

Príklady na precvičovanie – Taylorove a Laurentove rady, izolované singularity

Riešené príklady

Príklad 1 (Taylorov rad)

Rozviňme funkciu $f(z) = \frac{z}{z+2}$ do Taylorovho radu na okolí bodu $z_0 = 1$.

Riešenie:

Funkcia $f(z)$ je holomorfná v celej komplexnej rovine okrem bodu $z = -2$. To znamená, že na každom okolí bodu $z_0 = 1$ neobsahujúcom bod -2 je táto funkcia súčtom svojho príslušného Taylorovho radu. Navyiac, tento rad je určený jednoznačne. Inými slovami, stačí nám nájsť *akýkoľvek* rozvoj funkcie $f(z)$ podľa mocnín $z - z_0 = z - 1$ (:). Toto pozorovanie nám často umožňuje vyhnúť sa zdĺhavému počítaniu jednotlivých derivácií funkcie $f(z)$ v bode $z_0 = 1$ (v súlade s definíciou Taylorovho radu). Môžeme si pomôcť nejakým figlom :). Tak napríklad platí

$$f(z) = \frac{z}{z+2} = 1 - \frac{2}{z+2} = 1 - \frac{2}{(z-1)+3} = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{3}}.$$

Výraz $\frac{1}{1 + \frac{z-1}{3}}$ je však pre $|\frac{z-1}{3}| < 1$ súčtom nekonečného geometrického radu s kvocientom $q = -\frac{z-1}{3}$ a s prvým členom 1 (samy si premyslite ;)). Teda

$$f(z) = 1 - \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{3}\right)^n = 1 - \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (z-1)^n, \quad |z-1| < 3.$$

Poslednú rovnosť ešte môžeme upraviť oddelením nultého člena na tvar

$$f(z) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (z-1)^n, \quad |z-1| < 3$$

(samy overte :)). Získali sme tak hľadaný Taylorov rozvoj funkcie $f(z)$ na vhodnom okolí bodu $z_0 = 1$. Všimnime si, že polomer konvergencie $R = 3$ daného mocninového radu je najväčší možný, nakoľko na kružnici $|z-1| = 3$ leží bod $z = -2$ (samy si to dobre premyslite ;)).

Príklad 2 (Taylorov rad)
Nájdime Taylorov rad funkcie

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$$

na okolí bodu $z_0 = 0$.

Riešenie:

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Racionálnu lomenú funkciu $f(z)$ rozložíme na parciálne zlomky

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2}{(z+1)^2} = \frac{(z^2-1)+1}{(z+1)^2} = \frac{(z-1)(z+1)}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} \\ &= \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} = 1 - \frac{2}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}. \end{aligned}$$

Nekonštantné členy tohto rozkladu sa pokúsime rozvinúť do radu podľa mocnín $z - z_0 = z$. Zrejme platí

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n \quad \text{pre } |z| < 1$$

(samy overte :)). Všimnime si ďalej, že zlomok $\frac{1}{(z+1)^2}$ je až na znamienko derivácia výrazu $\frac{1}{z+1}$ podľa premennej z . A keďže mocninové rady môžeme na ich oboroch konvergencie derivovať člen po člene, máme

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)^2} &= \left(-\frac{1}{z+1} \right)' = \left(-\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n \right)' \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \cdot z^{n-1} \quad \text{pre } |z| < 1 \end{aligned}$$

(člen s $n = 0$ je konštanta, preto po derivovaní vymizne :)). Posledný rozvoj môžeme ešte kozmeticky vylepšiť posunom indexácie $n \mapsto n + 1$, t.j.,

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \cdot z^n \quad \text{pre } |z| < 1.$$

Pre funkciu $f(z)$ v zadaní príkladu teda platí

$$f(z) = 1 - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \cdot z^n \quad \text{pre } |z| < 1.$$

Úpravou na jednu spoločnú sumu dostávame finálny výsledok

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n-1) \cdot z^n = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1) \cdot z^n, \quad |z| < 1$$

(samy overte detaily; celkový koeficient pri mocnine z^0 je nulový, rovnako ako aj celkový koeficient pri z :)).

Príklad 3 (Taylorov rad)

Zostrojme mocninový rozvoj funkcie $f(z) = \sin(2z - z^2)$ podľa mocnín $z - 1$.

Riešenie:

Povedané ľudsky – máme nájsť Taylorov rad funkcie $f(z)$ so stredom v bode $z_0 = 1$:). Na prvý pohľad sa zdá, že ide o náročnú, ba až beznádejnú úlohu :-/. Poďme spoločne vymyslieť nejakú fintu :). Všimnime si takúto banalitu

$$\sin(2z - z^2) = \sin[1 - (z^2 - 2z + 1)] = \sin[1 - (z - 1)^2] \quad :).$$

To ani nestálo za reč. Pokračujme však ďalej. Z goniometrie vieme, ako „roz-sínusovať“ súčet, konkrétne

$$\sin[1 - (z - 1)^2] = \sin 1 \cdot \cos(z - 1)^2 - \cos 1 \cdot \sin(z - 1)^2.$$

Pre každé komplexné číslo z teda máme takúto zaujímavú identitu

$$\sin(2z - z^2) = \sin 1 \cdot \cos(z - 1)^2 - \cos 1 \cdot \sin(z - 1)^2 \quad :).$$

Podľa definície komplexného sínusu a kosínusu však platí

$$\sin w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot w^{2n+1} \quad \text{a} \quad \cos w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot w^{2n}$$

pre každé $w \in \mathbb{C}$. V našom prípade teda pre každé $z \in \mathbb{C}$ dostávame

$$\sin(z - 1)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot (z - 1)^{4n+2},$$

$$\cos(z-1)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot (z-1)^{4n}$$

(samy si dobre premyslíte ;)). Dosadením týchto výrazov do odvodenej identity pre funkciu $f(z)$ máme

$$\sin(2z - z^2) = \sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot (z-1)^{4n} - \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot (z-1)^{4n+2}.$$

Pravá stranu poslednej rovnosti je práve hľadaný Taylorov rozvoj funkcie $f(z)$ na okolí bodu $z_0 = 1$:). V získanom rozvoji nám však pomerne veľa členov chýba, konkrétne členy s mocninami typu $(z-1)^{4n+1}$ a $(z-1)^{4n+3}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Elegantne to môžeme vyriešiť takto. Funkcia $f(z)$ v zadaní príkladu má mocninový rozvoj $\sum_{m=0}^{\infty} a_m(z-1)^m$ s koeficientami a_m tvaru

$$a_m = \left\{ \begin{array}{ll} \sin 1 \cdot \frac{(-1)^n}{(2n)!}, & \text{ak } m = 4n, \\ \cos 1 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}, & \text{ak } m = 4n + 2, \\ 0, & \text{inak,} \end{array} \right\} \quad \text{kde } n \in \mathbb{N}_0 \quad :).$$

Príklad 4 (Taylorov rad)

Napišme prvé štyri členy Maclaurinovho radu funkcie $f(z) = \log(1+e^z)$, kde $\log(\cdot)$ je hlavná vetva komplexnej logaritmickej funkcie $\text{Log}(\cdot)$.

Riešenie:

Pri riešení tohto príkladu si vysúkame rukávy a trochu si mechanicky zderivujeme :). Vieme, že hľadaný Maclaurinov rad má tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n.$$

Potrebujeme teda nájsť hodnotu a prvé tri derivácie funkcie $f(z)$ v bode $z = 0$. Pripomeňme, že hlavná vetva logaritmu $\log(\cdot)$ sa derivuje rovnako ako reálny logaritmus, len si musíme dať pozor na to, kde derivujeme. Konkrétne,

$$(\log w)' = \frac{1}{w} \quad \text{a funkcia } \log w \text{ je holomorfná pre } w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Tak s chuťou do toho :). Postupne dostávame

$$f(0) = \log(1 + e^0) = \log 2 = \ln 2,$$

$$f'(0) = [\log(1 + e^z)]'_{z=0} = \left[\frac{e^z}{1 + e^z} \right]_{z=0} = \frac{1}{2},$$

$$f''(0) = \left[\frac{e^z}{1 + e^z} \right]'_{z=0} = \left[\frac{e^z}{(1 + e^z)^2} \right]_{z=0} = \frac{1}{4},$$

$$f'''(0) = \left[\frac{e^z}{(1 + e^z)^2} \right]'_{z=0} = \left[\frac{e^z(1 - e^z)}{(1 + e^z)^3} \right]_{z=0} = 0$$

(samy overte details jednotlivých výpočtov ;)). Prvé štyri členy hľadaného rozvoja teda budú

$$\ln 2, \quad \frac{1}{2} \cdot z, \quad \frac{1}{8} \cdot z^2, \quad 0 \cdot z^3.$$

Nakoniec poznamenajme, že tento rozvoj funkcie $f(z)$ bude platný na každom okolí bodu 0, na ktorom je funkcia $f(z)$ holomorfná. Nechávame na čitateľa, aby si sám premyslel, že najväčšie takéto okolie má tvar $|z| < \pi$:).

Príklad 5 (Laurentov rad)

Rozviňme funkciu $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ do Laurentovho radu na vhodných medzikružiach so stredom $z_0 = 0$.

Riešenie:

Teória Laurentových radov je v istom zmysle rozšírením konceptu Taylorových radov – jedná sa o mocninové rady, v ktorých pripúšťame i prítomnosť členov zo *zápornými* mocninami. Obory konvergenie takýchto všeobecnejších radov už nie sú otvorené kruhy, ale otvorené *medzikružia* s vhodnými stredmi. Presnejšie, ak funkcia $f(z)$ je holomorfná na nejakom otvorenom medzikruží $P(z_0, r, R)$ so stredom v bode z_0 (r a R je vnútorný a vonkajší

polomer daného medzikružia, $r < R$), potom $f(z)$ je možné na tomto medzikruží jednoznačne rozvinúť do *Laurentovho radu so stredom v z_0* , t.j., platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}(z - z_0)^{-m} \quad \text{pre každé } z \in P(z_0, r, R),$$

kde a_n a a_{-m} , $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$, sú tzv. *Laurentove koeficienty* funkcie $f(z)$ v medzikruží $P(z_0, r, R)$. Laurentove koeficienty sa dajú reprezentovať ako hodnoty istých komplexných krivkových integrálov. V praxi sa však uplatňuje opačný postup – znalosť Laurentových koeficientov umožňuje určovať hodnoty týchto integrálov :). Počítanie komplexných integrálov sa teda redukuje na hľadanie Laurentových rozvojev, čo je základná filozofia tzv. *Cauchyho teórie* komplexných integrálov. Je preto nutné vedieť stanoviť koeficienty a_k , $k \in \mathbb{Z}$, Laurentovho rozvoja iným spôsobom než pomocou integrálov.

V našom prípade je funkcia $f(z)$ holomorfná v celom \mathbb{C} okrem bodov $z = 1$ a $z = 2$. Komplexná rovina sa nám preto rozdelí na tri navzájom disjunktné otvorené medzikružia so stredmi v bode $z_0 = 0$, konkrétne

$$P(0, 0, 1) : \quad 0 < |z| < 1,$$

$$P(0, 1, 2) : \quad 1 < |z| < 2,$$

$$P(0, 2, \infty) : \quad 2 < |z| < \infty$$

(samy overte pomocou vhodného obrázku :)). Funkcia $f(z)$ je zrejme racionálna lomená, preto platí rozklad

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$$

(i toto samy overte ;)). Na jednotlivých medzikružiach sa teraz budeme snažiť rozvinúť tieto parciálne zlomky podľa (kladných i záporných) mocnín premennej z . V medzikruží $P(0, 0, 1)$ platí $|z| < 1$, preto máme

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \left| \left| \frac{z}{2} \right| < \frac{1}{2} < 1 \right| = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot z^n$$

(samy si dobre premyslite :)). Pre funkciu $f(z)$ teda platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot z^n, \quad z \in P(0, 0, 1).$$

Získali sme Laurentov rozvoj funkcie $f(z)$ na medzikruží $P(0, 0, 1)$. Všimnime si, že tento rad obsahuje iba nezáporné mocniny premennej z . Navyiac, je platný aj v bode $z = z_0 = 0$ (samy overte :)). Jedná sa teda o Taylorov rozvoj funkcie $f(z)$ na otvorenom kruhu $|z| < 1$ (dobré si to premyslite; funkcia $f(z)$ je totiž holomorfná i v bode $z = 0$:)).

Podme preskúmať, ako to bude vyzerat' na medzikruží $P(0, 1, 2)$. Teraz $1 < |z| < 2$, a teda zlomok $-\frac{1}{z-1}$ nemôžeme rozvinúť do nekonečného geometrického radu tak ako v predchádzajúcom prípade (prečo? :)). Platí však $|\frac{1}{z}| < 1$, a preto môžeme použiť nasledujúci obrat

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad (;$$

(samy overte details ;)). Druhý zlomok $\frac{1}{z-2}$ má rovnaký rozvoj ako v predchádzajúcom prípade, pretože i teraz máme $|\frac{z}{2}| < 1$. Takže

$$\frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot z^n.$$

Laurentov rad funkcie $f(z)$ má potom tvar

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot z^n, \quad z \in P(0, 1, 2).$$

V tomto prípade rozvoj obsahuje záporné mocniny z (tzv. *hlavná* časť radu) i nezáporné mocniny z (tzv. *regulárna* časť radu).

Na medzikruží $P(0, 2, \infty)$, t.j., $2 < |z|$, postupujeme analogicky. Platí

$$-\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n},$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot \frac{1}{z^n},$$

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 1) \cdot \frac{1}{z^n}, \quad z \in P(0, 2, \infty)$$

(samy overte detaily výpočtov :)). Výsledný Laurentov rad v tomto prípade má len záporné mocniny z , t.j., len svoju hlavnú časť.

Príklad 6 (Laurentov rad)

Nájdime Laurentov rad funkcie $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$ na rýdzom okolí bod $z_0 = 1$.

Riešenie:

Pri riešení využijeme definíciu komplexnej exponenciálnej funkcie, konkrétne

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}, \quad w \in \mathbb{C}.$$

V našom prípade dosadením $w = \frac{1}{1-z}$ ihneď dostaneme hľadaný Laurentov rozvoj funkcie $f(z)$, nakoľko

$$f(z) = e^{\frac{1}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{1-z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{(z-1)^n}, \quad 0 < |z-1|.$$

Získaný rad pozostáva z hlavnej časti a z regulárnej časti, ktorá je tvorená iba jedným členom 1 (samy si premyslite :)).

Príklad 7 (Laurentov rad)

Zostrojme Laurentove rady funkcie $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ na medzikružiach

$$\text{a) } 0 < |z-i| < 2, \quad \text{b) } 1 < |z| < \infty.$$

Riešenie:

Postupujeme analogicky ako v predchádzajúcich príkladoch.

a) Do funkcie $f(z)$ sa snažíme nejako zamontovať výraz $z-i$. Napríklad

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \frac{1}{(2i+z-i)^2} \\ &= \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \frac{1}{(2i)^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)^2} = -\frac{1}{4(z-i)^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)^2}. \end{aligned}$$

Na uvažovanom medzikruží platí $\left|\frac{z-i}{2i}\right| < 1$ (prečo? :)), a preto

$$\frac{1}{1 + \frac{z-i}{2i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^n} \cdot (z-i)^n, \quad 0 < |z-i| < 2.$$

My však potrebujeme rozvinúť druhú mocninu výrazu $\frac{1}{1 + \frac{z-i}{2i}}$. Postupne máme

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{z-i}{2i}}\right)' = -\frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{z-i}{2i}\right)^2}$$

↓

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{z-i}{2i}\right)^2} = -2i \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{z-i}{2i}}\right)'$$

Do poslednej rovnosti dosadíme získaný rozvoj pre $\frac{1}{1 + \frac{z-i}{2i}}$ a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(1 + \frac{z-i}{2i}\right)^2} &= -2i \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^n} \cdot (z-i)^n\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n-1}} \cdot n \cdot (z-i)^{n-1} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2i)^{n-1}} \cdot (z-i)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{(2i)^n} \cdot (z-i)^n, \quad 0 < |z-i| < 2 \end{aligned}$$

(v poslednom kroku sme zmenili indexáciu $n \mapsto n+1$:)). Pre funkciu $f(z)$ napokon platí vyjadrenie

$$f(z) = -\frac{1}{4(z-i)^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{z-i}{2i}\right)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{4 \cdot (2i)^n} \cdot (z-i)^{n-2}, \quad 0 < |z-i| < 2.$$

V poslednej formule pre prehľadnosť oddelíme hlavnú a regulárnu časť získaného Laurentovho rozvoja. Nechávame na čitateľa, aby overil finálnu rovnosť

$$f(z) = \frac{-\frac{1}{4}}{(z-i)^2} - \frac{\frac{i}{4}}{z-i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+3)}{16 \cdot (2i)^n} \cdot (z-i)^n, \quad 0 < |z-i| < 2 \quad :).$$

b) V tomto prípade chceme funkciu $f(z)$ rozvinúť podľa mocnín z . Nakoľko $1 < |z|$, platí $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, a teda postupne máme

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+2}}, \quad 1 < |z| < \infty$$

(samy overte :)). Keďže platí

$$\frac{1}{(z^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2z} \cdot \left(\frac{1}{z^2 + 1} \right)'$$

(samy sa presvedčte ;)), pre funkciu $f(z)$ v zadaní príkladu dostávame

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2z} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+2}} \right)' = -\frac{1}{2z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} -(2n+2) \cdot \frac{(-1)^n}{z^{2n+3}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{z^{2n+4}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n-1)}{z^{2n}}, \quad 1 < |z| < \infty \end{aligned}$$

(v poslednom kroku sme vykonali posun indexu $n \mapsto n+2$:)). Výsledný Laurentov rad funkcie $f(z)$ na danom medzikruží obsahuje iba hlavnú časť.

Príklad 8 (Laurentov rad)

Stanovme Laurentov rozvoj funkcie

$$f(z) = \cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}$$

na prstencovom okolí bodu $z_0 = 2$.

Riešenie:

Pri riešení vyskúšame podobnú fintu ako v Príklade 3 :). Nakoľko zlomok

$$\frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2} = \frac{(z-2)^2 - 4}{(z-2)^2} = 1 - \frac{4}{(z-2)^2},$$

dostávame pre každé komplexné číslo $z \neq 2$ formulu

$$\cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2} = \cos \left[1 - \frac{4}{(z-2)^2} \right] = \cos 1 \cdot \cos \frac{4}{(z-2)^2} + \sin 1 \cdot \sin \frac{4}{(z-2)^2}$$

(samy overte ;)). Využitím definícií komplexného sínusu a kosínusu (pozri Príklad 3) potom pre funkciu $f(z)$ v zadaní príkladu máme

$$f(z) = \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \left[\frac{4}{(z-2)^2} \right]^{2n} + \sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \left[\frac{4}{(z-2)^2} \right]^{2n+1}$$

$$= \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{1}{(z-2)^{4n}} + \sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{(z-2)^{4n+2}}, \quad z \neq 2$$

(samy si premyslite :)). Poznamenajme, že v získanom Laurentovom rozvoji je jeho regulárna časť reprezentovaná iba jediným členom $\cos 1$.

Príklad 9 (Laurentov rad)

Napišme niekoľko členov Laurentov radu funkcie $f(z) = \cotg z$ na medzikruží $0 < |z| < \pi$.

Riešenie:

Podľa definície komplexného kotangensu máme

$$\cotg z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Keďže funkcia $\sin z$ nemá v otvorenom medzikruží $0 < |z| < \pi$ nulový bod (samy si premyslite :)), funkcia $f(z)$ v zadaní príkladu je holomorfná na tomto medzikruží, a teda je možné ju jednoznačne rozvinúť do Laurentovho radu podľa mocnín z . Ďalej vieme, že

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \quad \text{a} \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

pre každé $z \in \mathbb{C}$. Platí teda

$$\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right) : \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \dots$$

(samy poctivo overte :)). Prvých niekoľko členov hľadaného Laurentovho radu funkcie $f(z)$ bude mať teda tvar

$$f(z) = \cotg z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \dots, \quad 0 < |z| < \pi.$$

Nechávame na čitateľa, aby si premyslel, že jediný člen tohto rozvoja so zápornou mocninou bude $\frac{1}{z}$, všetky ostatné členy budú obsahovať už len kladné mocniny z :). Dá sa ukázať, že úplný Laurentov rozvoj funkcie $\cotg z$ na medzikruží $0 < |z| < \pi$ má tvar

$$\cotg z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot B_{2n}}{(2n)!} \cdot z^{2n-1},$$

kde reálne konštanty $B_k, k \in \mathbb{N}_0$, sú tzv. *Bernoulliho čísla*. Majú mnoho zaujímavých a významných vlastností s početnými aplikáciami v najrôznejších oblastiach matematiky. Platí $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}$ a všetky ostatné Bernoulliho čísla s nepárnym indexom sú už nulové. Na druhej strane správanie sa Bernoulliho čísel s párnymi indexami predstavuje i dnes záhadu. Platí

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad \dots$$

Poznamenajme, že Bernoulliho čísla sú definované ako koeficienty Taylorovho rozvoja reálnej funkcie $\frac{x}{e^x - 1}$ so stredom v bode $x_0 = 0$, presnejšie platí

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \cdot x^n, \quad \text{t.j.,} \quad B_n := \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)_{x=0}^{(n)}.$$

Na základe tejto definície sa dá pomerne ľahko ukázať, že Bernoulliho čísla spĺňajú rekurentnú reláciu

$$B_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot B_k = 0, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

čo umožňuje efektívne počítať ich jednotlivé hodnoty (samy sa pokúste vypočítať hodnotu B_{14} :)). Za zmienku stojí zaujímavá súvislosť Bernoulliho čísel s hodnotami súčtu nekonečného číselného radu $\sum \frac{1}{n^{2p}}$ pre prirodzené hodnoty p . Konkrétne, pre každé $p \in \mathbb{N}$ platí takáto formula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = 1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \dots = \frac{(-1)^{p-1} 2^{2p-1} B_{2p}}{(2p)!} \cdot \pi^{2p} \quad :).$$

Príklad 10 (Singularne body)

Nájdime všetky konečné izolované singularne body funkcie $f(z) = \frac{1}{z-z^3}$ a určíme ich typ.

Riešenie:

Pripomeňme, že komplexné číslo z_0 je *izolovaný singularny bod* funkcie $f(z)$, ak $f(z)$ je holomorfná na nejakom rýdzom okolí bodu z_0 , ale v samotnom bode z_0 nie je holomorfná. Funkciu $f(z)$ teda vieme na vhodnom prstencovom okolí bodu z_0 rozvinúť do Laurentovho radu, čo umožňuje nasledujúcu

klasifikáciu izolovaných singularít. Bod z_0 sa nazýva *odstrániteľná* singularita, ak odpovedajúci Laurentov rad má iba regulárnu časť, t.j., obsahuje iba členy s nezápornými mocninami $z - z_0$. V opačnom prípade hovoríme o *neodstrániteľnej* singularite, ktorá môže byť buď *pól* (konečne veľa členov so zápornými mocninami $z - z_0$) alebo *podstatná* singularita (nekonečne veľa členov so zápornými mocninami $z - z_0$). V prípade pólu nás zaujíma jeho *řád*, čo je absolútna hodnota najmenšieho záporného indexu vyskytujúceho sa v Laurentovom rozvoji.

Nakoľko v našom prípade pre funkciu $f(z)$ platí

$$f(z) = \frac{1}{z - z^3} = \frac{1}{z(1 - z)(1 + z)},$$

máme tri singularity $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ a $z_3 = -1$. Všetky tri sú póly prvého rádu, t.j., *jednoduché póly*. Vyplýva to napríklad z pozorovania, že funkcia $f(z)$ má v bode z_0 pól k -tého rádu práve vtedy, keď sa dá vyjadriť v tvare $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$, kde funkcia $g(z)$ je holomorfná a nenulová v z_0 . Samy overte túto skutočnosť pre každý z bodov $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ a $z_3 = -1$;).

Príklad 11 (Singularne body)

Stanovme všetky konečné izolované singularity a ich typ pre funkciu

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}.$$

Riešenie:

Funkcia $f(z)$ má zrejme jedinú izolovanú singularitu v bode $z = 0$. Všimnime si, že funkcia $f(z)$ má konečnú limitu v bode $z = 0$, nakoľko

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = | \text{l'Hospital} | = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z} = | \text{l'Hospital} | = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{2} = 1.$$

Existencia konečnej limity funkcie $f(z)$ v singulárnom bode z_0 je jedným z poznávacích znakov, že bod z_0 je odstrániteľná singularita funkcie $f(z)$. V našom prípade je teda $z = 0$ odstrániteľný singulárny bod funkcie $f(z)$. Naviac sa dá ukázať, že nová komplexná funkcia

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & z \neq 0, \\ 1, & z = 0, \end{cases}$$

je holomorfná i v bode $z = 0$. Odtiaľ pochádza i uvedené pomenovanie bodu $z = 0$ termínom „odstrániteľná“ singularita :).

Príklad 12 (Singulárne body a rezíduá)

Určme všetky konečné izolované singularities funkcie $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ a vypočítajme rezíduá funkcie $f(z)$ v týchto bodoch.

Riešenie:

Na základe rozkladu

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2} = \frac{1}{(z - i)^2(z + i)^2}$$

ihneď zistíme izolované singularities v bodoch $z_1 = i$ a $z_2 = -i$. V oboch prípadoch sa jedná o dvojnásobný pól (samy overte :)). Vypočítame teraz rezíduá funkcie $f(z)$ v týchto bodoch. Z komplexnej analýzy je známe, že rezíduum funkcie $f(z)$ v bode z_0 (označujeme $\text{res}_{z_0} f(z)$) je hodnota koeficientu pri mocnine $(z - z_0)^{-1}$ v príslušnom Laurentovom rozvoji funkcie $f(z)$ na okolí bodu z_0 . V prípade, ak z_0 je pól rádu k , vieme hodnotu $\text{res}_{z_0} f(z)$ stanoviť i bez znalosti daného Laurentovho radu. Konkrétne, platí formula

$$\text{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^k \cdot f(z)]^{(k-1)}.$$

V našom príklade teda postupne dostávame (v oboch prípadoch máme $k = 2$)

$$\begin{aligned} \text{res}_{z_1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} [(z - i)^2 \cdot f(z)]' = \lim_{z \rightarrow i} \left[(z - i)^2 \cdot \frac{1}{(z - i)^2(z + i)^2} \right]' \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{1}{(z + i)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow i} \left[-\frac{2}{(z + i)^3} \right] = -\frac{2}{(2i)^3} = -\frac{i}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{res}_{z_2} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -i} [(z + i)^2 \cdot f(z)]' = \lim_{z \rightarrow -i} \left[(z + i)^2 \cdot \frac{1}{(z - i)^2(z + i)^2} \right]' \\ &= \lim_{z \rightarrow -i} \left[\frac{1}{(z - i)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow -i} \left[-\frac{2}{(z - i)^3} \right] = -\frac{2}{(-2i)^3} = \frac{i}{4} \quad :). \end{aligned}$$

Príklad 13 (Singularne body a rezíduá)

Stanovme rezíduá funkcie $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ v jej izolovaných singularitách.

Riešenie:

Ihneď vidíme singularny bod $z_0 = 0$. V tomto prípade ide o podstatnú singularitu. Okrem iného to spoznáme i podľa toho, že limita

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z^2 e^{\frac{1}{z}} \quad \text{neexistuje (ani vlastná, ani nevlastná).}$$

Nechávame na čitateľa, aby sám overil túto skutočnosť (vyšetrite, čo sa bude diať, keď sa do limitného bodu 0 budeme blížiť po reálnej osi jednak sprava, a jednak zľava ;)). Pre výpočet príslušného rezídua funkcie $f(z)$ však bohužiaľ musíme zostaviť celý Laurentov rozvoj funkcie $f(z)$ na nejakom rýdzom okolí bodu $z_0 = 0$:-/. Našťastie, v tomto prípade to nebude až tak bolestivé ;). Využitím definície komplexnej exponenciálnej funkcie máme

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^{n-2}} \\ &= z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{720} \cdot \frac{1}{z^4} + \dots \end{aligned}$$

Pre hľadané rezíduum teda platí $\text{res}_0 f(z) = \frac{1}{6}$. Tvar získaného Laurentovho radu nám zároveň potvrdzuje, že bod $z_0 = 0$ je skutočne podstatná singularita funkcie $f(z)$ (samy si premyslite :)).

Príklad 14 (ťažší) (Singularne body)

Zistíme všetky konečné izolované singularne body a ich typ pre funkciu

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}.$$

Riešenie:

Jednou z izolovaných singularít funkcie $f(z)$ je iste bod $z = 1$, jedná sa o podstatnú singularitu (samy si premyslite :)). Ďalšie singularity sú nulové body

menovateľa funkcie $f(z)$, t.j., všetky riešenia rovnice $e^z = 1$ v \mathbb{C} . Nechávame na čitateľa, aby si premyslel, že sú to práve body $z_m = 2\pi im$, $m \in \mathbb{Z}$ (komplexná exponenciálna funkcia e^z je periodická s periódou $2\pi i$:)). Pre každé $m \in \mathbb{Z}$ je bod z_m jednoduchým pólom funkcie $f(z)$. Tento fakt vyplýva z vyjadrenia funkcie $f(z)$ pre dané celé m v tvare

$$f(z) = \frac{z - z_m}{e^z - 1} \cdot e^{\frac{1}{z-1}} \cdot \frac{1}{z - z_m}.$$

Výraz $\frac{z-z_m}{e^z-1}$ je možné holomorfné a nenulovo dodefinovať i v bode z_m , pretože

$$\lim_{z \rightarrow z_m} \frac{z - z_m}{e^z - 1} = | \text{l'Hospital} | = \lim_{z \rightarrow z_m} \frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^{z_m}} = 1$$

(samy overte; funkcia $\frac{z-z_m}{e^z-1}$ má v bode z_m odstrániteľnú singularitu, pozri i Príklad 11 ;)). To nás oprávňuje pozeráť sa na funkciu

$$g(z) := \frac{z - z_m}{e^z - 1} \cdot e^{\frac{1}{z-1}}$$

ako na holomorfnú a nenulovú v bode z_m (keďže $e^{\frac{1}{z_m-1}} \neq 0$:)). Preto funkcia $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_m}$ má v bode z_m jednoduchý pól pre každé $m \in \mathbb{Z}$.

Príklad 15 (ťažší) (Singularné body a rezíduá)

Vypočítajte hodnoty rezíduí daných funkcií v ich konečných singularitách.

$$\text{a) } f(z) = \sin z \cdot \sin \frac{1}{z}, \quad \text{b) } f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}.$$

Riešenie:

a) Funkcia $f(z)$ má zrejme jediný konečný singularný bod $z_0 = 0$. Keďže

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \dots, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

(samy overte :)), Laurentov rad funkcie $f(z)$ na okolí bodu $z_0 = 0$ má tvar

$$f(z) = \sin z \cdot \sin \frac{1}{z} = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \dots \right).$$

Všimnime si, že pri postupnom roznásobovaní tohto súčinu budú vznikať iba *párne* (kladné i záporné) mocniny premennej z . Obzvlášť, člen s mocninou z^{-1} sa teda nebude vyskytovať v získanom Laurentovom rade. Z toho ihneď vyplýva, že $\text{res}_0 f(z) = 0$ (samy si to veľmi dobre premyslite ;)).

b) Bod $z_0 = 0$ je jediná konečná izolovaná singularita funkcie $f(z)$. V tomto prípade príslušný Laurentov rozvoj funkcie $f(z)$ na rýdzom okolí bodu $z_0 = 0$ bude mať tvar

$$f(z) = e^{z+\frac{1}{z}} = e^z \cdot e^{\frac{1}{z}} = \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \right).$$

Zaujímá nás celkový koeficient pri mocnine z^{-1} . Výsledný člen s mocninou z^{-1} má postupne štruktúru

$$1 \cdot \frac{1}{1!z} + \frac{z}{1!} \cdot \frac{1}{2!z^2} + \frac{z^2}{2!} \cdot \frac{1}{3!z^3} + \frac{z^3}{3!} \cdot \frac{1}{4!z^4} + \frac{z^4}{4!} \cdot \frac{1}{5!z^5} + \frac{z^5}{5!} \cdot \frac{1}{6!z^6} + \dots$$

⇓ celkový koeficient pri mocnine z^{-1} ⇓

$$1 + \frac{1}{1! \cdot 2!} + \frac{1}{2! \cdot 3!} + \frac{1}{3! \cdot 4!} + \frac{1}{4! \cdot 5!} + \frac{1}{5! \cdot 6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot (n+1)!}$$

(samy si dobre premyslite :)). Pre hľadané rezíduum funkcie $f(z)$ v bode $z_0 = 0$ teda platí

$$\text{res}_0 f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot (n+1)!} \quad ;).$$

Nechávame na čitateľa, aby overil, že nekonečný číselný rad na pravej strane poslednej rovnosti skutočne konverguje ;).