Príklady na precvičovanie – komplexná čísla, postupnosti a funkcie

Neriešené príklady

1. Vypočítajte. Úlohu g) vyriešte bez použitia Moivreovho vzorca.

$$\text{a)}\quad \frac{(1-\mathrm{i})^3}{(2+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}, \qquad \text{b)}\quad \left(\frac{1+2\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}\right)^2, \qquad \text{c)}\quad \mathrm{i}^{133}, \qquad \text{d)}\quad \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}},$$

$$\text{e)}\quad \mathrm{i}+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^{15}+\mathrm{i}^{29}, \qquad \text{f)}\quad \left(-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}\right)^9, \qquad \text{g)}\quad \sqrt{60-11\mathrm{i}}.$$

2. Nájdite všetky hodnoty daných odmocnín a zapíšte ich v algebraickom, goniometrickom i exponenciálnom tvare.

$$\text{a)}\quad \sqrt[4]{\mathrm{i}}, \qquad \text{b)}\quad \sqrt[5]{1}, \qquad \text{c)}\quad \sqrt[5]{1-\mathrm{i}}, \qquad \text{d)}\quad \sqrt[5]{32}, \qquad \text{e)}\quad \sqrt[8]{1}.$$

Návod: Pri riešení úlohy b) využite identity

$$\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \qquad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

$$\sin\frac{4\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \qquad \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

3. Riešte v $\mathbb{C}$ rovnice.

$$\text{a)}\quad z^2-3z+3+\mathrm{i}=0, \qquad \text{b)}\quad z^2-3\mathrm{i}z-3+\mathrm{i}=0.$$

4. Rovnostranný rovinný trojuholník má ťažisko v bode $[0,0]$ a jeden vrchol v bode $[1,0]$. Nájdite jeho zvyšné dva vrcholy.

5. Vypočítajte dĺžku strany pravidelného n-uholníka, ktorého vrcholy sú riešeniami rovnice $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$.

6. Pre $k \in \mathbb{N}$ nájdite hodnotu výrazu $z^k + \frac{1}{z^k}$, ak viete, že $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

7. Stanovte súčet

$$\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \cdots + (-1)^{n-1} \sin nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Pre $x \in \mathbb{R}$ vyjadrite $\sin^5 x$ a $\cos^5 x$ ako lineárnu kombináciu sínusov a kosínusov vhodných násobkov argumentu x.

9. Zapíšte dané množiny a načrtnite ich v komplexnej rovine.

$$\text{a)} \quad 0 < \mathrm{Re} z \le \mathrm{Im} z, \qquad \text{b)} \quad 2 < |z - 1 + 2\mathrm{i}| < 4,$$

$$\text{c)} \quad \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \text{d)} \quad 1 \le \mathrm{Re} z \le 5 \qquad \text{e)} \quad \frac{\pi}{3} \le \arg z \le \frac{5\pi}{6}.$$

10. Vypočítajte limity postupností.

$$\text{a)} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \mathrm{i}n\right), \qquad \text{b)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n - \mathrm{i}}{\mathrm{i}n + 3} \qquad \text{c)} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 + \mathrm{i}}{2}\right)^n,$$

$$\text{d)} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \qquad \text{e)} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \mathrm{i}\right)\left(\frac{\mathrm{i}n - 3}{n\sqrt{n} + 1}\right).$$

11. Rozhodnite o (absolútnej/neabsolútnej) konvergencii/divergencii daných nekonečných radov.

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-n} + \mathrm{i}\right), \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2n+1}}{(1 + \mathrm{i}n)^n}, \qquad \text{c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \mathrm{i}}{n^2 + \mathrm{i}}.$$

12. Určte nekonečný súčet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\mathrm{i}^{2n-1}}{2n - 1}\right).$$

13. Vypočítajte dané limity funkcií.

$$\text{a)} \quad \lim_{z\to 0} \frac{(\mathrm{Re} z^2)^2}{z^2}, \qquad \text{b)} \quad \lim_{z\to\infty} \frac{\mathrm{i}z^2 + 3z}{5z^2 - 9\mathrm{i}}.$$

14. Nájdite body nespojitosti funkcie

$$f(z) = \frac{z+\mathrm{i}}{z^2-\mathrm{i}},$$

chápanej ako priradenie na $\mathbb{C}$, a rozhodnite, či sa jedná o odstrániteľné nespojitosti.

Výsledky

1. a) $-\frac{2}{5}(1-\mathrm{i})$, b) $-\frac{12}{25}+\frac{7}{50}\mathrm{i}$, c) i, d) $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7}{12}\pi}$, e) 0, f) $-\frac{1}{81\sqrt{3}}\,\mathrm{i}$, g) $\frac{\pm 11 \mp \mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.

2. a)

$$z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8} = \cos\frac{\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt[4]{8}},$$

$$z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/8} = \cos\frac{5\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt[4]{8}} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}},$$

$$z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}9\pi/8} = \cos\frac{9\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{8} = -\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt[4]{8}},$$

$$z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}13\pi/8} = \cos\frac{13\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt[4]{8}} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}}.$$

b)

$$z_0 = 1,$$

$$z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/5} = \cos\frac{2\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},$$

$$z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/5} = \cos\frac{4\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},$$

$$z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}6\pi/5} = \cos\frac{6\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{6\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},$$

$$z_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}8\pi/5} = \cos\frac{8\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

c) Jedna hodnota je napríklad $\sqrt[10]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4} = (-1+\mathrm{i})/\sqrt[5]{4}$. Ostatné hodnoty majú tvar

$$\frac{(-1+\mathrm{i})}{\sqrt[5]{4}} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \in \sqrt[5]{1}.$$

d) $2 \cdot \varepsilon$, $\varepsilon \in \sqrt[5]{1}$.

e) ± 1, $\pm \mathrm{i}$, $\pm \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$, $\pm \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.

3. a) $2-\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}$, b) $1+\mathrm{i}$, $-1+2\mathrm{i}$.

4. $-\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. $s = 2\sin\frac{\pi}{n}$.

6. $2\cos k\alpha$ ($z = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\alpha}$ ako dva korene kvadratickej rovnice).

7.
$$\begin{cases} -\dfrac{\sin\frac{n(x+\pi)}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)(x+\pi)}{2}}{\cos\frac{x}{2}}, & x \neq (2l-1)\pi, \\ 0, & x = (2l-1)\pi, \end{cases} \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

8. $\cos^5 x = \frac{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}{16}$, $\sin^5 x = \frac{\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x}{16}$.

9. a) $0 < x \leq y$, b) medzikružie so stredom $[1,-2]$ a s polomermi $\sqrt{2}$ a 2, c) kružnica so stredom v bode $[1,0]$ a s polomerom 1, okrem bodu $[0,0]$, d) $1 \leq x \leq 5$, e) štvrťrovina $y \geq \sqrt{3}x$ a $y \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}\,x$.

10. a) ∞, b) $-2\mathrm{i}$, c) 0, d) pre $\varphi \neq 0$ neexistuje, pre $\varphi = 0$ hodnota 1, e) 0.

11. a) diverguje, b) absolútne konverguje, c) absolútne konverguje.

12. $\frac{\pi^2}{6} + \mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}$.

13. a) 0, b) $\frac{\mathrm{i}}{5}$.

14. neodstrániteľné nespojitosti v bodoch $\pm\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.