přičemž $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce splňující Lipschitzovu podmínku, funkce $r : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a $|r(t,y)| \leq \varepsilon$. Odhadněte $|x(t) - y(t)|$.

3. Buď $\omega(t,x)$ spojitá pro $t \in \langle t_0, T \rangle$, $x \in \mathbb{R}$ a neklesající v x. Nechť počáteční problém $y' = \omega(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ má jediné úplné řešení y. Ukažte, že pro každou spojitou funkci x splňující nerovnost

$$x(t) \leq y_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(s, x(s))\, ds$$

platí $x(t) \leq y(t)$.

4. Dokažte, že úplné řešení každého z následujících počátečních problémů existuje pro všechna $x \geq x_0$

$$a) \quad y' = \frac{x+y}{1+y^2}\,, \qquad y(x_0) = y_0,$$

$$b) \quad y' = x^3 - y^3\,, \qquad y(x_0) = y_0,$$

$$c) \quad y' = xy + e^{-y}, \qquad y(x_0) = y_0.$$

5. Nechť $y' = f(x,y)$ je skalární diferenciální rovnice taková, že funkce f a $\partial f/\partial y$ jsou spojité v $\mathbb{R}^2$ a že zde platí

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq k(x),$$

kde k je spojitá funkce v $\mathbb{R}$. Dokažte, že úplné řešení počátečního problému $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ je definováno pro všechna $x \geq x_0$.

6. Buď $f(t,x)$ spojitá n-vektorová funkce taková, že v oblasti $|y|_e > b$ platí

$$y \cdot f(x,y) \leq k(x)\, |y|_e^2,$$

kde $|\cdot|_e$ značí Euklidovu normu, $\cdot$ značí skalární součin a k funkci spojitou na $\mathbb{R}$. Dokažte, že úplné řešení rovnice $y' = f(x,y)$ s libovolnou počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ existuje pro všechna $x \geq x_0$.

Doporučená literatura

LAKSHMIKANTHAM V. - LEELA S. [1].

VI.
AUTONOMNÍ SYSTÉMY

1. Geometrická interpretace

Vektorová diferenciální rovnice

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{1.1}$$

kde vektorová funkce f je definovaná na nějaké oblasti Ω v prostoru $\mathbb{R}^n$, se nazývá *autonomní systém*. Často bývá $\Omega = \mathbb{R}^n$. V této kapitole budeme předpokládat, že f je spojitá n-vektorová funkce a že počáteční problém (1.1), $x(t_0) = x_0$ je jednoznačný pro libovolné $[t_0, x_0] \in \mathbb{R} \times \Omega$. Řešením budeme důsledně rozumět úplné řešení. Oblast Ω se nazývá *fázový prostor*, proměnná t se nazývá *čas*.

Řešení $x = \varphi(t)$ rovnice (1.1) můžeme interpretovat buďto jako graf funkce $x = \varphi(t)$ v prostoru $\mathbb{R} \times \Omega$ nebo jako křivku v prostoru Ω danou parametricky rovnicí $x = \varphi(t)$. Ve druhém případě se taková křivka nazývá *trajektorie systému* (1.1). Je to kolmý průmět grafu funkce $x = \varphi(t)$ z $\mathbb{R} \times \Omega$ do Ω.

1.1 Věta. *Buď $x = \varphi(t)$ řešení rovnice (1.1) splňující počáteční podmínku $\varphi(t_0) = x_0$. Pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ je též $x = \psi(t) := \varphi(t+c)$ řešením (1.1) a splňuje podmínku $\psi(t_0 - c) = x_0$. Je-li $\varphi(t)$ definované na intervalu (t_1, t_2), je $\psi(t)$ definované na intervalu $(t_1 - c, t_2 - c)$.*

Důkaz. Platí $\psi'(t) = \varphi'(t+c) = f[\varphi(t+c)] = f[\psi(t)]$ pro každé $t \in (t_1 - c, t_2 - c)$, takže ψ je řešením rovnice (1.1) a $\psi(t_0 - c) = \varphi(t_0) = x_0$. □

Poznámka. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy každou trajektorii rovnice (1.1) určit počáteční podmínkou v čase $t_0 = 0$.

1.2 Příklad. 1. Autonomní systém

$$x_1' = x_2,$$
$$x_2' = -x_1$$

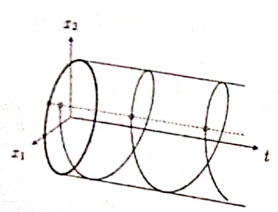
má fundamentální matici

$$\begin{bmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{bmatrix}.$$

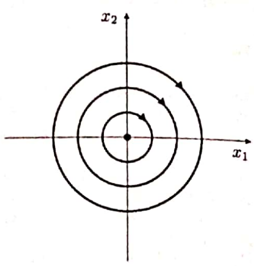
Vektorová funkce o složkách $x_1 = \sin t$, $x_2 = \cos t$ je tedy jedním z řešení daného systému pro $t \in (-\infty, \infty)$. Vektorová funkce o složkách $x_1 = \sin(t+c)$, $x_2 = \cos(t+c)$ je rovněž řešením pro $t \in (-\infty, \infty)$. Trajektorií každého z těchto dvou řešení je kružnice $x_1^2 + x_2^2 = 1$ v rovině x_1, x_2, takže obě trajektorie splývají. Poněvadž všechna řešení daného systému jsou tvaru

$$(x_1, x_2) = (C_1 \sin t + C_2 \cos t, C_1 \cos t - C_2 \sin t),$$
$$x_1^2 + x_2^2 = (C_1 \sin t + C_2 \cos t)^2 + (C_1 \cos t - C_2 \sin t)^2 = C_1^2 + C_2^2,$$

jsou všechny trajektorie daného systému kružnice se středem v počátku o poloměru $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ s výjimkou případu $C_1 = C_2 = 0$, kdy trajektorií je jediný bod (počátek fázového prostoru). Situace je znázorněna na obrázcích 6.1 a 6.2. Šipky na trajektoriích vyznačují směr toku času.



Obr. 6.1



Obr. 6.2

2. Uvažujme nyní autonomní systém

$$x_1' = 1,$$
$$x_2' = 0.$$

Integrací jednotlivých rovnic tohoto systému dostáváme obecné řešení $x_1 = C_1 + t$, $x_2 = C_2$. Trajektorie jsou tedy přímky rovnoběžné s osou x_1.

1.3 Věta. *Buďte φ, ψ řešení rovnice (1.1). Pak jejich trajektorie buďto splývají, nebo nemají ani jeden bod společný.*

Důkaz. Nechť např. $\varphi(t_1) = \psi(t_2)$. Označme $x(t) := \varphi(t + c)$, kde $c = t_1 - t_2$. Podle předcházející věty je x řešením (1.1) a $x(t_2) = \varphi(t_2 + t_1 - t_2) = \varphi(t_1) = \psi(t_2)$. Vzhledem k předpokladu jednoznačnosti řešení počátečního problému platí $x(t) \equiv \psi(t)$. Trajektorie řešení x a ψ tedy splývají. Poněvadž řešení φ a x mají tutéž trajektorii, trajektorie řešení φ a ψ splývají. □

1.4 Definice. Bod x_0 se nazývá *singulární bod* (*kritický bod*, *stacionární bod*, *rovnovážný bod*, *degenerovaná trajektorie*) rovnice (1.1), jestliže $f(x_0) = 0$. Trajektorie rovnice (1.1) se nazývá *cyklus*, jestliže je uzavřenou křivkou.

Bod x_0 je zřejmě singulárním bodem právě tehdy, když (1.1) má konstantní řešení $x(t) \equiv x_0$, $t \in (-\infty, \infty)$. V příkladu 1.2 se kromě trajektorií typu singulárního bodu a cyklu vyskytly také trajektorie, které lze charakterizovat tak, že samy sebe nikde neprotínají. Následující věta ukazuje, že kromě těchto tří zmíněných typů trajektorií se u autonomních systémů další typy trajektorií nemohou vyskytnout.

1.5 Věta. *Autonomní systém (1.1) může mít trajektorie trojího typu:*
1. Singulární body. Odpovídají konstantním řešením.
2. Uzavřené trajektorie (cykly). Odpovídají nekonstantním periodickým řešením.
3. Trajektorie, které samy sebe neprotínají.

Důkaz. Buď φ řešení rovnice (1.1) definované na $I = (a, b)$. Předpokládejme, že trajektorie řešení φ není typu 3. Pak existují $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$ tak, že $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Ukážeme nejprve, že v tomto případě řešení φ existuje pro všechna $t \in I$. Označíme-li $\psi(t) := \varphi(t + t_2 - t_1)$, je ψ řešení rovnice (1.1) definované na intervalu $(a - t_2 + t_1, b - t_2 + t_1)$. Protože $\psi(t_1) = \varphi(t_2) = \varphi(t_1)$, obě řešení musí splývat, takže $\psi(t) \equiv \varphi(t)$. Řešení φ, ψ musí mít stejný definiční obor (poněvadž jsou úplná), a to je možné jen tak, že $a = -\infty$, $b = \infty$. Platí tedy $I = \mathbb{R}$.

Číslo $T = t_2 - t_1$ je periodou řešení φ. Také každé číslo kT je periodou pro $k \in \mathbb{N}$. Množina P všech period funkce φ má tyto vlastnosti:

$$T \in P \Rightarrow -T \in P,$$
$$T_1, T_2 \in P \Rightarrow T_1 + T_2 \in P,$$
$$P \quad \text{je} \quad \text{uzavřená.}$$

Vskutku, je-li $\tau_k \to \tau$, $\tau_k \in P$, pak $\tau \in P$, neboť ze vztahu $\varphi(\tau_k + t) = \varphi(t)$ a ze spojitosti φ plyne $\varphi(\tau + t) = \varphi(t)$. Je tedy P uzavřená a mohou nastat dva případy:

1. P obsahuje nejmenší kladné číslo.
2. P obsahuje libovolně malá kladná čísla.

V prvním případě označme tuto nejmenší kladnou periodu τ. Ukážeme, že

$$P \cap (0, \infty) = \{k\tau : k \in \mathbb{N}\}.$$

Vskutku, buď $\omega \in P \cap (0, \infty)$. Pak existuje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tak, že $k\tau \leq \omega < (k+1)\tau$. Ale $\omega - k\tau$ je periodou a $0 \leq \omega - k\tau < \tau$. Poněvadž τ je nejmenší kladná perioda, je $\omega - k\tau = 0$, to jest $\omega = k\tau$ a $P \cap (0, \infty) \subseteq \{k\tau : k \in \mathbb{N}\}$. Opačná inkluze je zřejmá.

V druhém případě existuje posloupnost (τ_k) taková, že $\tau_k \in P$, $\tau_1 > \tau_2 > \cdots > \tau_k > \ldots$, $\lim \tau_k = 0$. Ukážeme, že libovolné kladné číslo τ je prvkem P. Vskutku, ke každému τ_k existuje $j_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tak, že $j_k\tau_k \leq \tau < (j_k + 1)\tau_k$, tedy $|\tau - j_k\tau_k| < \tau_k$. Ale $j_k\tau_k \in P$, $\lim j_k\tau_k = \tau$, tedy $\tau \in P$.

V prvním případě je trajektorie odpovídající řešení φ cyklem, přičemž řešení φ je periodické s nejmenší periodou τ. Druhý případ může nastat, jen když se jedná o degenerovanou trajektorii. □

2. Typy singulárních bodů v rovině

Buď dán autonomní systém dvou rovnic ve vektorovém tvaru

$$x' = f(x) \tag{2.1}$$

a předpokládejme existenci a jednoznačnost řešení každého počátečního problému. Singulární bod x_0 rovnice (2.1) se nazývá:

střed, když existuje ryzí okolí U bodu x_0 takové, že každým bodem $a \in U$ prochází jediná trajektorie, která je uzavřená a obsahuje ve svém vnitřku bod x_0;

ohnisko, když existuje ryzí okolí U bodu x_0 takové, že bod $x(t)$ trajektorie x vycházející z libovolného bodu $a \in U$ má tu vlastnost, že konverguje pro $t \to \infty$ nebo $t \to -\infty$ k x_0, a to tak, že velikost orientovaného úhlu vektoru $\overrightarrow{x_0\,x(t)}$ od nějakého pevného vektoru $\overrightarrow{x_0\,x_1}$ má nevlastní limitu;

uzel, když existuje ryzí okolí U bodu x_0 takové, že pro bod $x(t)$ trajektorie x vycházející z libovolného bodu $a \in U$ platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{t\to-\infty} x(t) = x_0,$$

přičemž velikost orientovaného úhlu vektoru $\overrightarrow{x_0\,x(t)}$ od nějakého pevného vektoru $\overrightarrow{x_0\,x_1}$ má konečnou limitu;

sedlo, když existuje jen konečný počet trajektorií $x = x(t)$ takových, že

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{t\to-\infty} x(t) = x_0.$$

Poznámka. Je-li $x_0 \neq 0$ singulární bod rovnice (2.1), lze posunutím $y = x - x_0$ transformovat (2.1) na rovnici $y' = f(y + x_0)$, která má singulární bod v počátku fázového prostoru $\mathbb{R}^2$. Touto transformací se nemění typ singulárního bodu.

Provedeme nyní klasifikaci singulárních bodů a popíšeme průběh trajektorií lineárních autonomních systémů ve fázovém prostoru $\mathbb{R}^2$.

3. Lineární autonomní systémy v rovině

Buď dán autonomní systém

$$x' = Ax, \tag{3.1}$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Je-li x řešením rovnice (3.1), je též τx, $\tau \in \mathbb{R}$, řešením této rovnice. Trajektorie odpovídající takovým řešením jsou tedy stejnolehlé se středem stejnolehlosti v počátku. Počátek je jediným singulárním bodem rovnice (3.1) právě tehdy, když $\det A \neq 0$, tj. právě tehdy, když 0 není kořenem charakteristické rovnice matice A

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \tag{3.2}$$

Jestliže $\det A = 0$, pak existuje singulární bod $v \neq 0$ rovnice (3.1). Rovnice (3.1) má v tomto případě nekonečně mnoho singulárních bodů. Je-li navíc $A \neq O$, jsou singulárními právě všechny body přímky $x = \tau v$, $\tau \in \mathbb{R}$. Je-li $A = O$, je každý bod fázového prostoru $\mathbb{R}^2$ singulární.

Z algebry je známo, že existuje vhodná reálná lineární transformace $x = Pw$ převádějící rovnici (3.1) na tvar

$$w' = Bw, \qquad B = P^{-1}AP. \tag{3.3}$$

Podle povahy kořenů μ, ν charakteristické rovnice matice A může být B tvaru

$$\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \Re(\mu) & \Im(\mu) \\ -\Im(\mu) & \Re(\mu) \end{bmatrix}.$$

První tvar odpovídá dvěma reálným různým kořenům μ, ν, druhý a třetí tvar dvojnásobnému kořenu μ. Je-li $|a_{12}| + |a_{21}| = 0$, nastane případ druhý, je-li $|a_{12}| + |a_{21}| \neq 0$, nastane případ třetí. Poslední tvar odpovídá případu nereálných komplexně sdružených kořenů μ, ν.

Určíme-li trajektorie rovnice (3.3), jsou trajektorie rovnice (3.1) dány rovnicí $x = Pw$, to jest, obdržíme je z nich lineární transformací, která geometricky představuje otočení, symetrii vzhledem k přímce a dilataci, a tudíž nemění typ singulárního bodu. Můžeme tedy vyšetřování průběhu trajektorií rovnice (3.1) nahradit vyšetřováním průběhu trajektorií rovnice (3.3) v okolí počátku. Označme za tím účelem u a v složky vektoru w.

Předpokládejme nejprve, že $\det A = 0$, $A \neq O$.

1. Má-li charakteristická rovnice (3.2) kořeny $\mu = 0$, $\nu \neq 0$, pak

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix},$$

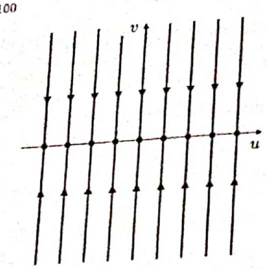
kde $\nu \neq 0$. Řešením autonomní rovnice (3.3) je vektorová funkce o složkách

$$u = u_0, \qquad v = v_0 \exp(\nu t),$$

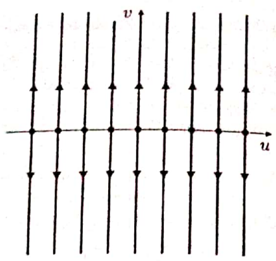
kde $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty. Singulárními body jsou zřejmě všechny body ležící v přímce $v = 0$. Odpovídají volbě $v_0 = 0$. Je-li $v_0 \neq 0$, jsou trajektoriemi otevřené polopřímky vycházející z bodu $[u_0, 0]$ a ležící v přímce $u = u_0$ (viz obr. 6.3 pro případ $\nu < 0$, a obr. 6.4 pro případ $\nu > 0$). Je-li $\mu \neq 0$ a $\nu = 0$, je

$$B = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Situace je stejná až na otočení o úhel $\pi/2$. Singulárními body jsou všechny body přímky $u = 0$ a ostatní trajektorie rovnice (3.3) jsou otevřené polopřímky rovnoběžné s přímkou $v = 0$.



Obr. 6.3



Obr. 6.4

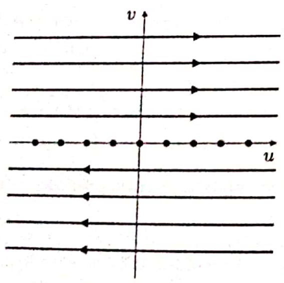
2. Má-li charakteristická rovnice (3.2) dvojnásobný kořen 0, je

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trajektorie rovnice (3.3) jsou určeny rovnicemi

$$u = u_0 + v_0 t, \qquad v = v_0.$$

Singulárními body jsou opět body přímky $v = 0$. Odpovídají volbě $v_0 = 0$. Je-li $v_0 \neq 0$, jsou trajektoriemi přímky procházející bodem $[u_0, v_0]$ rovnoběžné s přímkou $v = 0$ (viz obr. 6.5).



Obr. 6.5

Ve zbývající části tohoto odstavce budeme předpokládat det $A \neq 0$, takže rovnice (3.1) má jediný singulární bod v počátku fázového prostoru $\mathbb{R}^2$ a jsou-li μ a ν kořeny rovnice (3.2), pak je $\mu\nu \neq 0$.

1. Má-li charakteristická rovnice (3.2) reálné kořeny $\mu \neq \nu$, je

$$B = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}.$$

Řešením autonomní rovnice (3.3) je vektorová funkce o složkách

$$u = u_0 \exp(\mu t), \quad v = v_0 \exp(\nu t),$$

kde $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty. Je-li $u_0 = 0$ nebo $v_0 = 0$, jsou nedegenerované trajektorie otevřené polopřímky vycházející z počátku a ležící v přímce $u = 0$ nebo $v = 0$. Je-li $u_0 \neq 0 \neq v_0$, platí

$$\left(\frac{u}{u_0}\right)^{\nu} = e^{\mu\nu t} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\mu},$$

takže každou trajektorii rovnice (3.3) můžeme psát ve tvaru

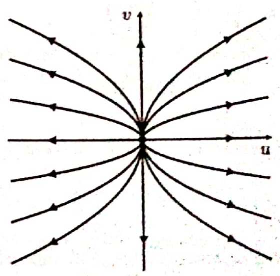
$$v = v_0 |u_0|^{-\nu/\mu} |u|^{\nu/\mu}. \tag{3.4}$$

1.1. Buď $0 < \nu < \mu$, takže $0 < \nu/\mu < 1$. Pro $t \to -\infty$ konverguje bod $w(t) =$ $[u(t), v(t)]$ k počátku a platí

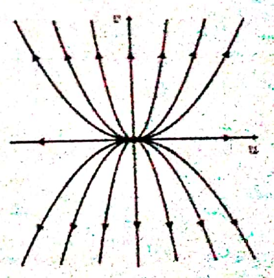
$$\lim_{t \to -\infty} \frac{v(t)}{u(t)} = \lim_{t \to -\infty} \frac{v_0 \nu e^{\nu t}}{u_0 \mu e^{\mu t}} = \begin{cases} \infty, & \text{leží-li } [u_0, v_0] \text{ v 1. nebo 3. kvadrantu,} \\ -\infty, & \text{leží-li } [u_0, v_0] \text{ v 2. nebo 4. kvadrantu.} \end{cases}$$

Počátek je tedy uzel (obr. 6.6).

1.2. Je-li $0 < \mu < \nu$, řešení jsou opět tvaru (3.4), je ovšem $\nu/\mu > 1$. Počátek je opět uzel (obr. 6.7).

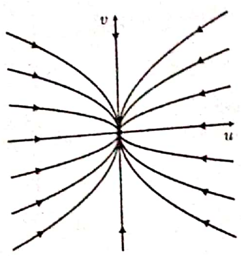


Obr. 6.6

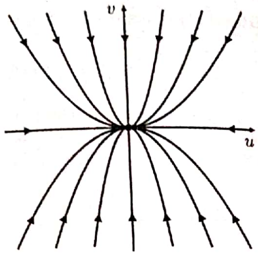


Obr. 6.7

1.3. Nechť $\mu < 0, \nu < 0, \mu \neq \nu$. Transformace $t \to -t$ převádí tento případ jeden z předcházejících. Průběh trajektorií je stejný, pohyb bodu $w(t)$ po trajekt je však opačný. Jedná se opět o uzel (obr. 6.8 a 6.9).

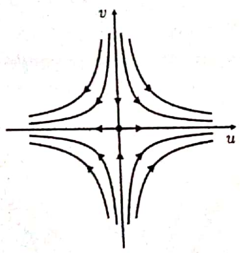


Obr. 6.8

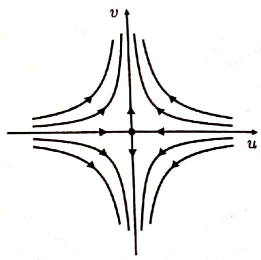


Obr. 6.9

1.4. Jsou-li μ a ν opačných znamének, je exponent ν/μ v (3.4) záporný. V počátku je sedlo. Průběh trajektorií je znázorněn na obr. 6.10 (případ $\mu > 0 > \nu$) a obr. 6.11 (případ $\nu > 0 > \mu$).



Obr. 6.10



Obr. 6.11

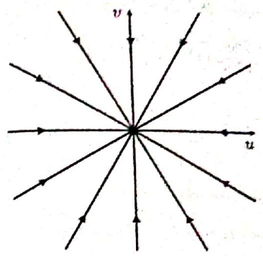
2. Má-li charakteristická rovnice (3.2) dvojnásobný kořen $\mu \neq 0$ a $|a_{12}|+|a_{21}| = 0$, je

$$B = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

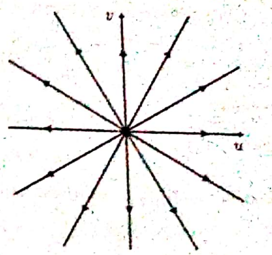
V tomto případě jsou nedegenerovanými trajektoriemi rovnice (3.3) polopřímky vycházející z počátku

$$u = u_0\, e^{\mu t}, \quad v = v_0\, e^{\mu t}, \qquad u_0, v_0 \in \mathbb{R}.$$

V počátku je uzel, situace je znázorněna na obr. 6.12 (případ $\mu < 0$) a na obr. 6.13 (případ $\mu > 0$).



Obr. 6.12



Obr. 6.13

3. Má-li charakteristická rovnice (3.2) dvojnásobný kořen $\mu \neq 0$ a $|a_{12}|+|a_{21}| \neq 0$, je

$$B = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Trajektorie rovnice (3.1) jsou určeny rovnicemi

$$u = e^{\mu t}(u_0 + v_0 t), \qquad v = v_0 e^{\mu t}.$$

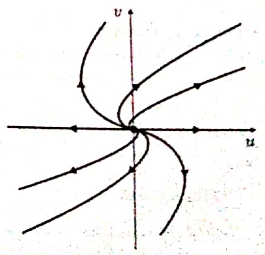
Je-li $v_0 = 0$, leží trajektorie v ose u. Je-li $v_0 \neq 0$, je

$$t = \frac{1}{\mu} \ln \frac{v}{v_0}$$

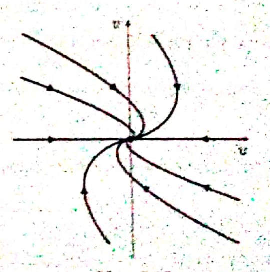
a rovnici trajektorií lze psát ve tvaru

$$u = \frac{v}{v_0}\Big(u_0 + \frac{v_0}{\mu} \ln \frac{v}{v_0}\Big).$$

Průběh trajektorií v okolí počátku, což je opět uzel, je znázorněn na obr. 6.14 ($\mu > 0$) a na obr. 6.15 ($\mu < 0$).



Obr. 6.14



Obr. 6.15

4. Má-li charakteristická rovnice (3.2) nereálné kořeny μ, ν, je

$$B = \begin{bmatrix} \Re(\mu) & \Im(\mu) \\ -\Im(\mu) & \Re(\mu) \end{bmatrix}.$$

Označme $\alpha = \Re(\mu)$, $\beta = \Im(\mu)$.

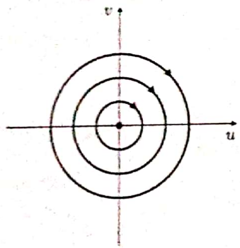
4.1. Nechť je $\alpha = 0$. Jedná se tedy o systém

$$u' = \beta v, \qquad v' = -\beta u,$$

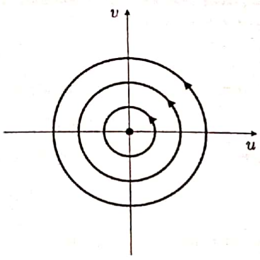
takže $u'' = -\beta^2 u$ a parametrické rovnice trajektorií jsou

$$u = c_1 \cos(\beta t + c_2), \qquad v = -c_1 \sin(\beta t + c_2), \qquad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nedegenerovanými trajektoriemi jsou tedy kružnice $u^2 + v^2 = c_1^2$ a počátek je střed – obr. 6.16 ($\beta > 0$) a obr. 6.17 ($\beta < 0$).



Obr. 6.16



Obr. 6.17

4.2. Je-li $\alpha \neq 0$, jedná se o systém

$$u' = \alpha u + \beta v, \qquad v' = -\beta u + \alpha v.$$

Zavedením polárních souřadnic $u = r \cos\varphi$, $v = r \sin\varphi$, obdržíme

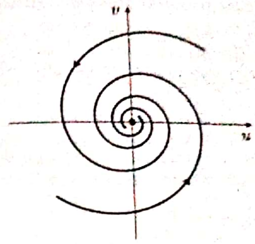
$$rr' = uu' + vv' = \alpha r^2,$$

$$\varphi' = \frac{v'u - vu'}{u^2 + v^2} = -\beta.$$

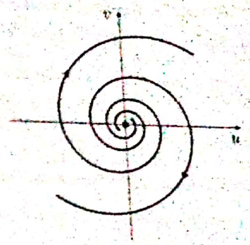
Řešením tohoto systému jsou funkce

$$r = r_0 e^{\alpha t}, \qquad \varphi = \varphi_0 - \beta t, \quad \text{kde } r_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}.$$

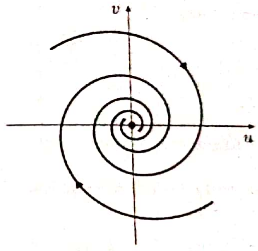
Pro $r_0 > 0$ to jsou parametrické rovnice logaritmických spirál, takže počátek je ohnisko. Situace je znázorněna na obr. 6.18 ($\alpha < 0$, $\beta < 0$), obr. 6.19 ($\alpha > 0$, $\beta > 0$), obr. 6.20 ($\alpha < 0$, $\beta > 0$) a na obr. 6.21 ($\alpha > 0$, $\beta < 0$).



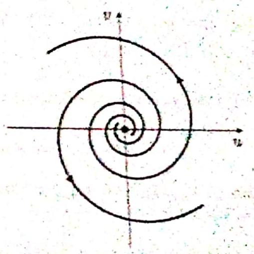
Obr. 6.18



Obr. 6.19



Obr. 6.20



Obr. 6.21

Poznámka. Výsledky tohoto odstavce lze shrnout takto.
Označme

$$\Delta := \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$D := (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21},$$

takže D je diskriminant charakteristické rovnice matice A.

Jednotlivé typy singulárního bodu $[0, 0]$ rovnice (3.1) jsou charakterisovány takto[1]:

Ohnisko: $\Delta > 0$, $\quad D < 0$, $\quad a_{11} + a_{22} \neq 0$.
Střed: $\Delta > 0$, $\quad D < 0$, $\quad a_{11} + a_{22} = 0$.
Uzel: $\Delta > 0$, $\quad D \geq 0$.
Sedlo: $\Delta < 0$.

[1] V případě $\Delta = 0$, $A \neq O$ vyplňují singulární body rovnice (3.1) přímku procházející počátkem. Je-li navíc $a_{11} + a_{22} \neq 0$, jsou ostatní trajektorie rovnice (3.1) otevřené, vzájemně rovnoběžné polopřímky vycházející z bodů této přímky a svírající s ní stejný nenulový úhel. Je-li $a_{11} + a_{22} = 0$, jsou ostatní trajektorie rovnice (3.1) přímky rovnoběžné s přímkou tvořenou singulárními body.