = \sqrt{3}/(2x)$ a po dosadení do prvej rovnice a menšej úprave dostaneme pre x bikvadratickú rovnicu

$$4x^4 - 4x^2 - 3 = 0.$$

Jej riešením dostaneme $x^2 \in \left\{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$. Keďže neznáma x má reálne hodnoty, platí $x^2 = \frac{3}{2}$. Teda $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, a následne $y = \sqrt{3}/(2x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, t.j.,

$$x + \mathrm{i}y \in \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \quad -\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Druhý spôsob spočíva v „obohatení“ uvedenej sústavy o ešte jednu rovnicu. Platí napríklad toto

$$\left|1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \left|(x + \mathrm{i}y)^2\right| = |x + \mathrm{i}y|^2 \implies 2 = x^2 + y^2.$$

Máme teda k dispozícii tri rovnice pre neznáme x, y, a to

$$2 = x^2 + y^2, \quad 1 = x^2 - y^2, \quad \sqrt{3} = 2xy.$$

Z prvých dvoch rovníc okamžite dostávame $x^2 = 3/2$ a $y^2 = 1/2$, kým posledná rovnosť naznačuje, že obe neznáme majú rovnaké znamienko. Preto $[x, y] = [\sqrt{3/2}, 1/\sqrt{2}]$ alebo $[x, y] = [-\sqrt{3/2}, -1/\sqrt{2}]$. Teda opäť máme

$$\sqrt{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad :).$$

Príklad 2

Stanovme hodnotu komplexného čísla

$$\left(\frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 + \mathrm{i}}\right)^{24}.$$

Riešenie:

Pri tomto príklade je obzvlášť efektívne použiť exponenciálny tvar komplexného čísla. Nechávame na čitateľa, aby ukázal, že platí

$$1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \quad \text{a} \quad 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad :).$$

Potom pre komplexné číslo v zadaní úlohy postupne máme

$$\left(\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}\right)^{24} = \left(\frac{2\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}\right)^{24} = \left(\sqrt{2}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{24} = \left(\sqrt{2}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}\right)^{24}$$

$$= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{24}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}\cdot 24} = 2^{12}\cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-14\mathrm{i}\pi}}_{1} = 4096.$$

Príklad 3
Nájdime všetky hodnoty daných komplexných odmocnín a zapíšme ich v algebraickom tvare.

$$\text{a) } \sqrt[3]{1}, \quad \text{b) } \sqrt[6]{1}, \quad \text{c) } \sqrt[3]{1+\mathrm{i}}, \quad \text{d)} \sqrt[6]{-729}.$$

Riešenie:
Pripomeňme, že ak n je pevné prirodzené číslo, potom pre každé nenulové $z\in\mathbb{C}$ existuje n-tá odmocnina $\sqrt[n]{z}$ a nadobúda práve n rôznych komplexných hodnôt, konkrétne

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right], \quad k=0,\,1,\,\ldots,\,n-1,$$

kde φ označuje hlavný argument arg$z$ komplexného čísla z a $\sqrt[n]{|z|}$ je jediná reálna n-tá odmocnina z reálneho nezáporného čísla $|z|$.

a) Komplexné číslo 1 prepíšeme do goniometrického tvaru. Nakoľko $|1| = 1$ a $\arg 1 = 0$, platí

$$1 = 1\cdot(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0).$$

Množina všetkých tretích odmocnín z 1 má potom tvar

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3}, \quad k=0,\,1,\,2.$$

Postupným výpočtom pre jednotlivé hodnoty k dostaneme

$$\sqrt[3]{1} = \left\{1, \quad -\frac{1}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

b) Analogicky ako v predchádzajúcom prípade pre množinu všetkých šiestych odmocnín z 1 platí

$$\sqrt[6]{1} = \cos\frac{2k\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{6} = \cos\frac{k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{3}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Pre jednotlivé hodnoty k postupne dostávame

$$k = 0 \quad \longrightarrow \quad \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = 1,$$

$$k = 1 \quad \longrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k = 2 \quad \longrightarrow \quad \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k = 3 \quad \longrightarrow \quad \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1,$$

$$k = 4 \quad \longrightarrow \quad \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k = 5 \quad \longrightarrow \quad \cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Súhrnne teda máme

$$\sqrt[6]{1} = \left\{\pm 1, \quad \pm\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \pm\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}.$$

c) Ukážeme dva spôsoby riešenia tohoto príkladu.

Riešenie 1:

Je navlas podobné predchádzajúcim dvom prípadom. Na oživenie číslo $1+\mathrm{i}$ prepíšeme do exponenciálneho tvaru ($|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ a $\arg(1+\mathrm{i}) = \pi/4$)

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

Potom platí

$$\sqrt[3]{1+\mathrm{i}} = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi/4+2k\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\frac{2k\pi}{3}}, \quad k = 0,\ 1,\ 2.$$

Poznamenajme, že symbol $\sqrt[6]{2}$ v poslednom výraze označuje našu starú dobrú a bezpečnú *reálnu* šiestu odmocninu z 2 :). Voľbou parametra k dostaneme

$$k = 0 \quad \longrightarrow \quad \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}},$$

$$k = 1 \quad \longrightarrow \quad \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}},$$

$$k = 2 \quad \longrightarrow \quad \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}.$$

V poslednej rovnosti sme využili skutočnosť, že

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{7\pi}{12}+2\pi\right)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}}_{\cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}.$$

Platí teda

$$\sqrt[3]{1+\mathrm{i}} = \{\sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}, \quad \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}, \quad \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}\}.$$

Malá potiaž je v tom, že príslušné tretie odmocniny máme vyjadrené v exponenciálnom tvare, kým podľa zadania máme nájsť ich algebraické vyjadrenie. V súlade s Eulerovým vzorcom

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

bude teda nutné explicitne určiť hodnoty kosínusu a sínusu v uhloch $\pi/12$, $3\pi/4$ a $-7\pi/12$:-// Pomôžu nám pri tom goniometrické vzorce pre polovičný uhol, keďže napr. $\pi/12 = (\pi/6)/2$:) Navyše uhol $3\pi/4$ určite nebude robiť problémy. Tak s chuťou do toho :)

$$\underbrace{\cos\frac{\pi}{12}}_{\text{toto je kladné}} = \cos\frac{\pi/6}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},$$

$$\underbrace{\sin\frac{\pi}{12}}_{\text{toto je kladné}} = \sin\frac{\pi/6}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

$$\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right) = \underbrace{\cos\frac{7\pi}{12}}_{\text{toto je záporné}} = \cos\frac{7\pi/6}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{7\pi}{6}}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

$$\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right) = -\underbrace{\sin\frac{7\pi}{12}}_{\text{toto je kladné}} = -\sin\frac{7\pi/6}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{7\pi}{6}}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Takže nájdené tretie odmocniny z čísla $1+\mathrm{i}$ možno zapísať v tvare

$$\sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{32}} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{32}},$$

$$\sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt[3]{2}},$$

$$\sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}} = -\sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{32}} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{32}}.$$

Riešenie 2:

Druhý spôsob je podobný prvému až do chvíle, keď sme nútení prevádzať vyššie uvedené nechutné výpočty. Je založený na naoko nevinnom pozorovaní

$$\sqrt[3]{1+\mathrm{i}} = \sqrt[3]{(1+\mathrm{i})\cdot 1} = \sqrt[3]{1+\mathrm{i}}\cdot\sqrt[3]{1}.$$

Výborne, túto rovnosť vykrátime výrazom $\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}$ a dostaneme $1=\sqrt[3]{1}$ … ?!?! Letmý pohľad vyššie na výsledok úlohy a) ihneď ukazuje, že niečo nie je v poriadku. Ako to teda je? :) Háčik je v tom, že symbol $\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}$ nepredstavuje *jedinú hodnotu*, ale *množinu troch hodnôt*. Podobne i výraz $\sqrt[3]{1}$ (v komplexnom ponímaní). Takže ešte raz a teraz už správne :)

$$\underbrace{\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}}_{\text{množina všetkých tretích odmocnín z 1+i}} = \underbrace{\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}\cdot\sqrt[3]{1}}_{\text{množina všetkých súčinov prvkov z } \sqrt[3]{1+\mathrm{i}} \text{ a } \sqrt[3]{1}}.$$

Naviac, obidve množiny $\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}$ a $\sqrt[3]{1}$ majú po tri prvky. To znamená, že v súlade s výsledkom prípadu a) pre *akúkoľvek* pevne zvolenú hodnotu $\varepsilon\in\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}$ množina

$$\left\{\varepsilon\cdot 1,\quad \varepsilon\cdot\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \varepsilon\cdot\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

vyčerpáva celé $\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}$ (samy si dobre premyslite :)). Za ε môžeme vziať napríklad hodnotu $\sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, ktorú vieme ľahko vyčísliť

$$\varepsilon=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt[3]{2}}.$$

Podľa práve získaného vyjadrenia pre $\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}$ potom po úpravách dostaneme

$$\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}=\left\{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt[3]{2}},\quad -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt[3]{2}}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt[3]{2}},\quad \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt[3]{2}}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt[3]{2}}\right\}$$

(samy overte všetky výpočty :)).

Poznámka k c):

V prvom spôsobe riešenia sme využívali prevažne hrubú silu, kým druhé riešenie je založené na istom fígli. Obidva prístupy majú svoje kladné stránky, už len tým, že poskytujú dva uhly pohľadu na jednu vec. Nadôvažok, z dvojakého vyjadrenia tretích odmocnín z $1+\mathrm{i}$ vyplývajú ako bonus zaujímavé číselné identity, ktorých overenie je síce triviálna záležitosť, ale ich objavenie nie je celkom jednoduché :). Konkrétne, platí

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\quad\text{a}\quad\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\qquad :)$$

(samy odvoďte porovnaním výsledkov v prvom a druhom spôsobe riešenia a potom overte i priamym výpočtom :)).

d) Namiesto priameho útoku využijeme opäť úskok ;). Kedysi si niekto všimol, že $3^6 = 729$. My však potrebujeme číslo, ktoré po umocnení na šiestu dá mínus 729. S číslom -3 nepochodíme. Čo tak 3i? Platí

$$(3\mathrm{i})^6 = 3^6 \cdot \mathrm{i}^6 = 729 \cdot (-1) = -729.$$

To je ono! :) Takže 3i je jedna z hodnôt $\sqrt[6]{-729}$. Ale my ich chceme mať šesť :(Napríklad aj $-3\mathrm{i}$ nám vyhovuje, ale stále je to málo. Pomôžeme si príkladom b) :). Nech ε je nejaká šiesta odmocnina z 1, t.j., $\varepsilon^6 = 1$. Potom

$$(3\mathrm{i} \cdot \varepsilon)^6 = (3\mathrm{i})^6 \cdot \varepsilon^6 = -729 \cdot 1 = -729.$$

Takto to teda je :) A keďže šiestych odmocnín z 1 je práve šesť, platí

$$\sqrt[6]{-729} = \left\{3\mathrm{i} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \in \sqrt[6]{1}\right\} \qquad :).$$

Využijúc výsledok z úlohy b) dostaneme

$$\sqrt[6]{-729} = \left\{3\mathrm{i} \cdot (\pm 1), \quad 3\mathrm{i} \cdot \left[\pm\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right], \quad 3\mathrm{i} \cdot \left[\pm\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\right\}$$

$$= \left\{\pm 3\mathrm{i}, \quad \pm\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,\mathrm{i}\right), \quad \pm\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,\mathrm{i}\right)\right\}.$$

Samozrejme, ten istý výsledok by sme dostali i klasickým postupom aplikovaným v prípadoch a), b) :).

Príklad 4

Nech ω je nejaké riešenie rovnice $x^3 = 1$, pričom $\omega \neq 1$. Bez znalosti explicitnej hodnoty ω vyjadrime čísla

$$\frac{1}{1+\omega}, \quad \frac{1}{1+\omega^2}, \quad \frac{\omega-1}{1+\omega}, \quad \frac{\omega^2-1}{1+\omega^2},$$

v tvare $a + b\,\omega$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

Riešenie:
Rozkladom $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ zistíme, že (komplexné) číslo ω jednak spĺňa $\omega^3 = 1$, a jednak je riešením kvadratickej rovnice $\omega^2+\omega+1 = 0$. Vhodným bavkaním sa s týmito poznatkami postupne dostávame

$$\frac{1}{1+\omega} = \frac{1}{\underbrace{1+\omega}_{\text{tento menovateľ je } -\omega^2}} = \frac{1}{-\omega^2} = \frac{\omega}{\underbrace{-\omega^3}_{\text{tento menovateľ je } -1}} = -\omega,$$

$$\frac{1}{1+\omega^2} = \frac{1}{\underbrace{1+\omega^2}_{\text{tento menovateľ je } -\omega}} = \frac{1}{-\omega} = \frac{\omega^2}{-\omega^3} = -\omega^2 = 1+\omega,$$

$$\frac{\omega-1}{1+\omega} = (\omega-1)\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\omega}}_{\text{tento zlomok je } -\omega} = (\omega-1)\cdot(-\omega) = \underbrace{-\omega^2}_{\text{toto je } 1+\omega} + \omega = 1+2\omega,$$

$$\frac{\omega^2-1}{1+\omega^2} = (\omega^2-1)\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\omega^2}}_{\text{tento zlomok je } 1+\omega} = (\omega^2-1)\cdot(1+\omega) = (\omega^2-1)\cdot\underbrace{(1+\omega)}_{\text{toto je } -\omega^2}$$
$$= -(\omega^2-1)\cdot\omega^2 = \underbrace{-\omega^4}_{\text{toto je } -\omega} + \underbrace{\omega^2}_{\text{toto je } -1-\omega} = -\omega-1-\omega = -1-2\omega.$$

(samy si pozorne premyslite všetky uvedené výpočty ;)).

Príklad 5
Stanovme hodnotu súčtu

$$1+\cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Riešenie:
Pri tejto klasickej úlohe aplikujeme Eulerov vzorec a Moivreovu vetu. Konkrétne, pre každé $x \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$\cos x + \mathrm{i}\sin x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \quad (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^k = \cos kx + \mathrm{i}\sin kx.$$

Kombináciou týchto poznatkov dostaneme vyjadrenia (samy overte :))

$$\cos kx = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{2\mathrm{i}}.$$

Nech $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ sú dané. Pre súčet v zadaní príkladu potom máme

$$1 + \cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx = \sum_{m=0}^{n} \cos 2mx = \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}mx} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}mx}}{2} \right).$$

Ak $x = l\pi$ pre nejaké celé číslo l, potom $\cos 2mx = \cos 2ml\pi = \cos 0 = 1$ pre každé $m = 0, \ldots, n$ (samy overte :)). V tomto prípade je teda hľadaný súčet $n + 1$. Predpokladajme teraz, nech $x \neq l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$. Potom máme

$$\sum_{m=0}^{n} \cos 2mx = \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}mx} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}mx}}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right)^m + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)^m.$$

Posledné dve sumy predstavujú súčty konečných geometrických postupností s kvocientami $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ a $\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$. Platí

$$\sum_{m=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right)^m = \frac{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x(n+1)}}{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}.$$

Získaný súčet teraz nejako vhodne zjednodušíme. Napríklad

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x(n+1)}}{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(n+1)} \cdot \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(n+1)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(n+1)}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(n+1)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} \cdot \frac{2\mathrm{i}\sin(n+1)x}{2\mathrm{i}\sin x}$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}xn} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}.$$

V prvom kroku sme z čitateľa i menovateľa zlomku vynímali pred zátvorku, kým v druhom kroku sme aplikovali vyjadrenie funkcie sínus odvodené v úvode príkladu. Platí teda

$$\sum_{m=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right)^m = \mathrm{e}^{\mathrm{i}xn} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}.$$

Analogickým spôsobom dostaneme pre druhú sumu vyjadrenie (samy overte; napríklad aj tak, že v práve odvodenom výraze zameníte x za $-x$;))

$$\sum_{m=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)^m = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xn} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}.$$

Pre súčet v zadaní príkladu potom získame formulu

$$\sum_{m=0}^{n} \cos 2mx = \frac{1}{2} \cdot \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}xn} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xn} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}\right]$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xn} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xn}}{2} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} = \frac{\cos nx \cdot \sin(n+1)x}{\sin x}.$$

Zistili sme teda, že platí

$$\sum_{m=0}^{n} \cos 2mx = \begin{cases} \dfrac{\cos nx \cdot \sin(n+1)x}{\sin x}, & x \neq l\pi, \\ n+1, & x = l\pi, \end{cases} \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Príklad 6

Pre $x \in \mathbb{R}$ vyjadrime $\sin 5x$, $\cos 5x$, $\operatorname{tg} 5x$ a $\operatorname{cotg} 5x$ pomocou mocnín $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$.

Riešenie:

Existujú minimálne dve cesty, ako postupovať pri tomto príklade. V prvej z nich budeme priamo postupne „roz-sínusovávať“, resp. „roz-kosínusovávať“, resp. „roz-tangensovávať“, resp. „roz-kotangensovávať“ výrazy $\sin 5x$, $\cos 5x$, $\operatorname{tg} 5x$ a $\operatorname{cotg} 5x$. Síce sa nám tým výrazne zlepšia naše manuálne počtárske zručnosti, ale výdatne si tým aj odskáčeme všetku tú špinavú prácu, ktorú matematika so sebou prináša :) Pozor, je to skutočne len pre silné a otrlé žalúdky! My si teraz zvolíme ťahať za trochu ľahší koniec :) Starý Abraham de Moivre (a neskôr ešte lepšie – ako inak – i Leonhard Euler :)) si jedného dňa všimol takúto roztomilú vec

$$(\cos x + \mathrm{i} \sin x)^5 = \cos 5x + \mathrm{i} \sin 5x, \quad x \in \mathbb{R} \quad :).$$

Rovnako ako teraz našich čitateľov, i jeho napadlo, že by nebolo od veci roznásobiť ľavú stranu spôsobom, ako to robieval Isaac Newton. Chalaniská sa totiž veľmi kamošili, už nejednu konvergentnú i divergentnú párty zažili, takže Abraham dôverne poznal Isaacovu – ako sa dnes hovorí – binomickú vetu. Skrátka, po konečných úpravách dostal toto

$$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^5 = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$$

$$+\mathrm{i}(5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x).$$

Nuž ale, objaviteľsky vykríkol Moivre, potom musí predsa platiť, že

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x,$$

$$\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x.$$

Ľaľa ho, vzrušene si pomädlil ruky Moivre, dve muchy jednou ranou :). A keďže bol povaha dôkladná, zvedavá a hlavne nebojácna, neustal a plný posvätného napätia pokračoval ďalej

$$\operatorname{tg} 5x = \frac{\sin 5x}{\cos 5x} = \frac{5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x}{\cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x}$$

$$= \frac{\cos^5 x \cdot (5\operatorname{tg} x - 10\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x)}{\cos^5 x \cdot (1 - 10\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg}^4 x)} = \frac{5\operatorname{tg} x - 10\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x}{1 - 10\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg}^4 x}.$$

Abraham, dojatý ako storočný miliardár, kontemplujúci svoje skromné imanie, si uvedomil, že narazil na zlatý dol a bezostyšne sa mu už zbiehali slinky na ďalšie sústo

$$\operatorname{cotg} 5x = \frac{1}{\operatorname{tg} 5x} = \frac{1 - 10\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg}^4 x}{5\operatorname{tg} x - 10\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^5 x \cdot (\operatorname{cotg}^5 x - 10\operatorname{cotg}^3 x + 5\operatorname{cotg} x)}{\operatorname{tg}^5 x \cdot (5\operatorname{cotg}^4 x - 10\operatorname{cotg}^2 x + 1)} = \frac{\operatorname{cotg}^5 x - 10\operatorname{cotg}^3 x + 5\operatorname{cotg} x}{5\operatorname{cotg}^4 x - 10\operatorname{cotg}^2 x + 1}.$$

Príklad 7

Pre $x \in \mathbb{R}$ vyjadrime $\sin^6 x$ ako lineárnu kombináciu sínusov a kosínusov vhodných násobkov argumentu x.

Riešenie:
Teraz sme zrejme postavení pred opačný problém ako v Príklade 6, pričom využitie vlastností komplexných čísiel, konkrétne Eulerovho vzorca, je obzvlášť nápomocné :). Z identít

$$\cos x + \mathrm{i}\sin x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \quad \cos x - \mathrm{i}\sin x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$$

ihneď vyplýva vyjadrenie výrazu $\sin x$

$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

(samy overte ;)). Pomocou binomickej vety potom postupne dostávame

$$\sin^6 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^6 = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^6}{-64}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x} - 6\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}5x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 15\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x} - 20\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x} + 15\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x} - 6\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x}}{-64}$$

$$= -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x} - 6\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x} + 15\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} - 20 + 15\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x} - 6\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x}}{64}$$

$$= -\frac{\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x}\right] - 6\cdot\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x}\right] + 15\cdot\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}\right] - 20}{64}.$$

Pre výrazy v hranatých zátvorkách (opäť pomocou Eulerovho vzorca) platí

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x} = 2\cos 6x, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}4x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x} = 2\cos 4x, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x} = 2\cos 2x$$

(samy si premyslite :)). Po dosadení do získaného vyjadrenie pre $\sin^6 x$ a úpravách napokon máme

$$\sin^6 x = -\frac{2\cos 6x - 6\cdot 2\cos 4x + 15\cdot 2\cos 2x - 20}{64}$$

$$= \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cdot\cos 2x + \frac{3}{16}\cdot\cos 4x - \frac{1}{32}\cdot\cos 6x \quad :).$$

Príklad 8
Nájdime reálnu časť komplexného čísla

$$Z = (1 - \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha)^n, \quad \alpha\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Riešenie:
Je zrejmé, že nebudeme otrocky rozpisovať uvedenú n-tú mocninu pomocou binomickej vety :). Chceme nejako šikovne využiť Moivreovu vetu. Platí

$$1-\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha=\underbrace{1-\cos\alpha}_{\text{toto je } 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\mathrm{i}\cdot\overbrace{\sin\alpha}^{\text{toto je } 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$=2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}-\mathrm{i}\cdot2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=-\mathrm{i}\cdot2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Súčet $\cos\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}$ už vieme umocniť pomocou Moivreovej vety ;). Teda

$$Z=(1-\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)^n=\left(-\mathrm{i}\cdot2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)^n\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^n$$

$$=(-\mathrm{i})^n\cdot2^n\sin^n\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{n\alpha}{2}\right).$$

Využitím poslednej rovnosti pre reálnu časť čísla Z potom platí

$$\operatorname{Re}Z=\begin{cases}2^n\sin^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}, & n\equiv0\pmod 4,\\[2ex] 2^n\sin^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}, & n\equiv1\pmod 4,\\[2ex] -2^n\sin^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}, & n\equiv2\pmod 4,\\[2ex] -2^n\sin^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}, & n\equiv3\pmod 4\end{cases}$$

(samy si premyslite :)). Poznamenajme, že z elementárnej teórie čísiel symbol napr. $n\equiv1\pmod 4$ znamená, že celé číslo n má po delení 4 zvyšok 1 :).

Príklad 9
Zapíšme a načrtnime v komplexnej rovine uvedené množiny bodov.

$$\text{a) } |z-1|\le\operatorname{Re}z,\quad \text{b) } |z-1|+|z-3|<3,\quad \text{c) } \arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Riešenie:
Využijeme pozorovanie, že každé komplexné číslo $z = x + \mathrm{i}y$ je možné reprezentovať ako bod $[x, y]$ v euklidovskej rovine a naopak. Potom pre a) máme

$$|z - 1| \leq \mathrm{Re} z,$$

$$0 \leq |(x-1) + \mathrm{i}y| \leq x,$$

$$0 \leq \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq x,$$

$$(x-1)^2 + y^2 \leq x^2,$$

$$-2x + 1 + y^2 \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad y^2 \leq 2x - 1.$$

Jedná sa teda o množinu bodov vo vnútri a na parabole $y^2 = 2x - 1$ (samy ju nakreslite ;)). Pri úlohe b) si môžeme pomôcť geometrickou interpretáciou absolútnej hodnoty. Vieme, že pre $z = x + \mathrm{i}y$ výraz $|z - 1|$ vyjadruje (euklidovskú) vzdialenosť bodu $[x, y]$ od bodu $[1, 0]$, resp. výraz $|z - 3|$ vyjadruje (euklidovskú) vzdialenosť bodu $[x, y]$ od bodu $[3, 0]$. Máme teda nájsť množinu všetkých bodov v rovine, pre ktoré je súčet ich vzdialeností od pevne daných bodov $[1, 0]$ a $[3, 0]$ menší ako 3. Takúto vlastnosť má práve vnútro elipsy s ohniskami v bodoch $[1, 0]$ a $[3, 0]$ a s dĺžkou hlavnej polosi $3/2$:). Samy overte, že elipsa s takýmito parametrami skutočne existuje a nájdite jej stred, dĺžku vedľajšej polosi a nakoniec i jej analytické vyjadrenie :). Mali by ste dostať takýto výsledok

$$\frac{(x-2)^2}{9/4} + \frac{y^2}{5/4} < 1 \qquad :).$$

V príklade c) pre algebraický tvar čísla $A = \frac{z-1}{z+1}$ máme

$$A = \frac{z-1}{z+1} = \frac{x - 1 + \mathrm{i}y}{x + 1 + \mathrm{i}y} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2} + \mathrm{i} \cdot \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Re}\, A = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2}, \qquad \mathrm{Im}\, A = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}$$

(samy overte ;)). Podľa zadania príkladu platí

$$\frac{\operatorname{Re} A}{|A|} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{\operatorname{Im} A}{|A|} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{\operatorname{Im} A}{\operatorname{Re} A} = 1.$$

Dosadením vyššie odvodených výrazov do poslednej rovnosti dostaneme

$$\frac{2y}{x^2+y^2-1} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2+(y-1)^2 = 2$$

(samy overte poslednú identitu :)). Hľadaná množina bodov je teda časťou kružnice so stredom v bode $[0,1]$ a polomerom $\sqrt{2}$. Na druhej strane, číslo $\operatorname{Im} A$ je nutne nezáporné, t.j., $y \geq 0$ (samy si premyslite, prečo :)). Okrem toho v prípade $y=0$ máme $x=\pm 1$, a teda $z=\pm 1$ (i toto si samy premyslite :)). Pre $z=-1$ je $A \notin \mathbb{C}$ ($A=\infty$), kým pre $z=1$ platí $A=0$. Ani jeden z týchto výsledky nevyhovuje zadaniu príkladu. Preto hľadaná množina je

$$x^2+(y-1)^2 = 2, \quad y > 0$$

(samy overte a zakreslite v komlexnej rovine ;)).

Príklad 10

Vypočítajme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}}{n}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Riešenie:

V limitovanon výraze sa pokúsime oddeliť reálnu a imaginárnu časť. Najschodnejšie sa ukazuje previesť číslo $(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$ na goniometrický tvar, a následne na výpočet jeho n-tú mocniny aplikovať Moivreho vzorec. Platí

$$\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4},$$

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n = \cos\frac{\pi n}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi n}{4}$$

(samy overte :)). Potom dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}}{n}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}}{n}\left(\cos\frac{\pi n}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi n}{4}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{n} + \mathrm{i}\,\frac{\cos\frac{\pi n}{4}}{n}\right).$$

Uvedená postupnosť má limitu práve vtedy, keď existujú limity z jej reálnej i imaginárnej časti. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos \frac{\pi n}{4}}{n},$$

ako sa môžeme ľahko presvedčiť. Preto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}}{n} \left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \right)^n = 0 + \mathrm{i} \cdot 0 = 0.$$

Príklad 11

Dokážme identitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{3n-2}}{8^n - 1} = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{8}.$$

Riešenie:

Máme vlastne ukázať, že

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{3n-2}}{8^n - 1} - \left(\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{8} \right) \right] = 0.$$

Toto je však ekvivalentné s tým, že

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{3n-2}}{8^n - 1} - \left(\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{8} \right) \right| = 0$$

(samy si to dobre premyslite :)). Túto limitu z *reálnej* postupnosti budeme teraz vhodne upravovať, pričom ukážeme, že je skutočne nulová. Komplexné číslo $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ prepíšeme napríklad do exponenciálneho tvaru

$$-1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}.$$

Po dosadení a úpravách postupne dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(2\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}\right)^{3n-2}}{8^n - 1} - \frac{2\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}}{8} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| 2\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3} \cdot \left(\frac{\left(2\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}\right)^{3n-3}}{8^n - 1} - \frac{1}{8} \right) \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \underbrace{\left|e^{2\pi i/3}\right|}_{\text{toto je 1}} \cdot \left| \frac{2^{3n-3} \cdot \overbrace{e^{2(n-1)\pi i}}^{\text{toto je 1}}}{8^n - 1} - \frac{1}{8} \right| = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{3n-3}}{8^n - 1} - \frac{1}{8} \right|$$

$$= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{8^{n-1}}{8^n - 1} - \frac{1}{8} \right| = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{8^n - 8^n + 1}{8\,(8^n - 1)} \right| = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8\,(8^n - 1)} = 0.$$

Príklad 12

Rozhodnime o konvergencii nekonečného číselného radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}.$$

Riešenie:

V n-tom člene daného radu oddelíme jeho reálnu a imaginárnu časť

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(\pi/n)}{n} + i \cdot \frac{\sin(\pi/n)}{n} \right).$$

Potrebujeme teda vyšetriť konvergenciu *reálnych* radov

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi/n)}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{n}.$$

Keďže platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cos(\pi/n)}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \cos(\pi/n) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin(\pi/n)}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{\frac{1}{n}} = \pi,$$

podľa limitného porovnávacieho kritéria (pre reálne rady) to znamená, že kosínusový rad diverguje, kým sínusový rad konverguje (samy overte :)). Preto celkový komplexný rad v zadaní príkladu diverguje.

Príklad 13

Nájdime súčet nekonečného číselného radu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}^n}{2^n}+\frac{\mathrm{i}^{2n}}{n!}\right).$$

Riešenie:

Intuitívne cítime, že ak by sa nám pošťastilo určiť súčty radov

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{2^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^{2n}}{n!},$$

máme vyhraté :). Prvý z nich je geometrický s kvocientom $q=\frac{\mathrm{i}}{2}$, pričom

$$|q|=\left|\frac{\mathrm{i}}{2}\right|=\frac{|\mathrm{i}|}{2}=\frac{1}{2}<1.$$

Jedná sa teda o konvergetný rad so súčtom

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{2^n}=1\cdot\frac{1}{1-\frac{\mathrm{i}}{2}}=\frac{2}{2-\mathrm{i}}=\frac{2\,(2+\mathrm{i})}{5}=\frac{4+2\mathrm{i}}{5}.$$

Druhý rad je dokonca reálny, pretože $\mathrm{i}^{2n}=(-1)^n$. Z teórie reálnych mocninových radov vyplýva, že

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\mathrm{e}^{-1}$$

(samy si dobre premyslite :)). Preto súčet radu v zadaní príkladu existuje a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}^n}{2^n}+\frac{\mathrm{i}^{2n}}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^{2n}}{n!}=\frac{4+2\mathrm{i}}{5}+\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{5+4\mathrm{e}}{5\mathrm{e}}+\mathrm{i}\cdot\frac{2}{5}.$$

Príklad 14
Určme limitu

$$\lim_{z\to -\mathrm{i}} \frac{z^2+1}{z^3+\mathrm{i}z^2-z-\mathrm{i}}.$$

Riešenie:
Dosadením $z=-\mathrm{i}$ dostaneme neurčitý výraz $0/0$, ako sa možno ľahko presvedčiť. Postupujeme preto štandardne ako pri reálnych funkciách reálnej premennej. Platí napríklad

$$\lim_{z\to -\mathrm{i}} \frac{z^2+1}{z^3+\mathrm{i}z^2-z-\mathrm{i}} = \lim_{z\to -\mathrm{i}} \frac{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{(z+\mathrm{i})(z^2-1)} = \lim_{z\to -\mathrm{i}} \frac{z-\mathrm{i}}{z^2-1} = \mathrm{i}.$$

Príklad 15
Nájdime body nespojitosti funkcie $f(z)$ danej predpisom

$$f(z) = \frac{z\,\mathrm{Re}z}{|z|}$$

a rozhodnime, či sa jedná o odstrániteľné nespojitosti.

Riešenie:
Výraz $z\,\mathrm{Re}z/|z|$ rozdelíme na jeho reálnu a imaginárnu časť. Pre $z=x+\mathrm{i}y$ je zrejme $\mathrm{Re}z=x$ a

$$\frac{z\,\mathrm{Re}z}{|z|} = \frac{(x+\mathrm{i}y)x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+\mathrm{i}yx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mathrm{i}\,\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Reálne funkcie

$$u(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad v(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sú zrejme spojité všade na $\mathbb{R}^2$ okrem bodu $[0,0]$, kde ani jedna z nich nie je definovaná. Preto funkcia $f(z)$ je spojitá na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, a teda má jediný bod nespojitosti $z=0$. Vypočítame jej limitu v tomto bode, t.j.,

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mathrm{i}\,\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$

Úloha sa nám redukuje na určenie reálnych limít

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Pomocou klasického aparátu diferenciálneho počtu reálnych funkcií dvoch reálnych premenných (napríklad prevod do polárnych súradníc :)) dostaneme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

To znamená, že $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$. Funkcia $f(z)$ má preto v bode $z = 0$ odstrániteľnú nespojitosť, pričom funkcia $g(z)$ definovaná priradením

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{z\,\mathrm{Re}z}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

je už spojitá v celej komplexnej rovine :).

Poznámka k Príkladu 15:
V príklade sme ukázali, že funkcia $f(z)$ nie je definovaná v bode $z = 0$, a to je dôvod, prečo nie je v tomto bode spojitá. Príčinou toho, že $f(z)$ nie je definovaná v 0, je fakt, že $f(0)$ je *neurčitý výraz.*

Príklad 16
Vyšetrime spojitosť funkcie

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

ako priradenia

$$\text{a) } f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \text{b) } f : \mathbb{C} \to \tilde{\mathbb{C}},$$

kde $\tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Riešenie:
a) Funkciu $f(z)$ chápeme ako priradenie z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$, t.j., do $f(z)$ môžeme vkladať *iba konečné hodnoty* argumentu z, pričom hodnota $f(z)$ musí byť zas

len *konečná* (takéto funkcie sa priliehavo nazývajú *konečné* :)). Z predpisu pre $f(z)$ ihneď vidno, že problém môžu robiť iba hodnoty $z = \pm\mathrm{i}$. Platí

$$f(\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2+1} = \frac{\mathrm{i}}{0} = \infty, \qquad f(-\mathrm{i}) = \frac{-\mathrm{i}}{(-\mathrm{i})^2+1} = \frac{-\mathrm{i}}{0} = \infty,$$

podľa definičných vlastností komplexného nekonečna. Teda $f(\mathrm{i}), f(-\mathrm{i}) \notin \mathbb{C}$, t.j., hodnoty $f(\mathrm{i})$, $f(-\mathrm{i})$ nie sú konečné. Funkcia $f(z)$ preto nie je definovaná v bodoch $\pm\mathrm{i}$, a teda nie je ani spojitá v $\pm\mathrm{i}$.

b) Teraz síce vkladáme do $f(z)$ zas len konečné hodnoty z, ale hodnota $f(z)$ môže byť aj *nekonečná*. Takže nás nijako nevzrušuje fakt, že $f(\pm\mathrm{i}) = \infty$. Funkcia $f(z)$ *je definovaná* v bodoch $z = \pm\mathrm{i}$ (samy si premyslite, že okrem iného je to i dôsledok faktu, že máme zavedené len jedno komplexné nekonečno :)). To však, ako vieme, nestačí na jej spojitosť. Poďme sa pozrieť na limity $f(z)$ v bodoch $\pm\mathrm{i}$. Postupne dostaneme

$$\lim_{z\to\mathrm{i}} f(z) = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{\overbrace{z}^{\text{toto konverguje do i}}}{\underbrace{z^2+1}_{\text{toto konverguje do 0}}} = \frac{\mathrm{i}}{0} = \infty = f(\mathrm{i}),$$

$$\lim_{z\to-\mathrm{i}} f(z) = \lim_{z\to-\mathrm{i}} \frac{\overbrace{z}^{\text{toto konverguje do }-\mathrm{i}}}{\underbrace{z^2+1}_{\text{toto konverguje do 0}}} = \frac{-\mathrm{i}}{0} = \infty = f(-\mathrm{i}).$$

To znamená, že v tomto ponímaní je funkcia $f(z)$ spojitá v celej komplexnej rovine $\mathbb{C}$:).

Uvedený výpočet limít sa môže zdať veľmi svojvoľný a tak trochu aj účelový, aby nám niečo pekné vyšlo :). Pridáme teda korektnejšie argumenty. Určíme limitu absolútnej hodnoty $f(z)$ v bode $z = \mathrm{i}$. Poznamenajme, že $|f(z)|$ je reálna funkcia komplexnej premennej z. Platí

$$\lim_{z\to\mathrm{i}} |f(z)| = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{\overbrace{|z|}^{\text{toto konverguje do 1}}}{\underbrace{|z^2+1|}_{\text{toto konverguje do 0 sprava}}} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

kde $+\infty$ je staré dobré *reálne* plus nekonečno :). To znamená, že pre $z \to$ i sa funkčné hodnoty $f(z)$ *neobmedzene vzďaľujú* od začiatku súradnicovej sústavy. Teda skutočne $f(z) \to \infty$, kde ∞ teraz značí *jediné* komplexné nekonečno :). Podobnú procedúru možno previesť i pre limitu $\lim_{z\to -\mathrm{i}} f(z)$.