Masarykova univerzita • Přírodovědecká fakulta

Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka

NEKONEČNÉ ŘADY
S PROGRAMEM MAPLE

Brno, 2002

Obsah

Seznam obrázků

Seznam animací

Taylorovy rozvoje

Fourierovy rozvoje

Předmluva

Když jsme v roce 1999 vydávali první CD-ROM *Matematická analýza s programem Maple*, uvedli jsme, že v příštích letech plánujeme pokračovat v edici dalšími partiemi matematické analýzy. Jsme rádi, že díky finanční podpoře FRVŠ můžeme tento záměr realizovat a studentům nabídnout další díl, tentokrát věnovaný tématu *Nekonečné řady*.

Tento CD-ROM je učebním textem nového typu využívající možností současné výpočetní techniky. Ukazuje moderní způsob výuky matematické analýzy, kdy prostřednictvím počítačových technologií se student učí matematickou analýzu a naopak.

Používaná symbolika je shodná se symbolikou užívanou v [13, 14]; zejména symbol $\mathbb{N}$ označuje množinu všech přirozených čísel, symbol $\mathbb{Z}$ označuje množinu všech celých čísel, symbol $\mathbb{R}$ množinu všech reálných čísel a $\mathbb{R}^*$ značí rozšířenou množinu reálných čísel, tj. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Stejně jako Diferenciální počet funkcí více proměnných jsou i Nekonečné řady tématem vhodným pro počítačově podporovanou výuku. Zejména rozvoje funkcí do mocninných a Fourierových řad se programem Maple velmi pěkně graficky ilustrují.

Při výkladu probírané problematiky pomocí Maplu jsme se snažili o dodržování následujícího postupu: Nejdříve je problém řešen „krok za krokem“ tak, jak bychom postupovali při řešení pomocí „tužky a papíru“, Maple je používán pouze k dílčím výpočtům. Pokud je to dále možné, následuje zobecnění a automatizace řešení problému pomocí Mapleovského programovacího jazyka. Tyto části jsou v textu označeny pomocí , další příklady je pak možno nalézt v odpovídajících zápisnících v adresáři Maple. Při tvorbě nových procedur byl důraz kladen především na jejich jednoduchost – tak, aby je byli studenti schopni psát v rámci cvičení z Maplu. Často je tedy potlačováno testování koreknosti zadávání vstupních parametrů, důraz je především kladen na vlastní algoritmus výpočtu. Komentáře v zápisnících jsou psány bez diakritiky, protože Maple zatím není lokalizován v českém jazyce. Mapleovské zápisníky jsou určeny pro verzi Maple 7, většinou jsou však použitelné i ve verzi Maple V 5.1.

Ve srovnání s prvním CD-ROMem přinášíme dvě novinky v počítačovém zpracování. První novinkou jsou animace, pomocí nichž lze pohyblivě znázorňovat rozvoje funkcí do nekonečných řad. Věříme, že tyto animace pomohou studentům pochopit význam mocninných a Fourierových řad a rozdíl mezi nimi.

Druhou novinkou je videozáznam přednášky, sloužící k repetitoriu daného tématu. Obsahuje tři sekvence, přehled základní teorie o nekonečných číselných řadách, ukázku řešení několika typických příkladů a přehled základní teorie o řadách funkcí.

Základem pro vznik CD-ROMu se stal učební text Došlá Z., Novák V.: *Nekonečné řady*, MU 1999 a 2002 a Mapleovské zápisníky s ukázkami řešení příkladů a novými procedurami. Pro čtenáře, kteří licenci Maplu nevlastní přinášíme i rozšířené HTML verze některých zápisníků, které je možno číst libovolným z webových prohlížečů. Pomocí těchto prohlížečů je možno přehrávat i všechny uvedené animace.

Vlastní text je opět uložen ve formátu PDF (Portable Document Format), který je standardem pro elektronickou publikační činnost a je nezávislý na platformě. Kromě jiného umožňuje prostřednictvím křížových odkazů rychle vyhledávat souvislosti napříč celým textem. Text se nachází na CD ve dvou variantách; design první je optimalizován pro čtení na obrazovce obvyklého barevného monitoru, design druhé verze (kterou čtete) je vhodný pro tisk na formát A4. Nově přidáváme odkazy na videosekvence (jsou na CD-ROM v adresáři `video`) a na PDF soubory s animacemi (vyžadují však Acrobat Reader verze alespoň 5).

Videonahrávka byla pořízena s pomocí laboratoře LEMMA Fakulty informatiky MU v Brně. I když jde o simulovanou přednášku, byla natáčena naostro bez opakování záběrů. Nese proto prvky autentičnosti, včetně několika nepřesností odborných a jazykových. Uvádíme toto video s přesvědčením, že učební text oživí a posune vývoj podobných učebních textů opět o krůček dopředu. Pro lepší čitelnost textu napsaného během přednášky na tabuli jsou tyto texty uvedeny v kapitole 9 na straně 159.

CD-ROM je určen pro posluchače bakalářského studia matematiky, fyziky, informatiky, a dále všem zájemcům o výuku matematické analýzy s využitím počítače a uživatelům CAS systému Maple. Spojení textu, grafiky, počítačových vstupů, výstupů, animací a videonahrávky se shrnutím základních pojmů probíraného tématu by mělo vytvořit prostředí sloužící k maximálně efektivnímu zvládnutí probírané problematiky.

CD-ROM dále obsahuje inovovanou verzi textu Diferenciální počet více proměnných, a to zase ve dvou verzích: verzi optimalizovanou pro čtení na obrazovce a verzi optimalizovanou pro tisk

Některé materiály z CD-ROMu jsou uloženy také na webové stránce projektu http://www.math.muni.cz/˜plch/nkpm/.

Závěrem bychom rádi poděkovali studentům Přírodovědecké fakulty P. Křížovi a K. Šrotovi za Mapleovské zápisníky k mocninným a Fourierovým řadám, studentům Fakulty informatiky P. Kynčlové za animace k části Diferenciální počet funkcí více proměnných, M. Liškovi, V. Holerovi, P. Hromkovi a kolegovi R. Haklovi za pomoc při natáčení a M. Rollerovi a T. Závodnému za pomoc při střihu a zpracování videa. Dále děkujeme kolegyni L. Langerové za účinkování při natáčení přednášky a panu A. Kalinovi za vytvoření instalačního programu a grafickou úpravu instalační brožurky CD-ROMu.

Tento CD-ROM vznikl za podpory Fondu rozvoje VŠ v rámci řešení projektu č. 801/2002.

Brno, prosinec 2002 Autoři

Kapitola 1

Nekonečné číselné řady – základní pojmy

Teorie nekonečných číselných řad vznikla ve druhé polovině 17. století spolu s utvářením infinitezimálního počtu. Mnohé myšlenky zrály řadu století, než se přiblížily dnešní podobě. V průběhu vývoje se někteří matematikové dopustili při počítání s řadami omylů, zejména v době, kdy nebyl pojem konvergence řady konstituován, a také v době, kdy panovala jakási hrůza z nekonečna. Tímto problémem se od počátku zabývali nejenom matematikové, ale i filozofové.

Například Zenon z Eleje (490–430 př.n.l.) považoval za nemožné, že by nekonečný součet kladných čísel mohl být konečné číslo; připomeňme jeho aporii[1] *Achilles a želva*: „Rychlonohý Achilles nikdy nedožene želvu, jestliže se želva nachází v nějaké vzdálenosti před ním." Se součty nekonečných geometrických řad již pracoval (aniž používal dnešní symboliku) Archimedes (287–212 př. n. l.), když určoval kvadraturu paraboly; první nekonečnou řadu, která nebyla geometrická, sečetl na základě fyzikálních úvah až ve středověku (kolem roku 1350) R. Swineshead.

V celé historii matematiky byla snaha zodpovědět dvě základní otázky pro počítání s nekonečnými číselnými řadami:

Jak sečíst nekonečnou (přesněji spočetnou) množinu čísel?

Platí pro nekonečné součty podobné zákony jako pro konečné součty, zejména zákon distributivní, asociativní a komutativní?

[1] aporie – slepá ulička rozumu

Odpověď na obě otázky ukážeme v průběhu prvních čtyř kapitol, které jsou věnovány nekonečným číselným řadám. Cílem první kapitoly je zavést pojem součet řady a ukázat některé základní operace s číselnými řadami.

1.1. Součet řady

Ze střední školy je dobře známa nekonečná geometrická řada. Postup použitý při určení jejího součtu, tj. utvoření tzv. částečných součtů a provedení limitního přechodu, je návodem pro obecnou definici.

Definice 1.1. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{nebo} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1.1}$$

nazýváme *nekonečnou číselnou řadou*. Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_1 = a_1,\; s_2 = a_1 + a_2, \dots,\; s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \dots,$$

nazýváme *posloupnost částečných součtů* této řady.
Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* a má součet s. Neexistuje-li vlastní limita $\lim s_n$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Nekonečná řada je tedy symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nebo $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, kde $\{a_n\}$ je daná posloupnost. K tomuto symbolu je přiřazena posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$. Prvky posloupnosti $\{a_n\}$ nazýváme členy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde a_n je n-tý člen. Číslo s_n nazýváme n-tým částečným součtem této řady.

V případě, kdy řada diverguje, rozlišujeme tři případy:

- ▷ Je-li $\lim s_n = \infty$, říkáme, že řada určitě diverguje k $+\infty$;
- ▷ Je-li $\lim s_n = -\infty$, říkáme, že řada určitě diverguje k $-\infty$;
- ▷ Jestliže $\lim s_n$ neexistuje, říkáme, že řada osciluje.

Má-li konvergentní řada $\sum a_n$ součet s, píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Je-li řada divergentní k $\pm\infty$, píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, případně $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

Příklad 1.1. Vyšetřete, kdy konverguje nekonečná geometrická řada

$$a + aq + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \qquad \text{kde } a \neq 0,\, q \neq 0,$$

a určete její součet.

Řešení. Postupujeme podle Definice 1.1: určíme s_n a provedeme limitní přechod.

a) Nechť $q = 1$. Pak $s_n = na$ a platí $\lim s_n = \lim na = \pm\infty$, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} a$ je divergentní.

b) Nechť $q = -1$. Řada má tvar $a + (-a) + \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots$, takže částečný součet je

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{pro sudé } n, \\ a & \text{pro liché } n. \end{cases}$$

Posloupnost $\{0, a, 0, a, \dots\}$ nemá limitu, proto je tato řada oscilující.

c) Nechť $|q| \neq 1$. Platí $s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1}$. Užitím vztahu

$$(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) = 1-q^n$$

dostaneme

$$s_n = a(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Uvažujme následující případy:

pro $|q| < 1$ je $\lim q^n = 0$, proto $\lim s_n = \frac{a}{1-q}$;
pro $q > 1$ je $\lim q^n = \infty$, proto $\lim s_n = \pm\infty$;
pro $q < -1$ limita $\lim q^n$ neexistuje.

Proto je geometrická řada pro $|q| \geq 1$ divergentní a pro $|q| < 1$ konvergentní. V tomto případě je její součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

Příklad 1.2. Určete součet řady:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

b) $$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

e) $$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} + \cdots$$

Řešení. Ve všech případech postupujeme podle Definice 1.1: určíme n-tý částečný součet s_n dané řady a provedením limitního přechodu určíme její součet.

a) Výraz pro člen a_n rozložíme v součet parciálních zlomků $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Pak

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}\,,$$

a proto

$$s = \lim s_n = \lim\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

b) Postupujeme obdobně: provedeme rozklad členu a_n v součet parciálních zlomků, tj.

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1}\,.$$

Z rovnice $1 = (3n-2)B + (3n+1)A$ plyne $B = -\frac{1}{3}$, $A = \frac{1}{3}$, tj.

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right).$$

Pak

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right), \end{aligned}$$

a proto

$$s = \lim s_n = \lim \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}.$$

Ukážeme si nyní řešení s využitím programu Maple.

```
> rada:=Sum(1/((3*n-2)*(3*n+1)), n=1..infinity);
```

$$rada := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3\,n-2)\,(3\,n+1)}$$

Rozklad členu a_n v součet parciálních zlomků provedeme pomocí příkazu `convert`:

```
> convert(op(1,rada),'parfrac',n);
```

$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{3\,n-2} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{3\,n+1}$$

Pro zjednodušení určování n-tého částečného součtu zadané řady vytvoříme proceduru `poslcass(expr,down,k)`, kde `expr` je výraz odpovídající a_n, `down` je dolní mez řady a `k` je přirozené číslo, udávající kolik členů posloupnosti částečných součtů si přejeme vypsat. Procedura vypíše prvních k členů posloupnosti částečných součtů, její n-tý člen a pokud je to možné vrátí součet zadané řady.

```
> poslcass := proc (a, b, d) local i, j, s, e;
> s := 0; j := 0;
> for i from b to d+b-1 do
> j := j+1; s := s+eval(subs(n = i,a));
> lprint(evaln(s[j]) = s)
> od;
> e := sum(a,n = b .. n);
> lprint(evaln(s[n]) = e);
> Sum(a,n = b .. infinity) =
> limit(e,n = infinity)
> end:
```

Použití této procedury při řešení uvedeného příkladu dává tento výstup:

```
> poslcass(op(1,rada),1,5);

s[1] = 1/4

s[2] = 2/7

s[3] = 3/10

s[4] = 4/13

s[5] = 5/16

s[n] = 1/3-1/3/(3*n+1)
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3\,n-2)\,(3\,n+1)} = \frac{1}{3}$$

Pro kontrolu výpočtu můžeme použít i příkaz `sum`.

```
> Sum(1/((3*n-2)*(3*n+1)), n=1..infinity)=
> sum(1/((3*n-2)*(3*n+1)), n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3\,n-2)\,(3\,n+1)} = \frac{1}{3}$$

Pro vykreslení grafu posloupnosti částečných součtů můžeme použít proceduru `sumplots(Sum(rada, n=a..b))`, viz Obr. 1.1.

```
> sumplots := proc (rada)
> local term, n, a, b, psum, m, points,
> i, c, sn, p1, p2;
> if nargs = 2 then c := args[2]
> else c := 0 fi;
> if typematch(rada,(’Sum’)(term::algebraic,
> n::name = a::integer .. b::integer))
> then psum :=‘@‘(evalf,
> unapply(Sum(term,n = a .. a+m-1),m));
> points := [seq([[i, psum(i)+c],
> [i+1, psum(i)+c]], i = 1 .. b-a+1)];
> points := map(op,points);
> p1 := PLOT(CURVES(points),AXESLABELS(n,”s[n]”));
> sn := evalf(c+sum(term,n = a .. infinity))
> else
> ERROR(”expecting a Sum structure as input”) fi;
> if sn < infinity then
> p2 := plot(sn,n = a .. b,linestyle = 4);
> display({p2, p1})
> else p1 fi
> end:
> sumplots(Sum(op(1,rada),n=1..20));
```

c) Platí

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n},$$

odkud po vydělení dvěma plyne

$$\frac{s_n}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}}\,.$$

Odečtením druhé rovnice od první dostaneme

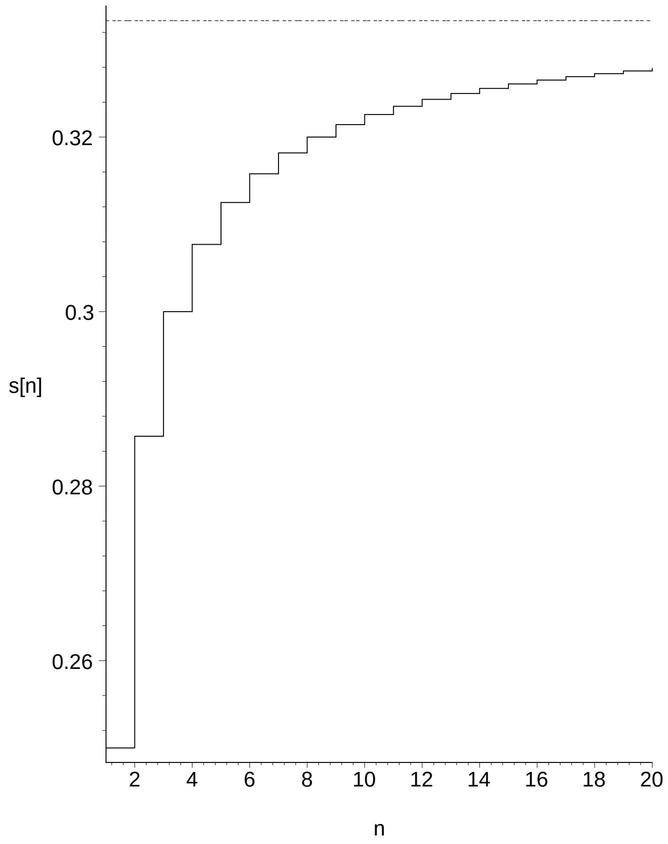
$$\frac{s_n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}},$$

tj.

$$s_n = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}\right).$$

Jelikož

$$\lim\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1, \quad \lim \frac{n}{2^{n+1}} = 0,$$



Obr. 1.1: Posloupnost částečných součtů řady $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

je součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \lim s_n = 2.$$

Jiný způsob určení součtu této řady ukážeme v Příkladu 6.3 pomocí součtu mocninné řady. Z historického hlediska je tato řada první negeometrickou řadou, u které byl určen její součet. Určil ho středověký matematik Richard Swineshead v knize *Liber calculationum* napsané kolem roku 1350, když řešil tuto fyzikální úlohu: *Jaká je průměrná rychlost v hmotného bodu s počáteční rychlostí v_0 v časovém intervalu $t \in [0, 1]$, který se pohybuje takto: během první poloviny časového intervalu konstantní rychlostí, během další čtvrtiny intervalu rychlostí, která je dvojnásobkem počáteční rychlosti, během následující osminy intervalu se pohybuje rychlostí, která je trojnásobkem počáteční rychlosti atd. až do nekonečna.*

Využijeme-li výše odvozený součet řady, dostaneme

$$v = \frac{s}{t} = s_1 + s_2 + \cdots = v_0.\frac{1}{2} + 2v_0.\frac{1}{4} + \cdots = v_0\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots\right) = 2v_0\ ,$$

tj. průměrná rychlost během celého časového intervalu se bude rovnat dvojnásobku počáteční rychlosti.

d) Platí

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1\\
a_2 &= \sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}\\
a_3 &= \sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}\\
&\vdots\\
a_{n-2} &= \sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}\\
a_{n-1} &= \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\\
a_n &= \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}
\end{aligned}$$

Z uvedeného schématu je zřejmé, že $s_n = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$, a proto

$$\begin{aligned}
s &= \lim_{n\to\infty} s_n = 1 - \sqrt{2} + \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) =\\
&= 1 - \sqrt{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 1 - \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

e) Pro $|x| < 1$, $|y| < 1$ platí vztah

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

Užitím tohoto vztahu postupně dostáváme

$$s_2 = a_1 + a_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{16}} = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3.18}} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$$

$$\vdots$$

$$s_n = s_{n-1} + a_n = \operatorname{arctg} \frac{n-1}{n} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{n-1}{n} + \frac{1}{2n^2}}{1 - \frac{n-1}{2n^3}} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{n(2n^2 - 2n + 1)}{2n^3 - n + 1} = \operatorname{arctg} \frac{n(2n^2 - 2n + 1)}{(2n^2 - 2n + 1)(n + 1)} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}.$$

Součet řady je

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Příklad 1.3. Vyjádřete ve tvaru zlomku v základním tvaru číslo $0{,}2\overline{15}$.

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} 0{,}2\overline{15} &= \frac{2}{10} + \left(\frac{15}{10^3} + \frac{15}{10^5} + \cdots \right) = \frac{2}{10} + \frac{15}{10^3} \left(1 + \frac{1}{10^2} + \cdots \right) = \\ &= \frac{2}{10} + \frac{15}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{1}{5} + \frac{15}{10 \cdot 99} = \frac{1}{5} + \frac{1}{66} = \frac{71}{330}. \end{aligned}$$

Následující věta udává nutnou podmínku konvergence řady.

Věta 1.1. *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Důkaz. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Tedy $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$, a protože $a_n = s_n - s_{n-1}$, plyne odtud $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$. □

Je třeba si uvědomit, že opak této věty neplatí. Je-li totiž pro řadu splněna podmínka $\lim a_n = 0$, pak z ní konvergence řady ještě neplyne. Tuto skutečnost ilustruje následující příklad.

Příklad 1.4. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se nazývá *harmonická*. V této řadě je každý člen harmonickým průměrem dvou sousedních členů, tj. platí

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}{2}.$$

Řada splňuje nutnou podmínku konvergence, neboť $\lim \frac{1}{n} = 0$. Ukažme, že je tato řada divergentní. K tomuto účelu provedeme následující odhady:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1\\
s_2 &= 1+\frac{1}{2}\\
s_4 &= s_2+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > s_2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1+2.\frac{1}{2}\\
s_8 &= s_4+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > 1+\frac{2}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 1+\frac{3}{2}\\
s_{16} &= s_8+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16} > 1+\frac{3}{2}+\frac{1}{16}+\\
&\quad +\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} = 1+\frac{4}{2}\\
&\ \vdots\\
s_{2^n} &> 1+\frac{n}{2}
\end{aligned}$$

Posloupnost $\{s_n\}$ je rostoucí, proto má buď vlastní limitu nebo nevlastní limitu ∞. Tutéž limitu má i vybraná posloupnost $\{s_{2^n}\}$; avšak z nalezeného odhadu plyne $s_{2^n} \to \infty$, a proto také $\lim s_n = \infty$. Proto harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ určitě diverguje.

Jak ukážeme později, divergenci této řady lze dokázat velmi jednoduše pomocí integrálního kritéria.

Harmonická řada byla první řadou, u níž byla poprvé ukázána divergence řady. Učinil to právě uvedeným způsobem francouzský matematik Nicole Oresme (1323–1382).

Bezprostředně z Definice 1.1 plyne tato věta:

Věta 1.2. *Nechť $p \in N$. Řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ současně buď konvergují nebo divergují. Jestliže konvergují, pak platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n.$$

Poznámka 1.1. Z předcházející věty plyne, že na konvergenci, resp. divergenci řady nemá vliv chování konečného počtu jejích členů. Proto budeme užívat tuto úmluvu:

▹ pokud nějaký předpoklad nemusí platit pro konečný počet členů, budeme říkat, že platí pro *skoro všechna n*, tj. platí až od jistého indexu počínaje;

▷ pokud budeme vyšetřovat konvergenci (divergenci) řady, budeme místo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ psát jen $\sum a_n$.

Nutnou a postačující podmínkou konvergence řady je následující věta, kterou budeme používat v dalších důkazech; k praktickým výpočtům není příliš vhodná.

Lemma 1.1 (Cauchyovo-Bolzanovo kritérium konvergence).
Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní právě tehdy, když posloupnost jejích částečných součtů je cauchyovská, tj. pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a libovolné $m \in \mathbb{N}$ platí

$$|s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon.$$

Důkaz. Plyne z Definice 1.1 a z úplnosti prostoru $\mathbb{R}$, což znamená, že každá posloupnost v $\mathbb{R}$ je konvergentní právě tehdy, když je cauchyovská (viz např. [3]). □

1.2. Operace s číselnými řadami

Zdrojem omylů mnoha matematiků byla skutečnost, že s nekonečnými součty nelze zacházet jako s konečnými součty. Uveďme příklad z historie: italský matematik Guido Grandi (1671–1742) uvažoval řadu

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ ;$$

dnes se tato řada nazývá *Grandiho řada*. Tato řada diverguje, protože $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1, \ldots$, tj. limita s_n neexistuje.

Danou řadu lze uzávorkovat dvojím způsobem a dostaneme tyto řady:

▷ řada $1 + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + \cdots$ konverguje, neboť $s_n = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $s = \lim s_n = 1$;

▷ řada $[1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \cdots$ konverguje, neboť $s_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $s = \lim s_n = 0$.

Jedná se o tři různé řady, kde první diverguje a druhé dvě konvergují, neboli uzávorkováním se porušila divergence řady.

Grandiho výpočet byl následující:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = \\ &= 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1 - 0 - 0 - 0 - \cdots = \\ &= 1, \end{aligned}$$

což si Grandi vyložil jako symbol stvoření světa bohem z ničeho. To vyvolalo bouřlivou polemiku, které se kromě Grandiho zúčastnil Leibniz, Nicolaus Bernoulli a jiní. V těchto diskusích se upřesňovaly pojmy součet nekonečné číselné řady, konvergence a divergence těchto řad. Grandi se dopustil dvou omylů: zkoumaná řada je divergentní, proto nemá konečný součet a kromě toho při svém výpočtu použil asociativní zákon, který obecně pro nekonečné řady neplatí.

Základní operací s nekonečnými řadami je součet dvou konvergentních řad:

Věta 1.3. *Buďte $\sum a_n$, $\sum b_n$ konvergentní řady a nechť $\sum a_n = s$, $\sum b_n = t$. Pak je konvergentní i řada $\sum(a_n + b_n)$ a platí $\sum(a_n + b_n) = s + t$.*

Důkaz. Označme $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$, $\{t_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum b_n$, $\{w_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum(a_n + b_n)$. Pak je $\lim s_n = s$, $\lim t_n = t$ a $w_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = s_n + t_n$. Odtud plyne $\lim w_n = \lim(s_n + t_n) = s + t$, tj. $\sum(a_n + b_n) = s + t$. □

Poznámka 1.2. Nechť $\sum a_n = s$, $\sum b_n = t$ jsou konvergentní řady a nechť $a_n \leq b_n$ pro všechna n. Pak $s \leq t$. Vskutku, pro posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}$ a $\{t_n\}$ těchto řad platí $s_n \leq t_n$ pro všechna n, a proto i limita $s \leq t$.

Následující větu můžeme chápat jako analogii distributivního zákona pro konečné součty.

Věta 1.4. *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak pro libovolné $k \in \mathbb{R}$ konverguje též řada $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Naopak, konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$, kde $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz. Nechť $\sum a_n$ konverguje, $\sum a_n = s$. Označíme-li $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$, $\{t_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum ka_n$, je $\lim s_n = s$ a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $t_n = ka_1 + ka_2 + \dots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = ks_n$. Odtud plyne $\lim t_n = ks$, tj. $\sum ka_n = ks$.

Nechť naopak konverguje $\sum ka_n$ a $k \neq 0$. Podle již dokázané první části věty pak konverguje řada $\sum \frac{1}{k}(ka_n) = \sum a_n$. □

Poznámka 1.3. Tvrzení Věty 1.3 lze zřejmě úplnou indukcí rozšířit na libovolný konečný počet sčítanců. Navíc lze podle Věty 1.4 nahradit součet uvažovaných řad jejich libovolnými lineárními kombinacemi.

Z konvergence řady $\sum(a_n + b_n)$ však naopak neplyne konvergence řad $\sum a_n$, $\sum b_n$, jak ukazuje příklad řad $\sum(-1)^{n-1}$, $\sum(-1)^n$.

Příklad 1.5. Dokažte konvergenci a najděte součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5.4^n - 3^{n+1}}{6^n}. \tag{1.2}$$

Řešení. Obě řady $\sum \frac{4^n}{6^n} = \sum(\frac{2}{3})^n$, $\sum \frac{3^n}{6^n} = \sum(\frac{1}{2})^n$ konvergují a jejich součet je

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Podle Věty 1.3 a 1.4 je konvergentní i řada (1.2) a její součet je roven $s = 5 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 9$.

Z příkladu Grandiho řady je zřejmé, že mezi členy nekonečné číselné řady nelze libovolně rozmístit závorky. Pouze v případě konvergentní řady můžeme sdružovat její členy, aniž se změní její součet. Tato skutečnost je zformulována v následující větě, která bývá nazývána asociativním zákonem pro konvergentní řady.

Věta 1.5. *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a nechť $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Položme $n_0 = 0$ a pro $k \in \mathbb{N}$ označme*

$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}.$$

Pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Důkaz. Označíme-li $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$, $\{t_k\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum b_k$, pak platí $t_k = s_{n_k}$, takže posloupnost $\{t_k\}$ je vybrána z posloupnosti $\{s_n\}$. Podle věty o vybraných posloupnostech (viz např. [13]) posloupnost $\{t_k\}$ konverguje a platí $\lim t_k = \lim s_n$, tj. $\sum b_k = \sum a_n$. □

Poznámka 1.4. Asociativní zákon znamená zákon o sdružení – v řadě můžeme jednotlivé členy sdružovat (uzávorkovat), aniž se změní její součet. Tedy Větu 1.5 lze vyslovit takto: Konverguje-li řada $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, pak konverguje i řada $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots$ a má týž součet. Obrácené tvrzení však neplatí. Z konvergence řady $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots$ obecně neplyne konvergence řady $a_1 + a_2 + \cdots$, jak ukazuje úvodní příklad o Grandiho řadě.

Analogie třetího, komutativního zákona o záměně, resp. o přerovnávání členů řady, obecně pro konvergentní řady neplatí. Jak ukážeme v Kapitole 3, k jeho platnosti je třeba silnější vlastnost řady, tzv. absolutní konvergence.

Cvičení

1.1. Určete součet těchto řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+3)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}}\right)$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^{2n-1}} + \frac{2}{4^{2n}}\right)$

1.2. Vyjádřete ve tvaru zlomku v základním tvaru:

a) $-0,\overline{12}$ b) $0,53\overline{9}$

1.3. Rozhodněte, zda konvergují tyto řady:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} n}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$

1.4. S využitím nekonečné geometrické řady řešte rovnice v $\mathbb{R}$:

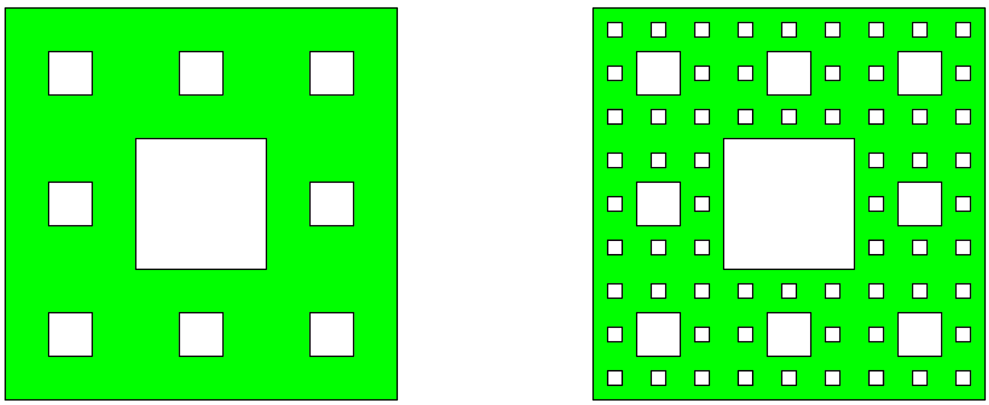
a) $\log x + \log \sqrt{x} + \log \sqrt[4]{x} + \log \sqrt[8]{x} + \cdots = 2$

b) $1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \cdots = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x}$

1.5. Do čtverce o délce strany 2 je vepsán čtverec, jehož strany jsou spojnicemi středů stran daného čtverce. Do vepsaného čtverce je stejným způsobem vepsán další čtverec atd. Vypočítejte součet obvodů a součet obsahů všech takovýchto čtverců.

1.6. Vypočtěte obsah obrazce utvořeného z nekonečně mnoha obdélníků, jestliže se délky jejich vodorovných stran zmenšují v poměru 4 : 1 a délky jejich svislých stran se zvětšují v poměru 1 : 2., přičemž obsah výchozího obdelníka je 48 cm^2. (Tuto úlohu řešil N. Oresme ve svém traktátu *O konfiguraci kvalit*, kde naznačil konstrukce útvarů, které mají nekonečné rozměry, ale konečný obsah).

1.7. Určete obsah následujícího obrazce (tzv. *Sierpińského koberec*): Jednotkový čtverec rozdělíme na devět shodných čtverců a odstraníme vnitřek prostředního čtverce. Každý ze zbývajících čtverců rozdělíme znovu na devět shodných čtverečků a znovu odstraníme v každém z nich jeho střední čtvereček. Po třetím kroku takové operace dostaneme útvar zobrazený na Obrázku 1.2. Když tuto operaci prodloužíme do nekonečna, dostaneme útvar, který se nazývá Sierpińského koberec.



Obr. 1.2: Sierpińského koberec pro $n = 2$ a $n = 3$

Sierpińského koberec lze v Maplu vykreslit pomocí procedury `sierpkob(n)`, kde parametr `n` udává úroveň iterace.

```
>  sierpkob:=proc(n)
>  local x,y,d,i,j;
>  global s,kr,sez,poms,kre,sq;
>  s:=[x,y],[x+d,y],[x+2*d,y],[x,y+d],[x+2*d,y+d],
>  [x,y+2*d],[x+d,y+2*d],[x+2*d,y+2*d];
>  kr:=POLYGONS([s[5],s[8],s[7],[x+d,y+d]]);
>  x:=0;y:=0;d:=1/3;
>  kre:=kr;sez:=s;poms:=sez;
>  sq:=POLYGONS([[0,0],[1,0],[1,1],[0,1]],
>  COLOR(RGB,0,1,0));
>  for i to n-1 do
>  d:=d/3;
>  for j to nops([sez]) do
>  x:=sez[j,1];y:=sez[j,2];
>  poms:=poms,s; kre:=kre,kr;
>  od; sez:=poms; od;
>  PLOT(kre,sq,AXESSTYLE(NONE),
>  SCALING(CONSTRAINED));
>  end;
>  o:=array(1..2):
>  o[1]:=sierpkob(2):
>  o[2]:=sierpkob(3):
>  display(o);
```

Obsah jednotkového čtverce je roven jedné a od tohoto obsahu budeme odečítat obsah odstraněných čtverců. Označme a_n obsah odstraněných čtverců v n-té iteraci a P hledaný obsah Sierpińského koberce. V n-té iteraci odstraňujeme čtverce o straně $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ a jejich počet v n-té iteraci je 8^{n-1}. Pak tedy

$$a_n = 8^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{8^{n-1}}{9^n}.$$

Celkový obsah Sierpińského koberce je pak

$$P = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n-1}}{9^n} = 1 - \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} = 1 - \frac{1}{9} \frac{1}{\frac{1}{9}} = 0.$$

Ukažme nyní výpočet v Maplu: nejdříve přímým výpočtem s využitím příkazu `sum` a poté pomocí nových procedur pro určování součtu geometrické řady.

```
>  a[n]:=8^(n-1)/9^n;
```

$$a_n := \frac{8^{(n-1)}}{9^n}$$

```
>  P:=1-Sum(a[n], n=1..infinity);
```

$$P := 1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{(n-1)}}{9^n}\right)$$

```
>  value(P);
```

$$0$$

Nyní vytvořme vlastní procedury pro určování součtu geometrické řady – `kvocgeom` a `geom`:

```
>  kvocgeom := proc (rada)
>  local i; global operat, kvoc, b, a;
>  b := expand(rada);
>  if type(b,‘+‘) then operat := nops(b);
>  for i to operat do
>  kvoc[i] := simplify(subs(n = n+1,
>  op(i,b))/op(i,b));
>  a[i] := simplify(op(i,b)/(kvoc[i]^(n-1)));
>  lprint(evaln(kvoc[i]) = kvoc[i]);
>  lprint(evaln(a[i]) = a[i]) od
>  else
>  operat := 1;
>  kvoc := simplify(subs(n = n+1,b)/b);
>  a := simplify(b/(kvoc^(n-1)));
>  lprint((’kvoc’) = kvoc); lprint((’a’) = a) fi
>  end:
```

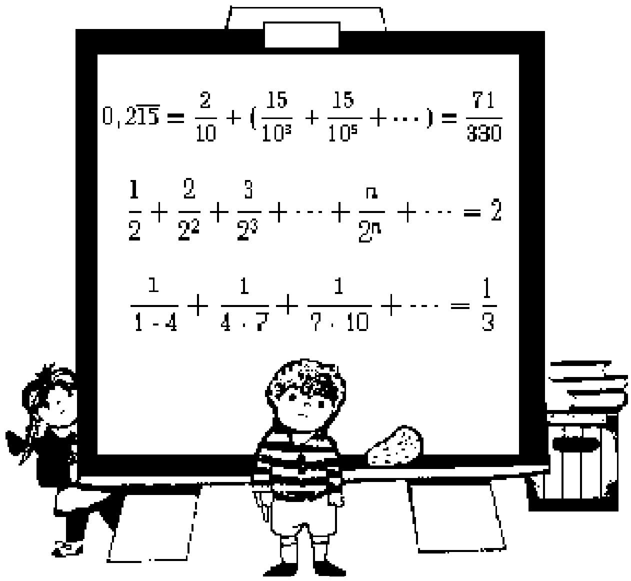
Použití těchto procedur na vyšetřovanou řadu dává následující výstup:

```
>  kvocgeom(a[n]);

kvoc = 8/9

a = 1/9
>  geom := proc (k, fclen)
local s, i; s := 0;
if 1 < operat then for i
to operat
do s := s+fclen[i]/(1-k[i]) od
else s := fclen/(1-k) fi
end:

>  geom(kvoc,a);
```

$$1$$

Dostali jsme tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n-1}}{9^n} = 1$. Obsah Sierpińského koberce je proto $P = 1 - 1 = 0$.

1.8. Dokažte: Jestliže $\sum a_n$ konverguje, $\sum b_n$ určitě diverguje k $+\infty$, pak $\sum(a_n + b_n)$ určitě diverguje k $+\infty$. Jestliže $\sum a_n$ konverguje, $\sum b_n$ osciluje, pak $\sum(a_n + b_n)$ osciluje.



Špetka praxe vydá za tunu teorie.

Kapitola 2

Číselné řady s nezápornými členy

Stanovení součtu řad bývá v jednotlivých případech obtížný úkol. Proto se při vyšetřování řad často orientujeme na zjištění, zda řada konverguje či diverguje, aniž bychom určovali její součet. Předmětem této kapitoly jsou právě tyto úlohy pro řady s nezápornými členy. Odvodíme tzv. *kritéria konvergence*, udávající postačující podmínky pro konvergenci, resp. divergenci řady.

2.1. Kriteria konvergence

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá řada s nezápornými (kladnými) členy, je-li $a_n \geq 0$ ($a_n > > 0$) pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tyto řady mají některé specifické vlastnosti: posloupnost jejich částečných součtů $\{s_n\}$ je neklesající, neboť $s_{n+1} = a_{n+1} + s_n \geq s_n$. Je-li navíc tato posloupnost shora ohraničená, pak existuje vlastní $\lim s_n$, tj. řada $\sum a_n$ je konvergentní. Proto řady s nezápornými členy jsou buď konvergentní nebo určitě divergentní k ∞.

Věta 2.1 (Srovnávací kritérium). *Buďte $\sum a_n$, $\sum b_n$ řady s nezápornými členy a nechť $a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom platí: konverguje-li řada $\sum b_n$, konverguje i řada $\sum a_n$; diverguje-li řada $\sum a_n$, diverguje i řada $\sum b_n$.*

Důkaz. Důkaz provedeme pro případ, kdy platí $a_n \leq b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Platí-li $a_n \leq b_n$ až od jistého indexu počínaje, je důkaz analogický. Buď $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$, $\{t_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum b_n$; zřejmě platí $s_n \leq t_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Konverguje-li $\sum b_n$, pak je $\{t_n\}$ konvergentní, a proto shora ohraničená, tj. existuje $k \in \mathbb{R}$ tak, že $t_n \leq k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak je však i $s_n \leq k$ pro všechna

$n \in \mathbb{N}$, tj. $\{s_n\}$ je shora ohraničená. Navíc je neklesající, a proto má vlastní limitu, tudíž $\sum a_n$ konverguje.

Diverguje-li $\sum a_n$, pak diverguje i $\sum b_n$, neboť kdyby $\sum b_n$ konvergovala, pak podle první části tvrzení by konvergovala $\sum a_n$, což je spor. □

Příklad 2.1. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}, \qquad \text{kde } a > 0,\ a \notin (1,2).$$

Řešení. a) Danou řadu porovnáme s řadou $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. Platí

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} \qquad \text{pro } n \geq 2.$$

Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je, jak jsme ukázali v Příkladu 1.2-a), konvergentní, a proto je podle Věty 2.1 konvergentní i řada $\sum \frac{1}{n^2}$.

b) Nechť $a \geq 2$. Platí

$$\frac{1}{n^a} < \frac{1}{n^2} \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N},$$

a proto je v tomto případě řada $\sum \frac{1}{n^a}$ konvergentní.

Je-li $a = 1$, jde o harmonickou řadu $\sum \frac{1}{n}$, která je, jak jsme ukázali v Příkladu 1.4, divergentní. Je-li $a \in (0,1)$, platí

$$\frac{1}{n^a} > \frac{1}{n} \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N},$$

a proto je podle Věty 2.1 divergentní i řada $\sum \frac{1}{n^a}$.

Celkem dostáváme, že řada $\sum \frac{1}{n^a}$ je konvergentní pro $a \geq 2$ a divergentní pro $a \in (0,1]$. Jiný způsob řešení, kdy vyřešíme i zbývající případ $a \in (1,2)$, uvedeme později (viz Příklad 2.6).

Věta 2.2 (Limitní srovnávací kritérium). *Buďte $\sum a_n$, $\sum b_n$ řady s nezápornými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Je-li $L < \infty$ a konverguje-li řada $\sum b_n$, pak konverguje i řada $\sum a_n$.
Je-li $L > 0$ a diverguje-li řada $\sum b_n$, pak diverguje i řada $\sum a_n$.

Důkaz. Nechť $L < \infty$ a $\sum b_n$ konverguje. K číslu $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí
$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon,$$
odkud $a_n < (L+\varepsilon)b_n$. Protože $\sum (L+\varepsilon)b_n$ konverguje, konverguje podle srovnávacího kritéria (Věta 2.1) i řada $\sum a_n$.

Nechť $L > 0$ a $\sum b_n$ diverguje. Je-li $0 < L < \infty$, pak existuje $\varepsilon > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $0 < L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n}$ pro všechna $n \geq n_0$. Odtud $(L-\varepsilon)b_n < a_n$ a podle srovnávacího kritéria (Věta 2.1) je řada $\sum a_n$ divergentní. V případě $L = \infty$ existuje $K > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{a_n}{b_n} > K$ pro všechna $n \geq n_0$. Podobně pak ze vztahu $a_n > K b_n$ plyne divergence řady $\sum a_n$. □

Poznámka 2.1. Jsou-li $\sum a_n$, $\sum b_n$ řady s nezápornými členy a platí-li $a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, nazývá se $\sum b_n$ majorantní řadou k řadě $\sum a_n$ a řada $\sum a_n$ minorantní řadou k řadě $\sum b_n$.

Příklad 2.2. Rozhodněte o konvergenci řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n^2})$.

Řešení. a) Danou řadu porovnáme s harmonickou řadou $\sum \frac{1}{n}$, která je divergentní (Příklad 1.4). Podle l'Hospitalova pravidla určíme limitu
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi \cos \frac{\pi}{n} \left(\frac{1}{n}\right)'}{\left(\frac{1}{n}\right)'} = \lim_{n\to\infty} \pi \cdot \cos \frac{\pi}{n} = \pi.$$
Protože $L > 0$ a řada $\sum \frac{1}{n}$ diverguje, je podle Věty 2.2 divergentní i řada $\sum \sin \frac{\pi}{n}$.

b) Danou řadu porovnáme s řadou $\sum \frac{1}{n^2}$, která je, jak jsme ukázali v Příkladu 2.1, konvergentní. Platí
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \left(\frac{1}{n^2}\right)'}{\left(\frac{1}{n^2}\right)'} = 1.$$
Podle Věty 2.2 konverguje také řada $\sum \ln(1 + \frac{1}{n^2})$.

K výpočtu limit v limitním srovnávacím kritériu lze s výhodou využít Maplu. Řešení příkladu 2.2a) pak vypadá takto:

```
> rada:=Sum(sin(Pi/n), n=1..infinity);
```

$$rada := \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi}{n})$$

```
> Limit(op(1,rada)/(1/n), n=infinity):%=value(%);
```

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{n})\, n = \pi$$

a tedy vyšetřovaná řada $\sum \sin \frac{\pi}{n}$ diverguje.

Poměrně jednoduchým cvičením je také naprogramování (napsání procedury) limitního srovnávacího kritéria v Maplu. Jedno z možných řešení vypadá např. takto:

```
> limsrovk := proc (a) local b, L;
> if nargs = 1 then b := 1/nˆ2;
> L := limit(a/b, n = infinity);
> if evalf(L) < infinity
> then print(Sum(a,n = 1 ..infinity));
> print(konverguje) else b := 1/n;
> L := limit(a/b,n = infinity);
> if 0 < evalf(L) then
> print(Sum(a,n = 1 .. infinity));
> print(diverguje) else
> print(‘tímto kriteriem nelze rozhodnout‘) fi
> fi
> elif nargs <> 3 then
> ERROR(”chybny pocet parametru”)
> elif args[3] = (’k’) then b := args[2];
> L :=limit(a/b,n = infinity);
> if evalf(L) < infinity then
> print(Sum(a,n = 1 .. infinity));
> print(konverguje) else
> print(‘tímto kriteriem nelze rozhodnout‘) fi
> elifargs[3] = (’d’) then b := args[2];
> L := limit(a/b,n = infinity); if 0 < evalf(L)
> then print(Sum(a,n = 1 .. infinity));
> print(diverguje) else
> print(‘tímto kriteriem nelze rozhodnout‘) fi
> else
> ERROR(”treti parametr musi byt ’k’ nebo ’d’”)
> fi end:
```

Syntaxe příkazu je `limsrovk(rada, por, konv)`, parametr `por` je nepovinný a udává, s jakou řadou budeme porovnávat řadu `rada`. Použijeme-li parametr `por`, musíme také použít parametr `konv`, kterým určujeme, zda parametr `por` reprezentuje konvergentní či divergentní řadu. Za parametr `konv` dosazujeme `d` pro divergentní řadu, resp. `k` pro řadu konvergentní. Při volání procedury bez volitelných parametrů porovnáváme s implicitně nastavenou divergentní řadou $\sum \frac{1}{n}$ a konvergentní řadou $\sum \frac{1}{n^2}$.

```
> limsrovk(op(1,rada));
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi}{n})$$

diverguje

Tuto novou proceduru nyní využijeme při řešení příkladu 2.2b):

```
> limsrovk(ln(1+1/n^2), 1/n^2,'k');
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n^2})$$

konverguje

K určování konvergence, resp. divergence číselných řad je možno použít i proceduru `csum` Roberta Israela z Maple Advisor Database. Procedura je určena pro Maple 6 a vyšší a najdete ji i na CD-ROMU v adresáři `maple`.

Ověřme nyní předcházející výsledky pomocí této procedury:

```
> read `csum4.txt`:
> csum(op(1,rada),n);
```

false

```
> csum(ln(1+1/n^2),n);
```

true

Procedura vrací hodnotu `true` – řada konverguje, nebo `false` – řada diverguje.

Věta 2.3 (Odmocninové kritérium – Cauchyovo). *Nechť* $\sum a_n$ *je řada s nezápornými členy.*

(i) Platí-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$ *nerovnost* $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$*, pak řada konverguje. Platí-li pro nekonečně mnoho* $n \in \mathbb{N}$ *nerovnost* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$*, řada diverguje.*

(ii) Existuje-li

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \qquad \text{kde } q \in \mathbb{R}^*, \tag{2.1}$$

pak v případě $q < 1$ *řada* $\sum a_n$ *konverguje a v případě* $q > 1$ *řada* $\sum a_n$ *diverguje.*

Poznámka 2.2. Tvrzení (ii) se nazývá *limitní odmocninové kritérium*. Poznamenejme, že je-li v (2.1) $q = 1$, nelze o konvergenci řady tímto kritériem rozhodnout.

Důkaz. Důkaz provedeme pro tvrzení (ii); důkaz tvrzení (i) probíhá analogicky.

Je-li $q < 1$, zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $q + \varepsilon < 1$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$, odkud $a_n < (q + \varepsilon)^n$. Řada $\sum (q + \varepsilon)^n$ je konvergentní geometrická řada, proto podle srovnávacího kritéria (Věta 2.1) také $\sum a_n$ konverguje.

Je-li $q > 1$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, tj. $a_n \geq 1$ a není splněna nutná podmínka konvergence (Věta 1.1). Proto $\sum a_n$ diverguje. $\square$

Příklad 2.3. Vyšetřete konvergenci, resp. divergenci následujících řad:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3 + \frac{1}{n})^n} \qquad \text{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n} \right)^{n^2} \qquad \text{c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{[5 + (-1)^n]^n}.$$

Řešení. a) Užijeme limitní odmocninové kritérium (Věta 2.3 (ii)). Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(3 + \frac{1}{n})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1,$$

neboť podle l'Hospitalova pravidla je $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Proto daná řada konverguje.

Maplu opět nejdříve využijeme k výpočtu $\lim \sqrt[n]{a_n}$, poté napíšeme proceduru, která celý výpočet automatizuje.

```
>  a[n]:=n/(3+1/n)^n:Sum(a[n],n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3 + \dfrac{1}{n})^n}$$

```
>  Limit((a[n])^(1/n),n=infinity):%=value(%);
```

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{(3 + \dfrac{1}{n})^n} \right)^{(\frac{1}{n})} = \frac{1}{3}$$

```
>  odmock := proc (a) local q;
>  q := evalf(limit(convert(surd(a,n),power),
>  n = infinity));
>  if q < 1 then print(Sum(a,n = 1 .. infinity));
>  print(konverguje)
>  elif 1 < q then
>  print(Sum(a,n = 1 .. infinity));
>  print(diverguje) else
>  print(‘tímto kriteriem nelze rozhodnout‘)
>  fi end:
```

```
> odmock(a[n]);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}$$

konverguje

b) K vyšetření opět použijeme limitní odmocninové kritérium (Věta 2.3 (ii)). Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)^n.$$

Jedná se o neurčitý výraz typu 1^∞, proto ho upravíme tak, abychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty} n \ln(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n})}$$

a pro limitu v exponentu již můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)^{-1} \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{1}{n}\right)'}{\left(\frac{1}{n}\right)'} = -\frac{2}{\pi}.$$

Hledaná limita je $\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}} < 1$, tj. daná řada konverguje.

c) Zde máme

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{5+(-1)^n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro liché } n, \\ \frac{1}{3} & \text{pro sudé } n. \end{cases}$$

Limitní odmocninové kritérium není použitelné. Protože však $\sqrt[n]{a_n} \le \frac{1}{2}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, z Věty 2.3 (i) plyne konvergence této řady.

Věta 2.4 (Podílové kritérium – d'Alembertovo). *Buď* $\sum a_n$ *řada s kladnými členy.*

(i) Platí-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$ *nerovnost* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$, *pak řada* $\sum a_n$ *konverguje. Platí-li pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *nerovnost* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, *pak řada* $\sum a_n$ *diverguje.*

(ii) Existuje-li

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \qquad \text{kde } q \in \mathbb{R}^*, \tag{2.2}$$

pak v případě $q < 1$ *řada* $\sum a_n$ *konverguje a v případě* $q > 1$ *řada* $\sum a_n$ *diverguje.*

Poznámka 2.3. Tvrzení (ii) se nazývá *limitní podílové kritérium*. Poznamenejme, že je-li v (2.2) $q = 1$, nelze o konvergenci řady tímto kritériem rozhodnout.

Důkaz. Opět provedeme důkaz tvrzení (ii); důkaz tvrzení (i) probíhá analogicky.

Je-li $q < 1$, zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $q + \varepsilon < 1$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je

$$q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad (q - \varepsilon)a_n < a_{n+1} < (q + \varepsilon)a_n.$$

Odtud indukcí pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_0+k} \leq (q+\varepsilon)^k a_{n_0}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(q+\varepsilon)^n$ je konvergentní geometrická řada, proto podle srovnávacího kritéria (Věta 2.1) také $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ konverguje, a proto podle Věty 1.2 také $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Je-li $q > 1$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, tj. posloupnost $\{a_n\}$ je pro $n \geq n_0$ neklesající, a proto nemůže platit $\lim a_n = 0$ a $\sum a_n$ diverguje podle Věty 1.1. $\square$

Příklad 2.4. Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}\,.$$

Řešení. a) Podle limitního podílového kritéria (Věta 2.4 (ii)) dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1,$$

proto řada $\sum \frac{n^n}{n!}$ diverguje.

Postupujeme stejně jako v předcházejícím příkladě:

```
> a:=n->(n^n)/n!:Sum(a(n), n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

```
> Limit(a(n+1)/a(n), n=infinity):%=value(%);
```

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{(n+1)}\, n!}{(n+1)!\, n^n} = e$$

```
> podilk := proc (a) local q;
> q := evalf(limit(subs(n = n+1,a)/a,
> n=infinity));
> if q < 1 then print(Sum(a,n = 1 .. infinity));
> print(konverguje)
> elif 1 < q then
> print(Sum(a,n = 1 .. infinity));
> print(diverguje)
> else print(‘tímto kriteriem nelze rozhodnout‘)
> fi end:
> podilk(a(n));
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

diverguje

b) Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n 2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)} \cdot 2^n \cdot n!} = 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1,$$

a proto daná řada konverguje podle Věty 2.4.

Pro porovnání limitního podílového a limitního odmocninového kritéria použijeme následující tvrzení:

Lemma 2.1. *Nechť* $\{a_n\}$ *je posloupnost kladných čísel. Pak platí*

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Zejména, je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in \mathbb{R}^*$, *je také* $\lim \sqrt[n]{a_n} = a$.

Důkaz. Dokážeme nerovnost $\limsup \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$; analogicky by se provedl důkaz vztahu $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf \sqrt[n]{a_n}$. Označme $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$. Je-li $a = \infty$, je tvrzení triviální; nechť tedy $a \in \mathbb{R}$. Buď $b \in \mathbb{R}$, $b > a$ libovolné; existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$ je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < b$. Napíšeme-li tuto nerovnost pro n_0, $n_0 + 1, \dots, n - 1$ $(n > n_0)$ a všechny tyto nerovnosti vynásobíme, obdržíme $a_n < b^{n-n_0} a_{n_0}$, a proto

$$\sqrt[n]{a_n} < b^{\frac{n-n_0}{n}} \sqrt[n]{a_{n_0}}.$$

Ze spojitosti exponenciální funkce b^x plyne $\lim b^{\frac{n-n_0}{n}} = b$; dále platí $\lim \sqrt[n]{a_{n_0}} = 1$. Celkem $\lim b^{\frac{n-n_0}{n}} \sqrt[n]{a_{n_0}} = b$. To znamená, že je-li $\varepsilon > 0$ libovolné, existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_0$ tak, že pro $n \geq n_1$ je

$$b^{\frac{n-n_0}{n}} \sqrt[n]{a_{n_0}} < b + \varepsilon, \qquad \text{tj.} \qquad \sqrt[n]{a_n} < b + \varepsilon\,,$$

takže $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq b + \varepsilon$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, platí i $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq b$; protože $b > a$ bylo libovolné, plyne odtud $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq a$. □

Z uvedeného lemmatu plyne, že je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, je také $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$. Proto můžeme-li o konvergenci nebo divergenci nějaké řady s nezápornými členy rozhodnout podílovým kritériem, pak můžeme rozhodnout i odmocninovým kritériem – říkáme, že odmocninové kritérium je silnější než podílové kritérium.

Následující kritérium uvádíme bez důkazu; ten lze nalézt např. v [8, 15, 18].

Věta 2.5 (Limitní Raabeovo kritérium). *Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q, \qquad \text{kde } q \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li $q > 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje; je-li $q < 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.

Poznámka 2.4. Někdy se Raabeovo kritérium uvádí ve tvaru

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q.$$

Lze ukázat, že Raabeovo kritérium je silnější než podílové kritérium – jestliže o konvergenci řady lze rozhodnout podílovým kritériem, pak lze rozhodnout i Raabeovým. Takto lze postupovat dále a odvozovat silnější kritéria. Naznačme, jak zjemňování kritérií probíhá.

Obecnějším kritériem je *Kummerovo kritérium*. Nechť $\{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$ je posloupnost reálných čísel taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ je divergentní. Nechť

$$K_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$$

a nechť existuje $\lim K_n = K$. Jestliže je $K > 0$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, jestliže $K < 0$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Ukažme, jak lze z tohoto obecnějšího kritéria odvodit podílové a Raabeovo kritérium.

a) Položíme-li $c_n = 1$, pak $K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1$. Je-li $K = \lim(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 0$, tj. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak řada diverguje. Je-li $K = \lim(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 0$, tj. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada konverguje.

b) Nechť $c_n = n$. Platí $K_n = n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1$. Je-li $\lim K_n = \lim n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1 > 0$, tj. $\lim n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1$, pak řada konverguje. Je-li $\lim K_n = \lim n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 1$, řada diverguje.

Existuje celá řada dalších kritérií pro ověření konvergence číselných řad s nezápornými členy, podrobnosti lze nalézt např. v [5]. Žádné z nich však není univerzální v tom smyslu, že bychom podle něj mohli rozhodnout o konvergenci (divergenci) libovolné řady s nezápornými členy. Takovým kritériem je pouze Cauchyovo-Bolzanovo kritérium (Lemma 1.1).

Příklad 2.5. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)} \quad .$$

Řešení. Poznamenejme, že podílovým kritériem nelze o konvergenci rozhodnout, neboť $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Raabeovo kritérium dává

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a\,n}{a+n+1} = a .$$

Je-li tedy $a > 1$, řada konverguje, je-li $a < 1$, řada diverguje. Pro $a = 1$ obdržíme řadu $\sum \frac{n!}{(n+1)!} = \sum \frac{1}{(n+1)}$, tedy řadu harmonickou (bez prvního členu), která diverguje.

Důležitým kritériem je kritérium jiného typu než dosavadní, které nám také ukazuje souvislost mezi nekonečnými řadami a nevlastními integrály:

Věta 2.6 (Integrální kritérium). *Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[1, \infty)$, která je na tomto intervalu nezáporná a nerostoucí. Nechť $f(n) = a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak řada $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Důkaz. Především poznamenejme, že funkce f je integrovatelná na každém intervalu $[1, b]$, kde $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 1$, neboť je monotonní. Označíme-li dále $F(t) = \int_1^t f(x)\,\mathrm{d}x$, je F zřejmě neklesající na $[1, \infty)$. Protože f je nerostoucí na každém intervalu $[k, k+1]$, kde $k \in \mathbb{N}$, platí na tomto intervalu $a_{k+1} \leq f(x) \leq a_k$, tedy i

$$a_{k+1} = \int_k^{k+1} a_{k+1}\,\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} a_k\,\mathrm{d}x = a_k .$$

Sečtením těchto nerovností pro $k = 1, 2, \dots, n-1$ obdržíme

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n \le \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \le a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1},$$

neboli $s_n - a_1 \le F(n) \le s_{n-1}$.

Nechť nyní řada $\sum a_n$ konverguje. Pak existuje $h \in \mathbb{R}$ tak, že $s_n \le h$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a proto také $F(n) \le h$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Protože F je neklesající, plyne odtud $F(t) \le h$ pro $t \in [1, \infty)$. Podle věty o limitě monotonních funkcí existuje vlastní $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$, tj. konverguje nevlastní integrál $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

Nechť naopak $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce F shora ohraničená na $[1, \infty)$, takže existuje $q \in \mathbb{R}$ tak, že $F(t) \le q$ pro $t \in [1, \infty)$. Je tedy i $F(n) \le q$ a odtud $s_n \le a_1 + q$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{s_n\}$ je shora ohraničená a neklesající, proto má vlastní limitu, tj. řada $\sum a_n$ konverguje. $\square$

Příklad 2.6. Rozhodněte, zda konverguje řada:

a) $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln n}$

b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^a}$ pro $a > 0$.

Řešení. a) Užijeme integrálního kritéria. Nejprve ověříme, zda je funkce $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ na intervalu $[2, \infty)$ nerostoucí. Platí $f'(x) = -\frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} < 0$, a proto je $f(x)$ na intervalu $[2, \infty)$ klesající. Zbývá vyšetřit, zda konverguje, resp. diverguje nevlastní integrál $\int_2^\infty \frac{1}{t \ln t}\,\mathrm{d}t$. Přímým výpočtem dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \int_2^x \frac{1}{t \ln t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{y}\,dy = \lim_{x\to\infty} (\ln(\ln x) - \ln(\ln 2)) = \infty,$$

a proto daná řada diverguje.

Maple dává následující výsledky:

```
> a:=n->1/(n*ln(n)):Sum(a(n), n=2..infinity);
```

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$$

Interval, kde je funkce kladná:

```
> solve(a(x)>=0,x);
```

$$\text{RealRange}(\text{Open}(1),\ \infty)$$

Interval, kde je funkce klesající:

```
> simplify(diff(a(x),x));
```

$$-\frac{\ln(x)+1}{x^2\ln(x)^2}$$

```
> solve(%<=0);
```

$$\mathrm{RealRange}(e^{(-1)},\ \mathrm{Open}(1)),\ \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(1),\ \infty)$$

Ze získaného výsledku je vidět, že na intervalu $[2, \infty)$ jsou splněny předpoklady integrálního kritéria. Výpočtem integrálu dostáváme

```
> Int(a(x),x=2..infinity):%=value(%);
```

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \infty$$

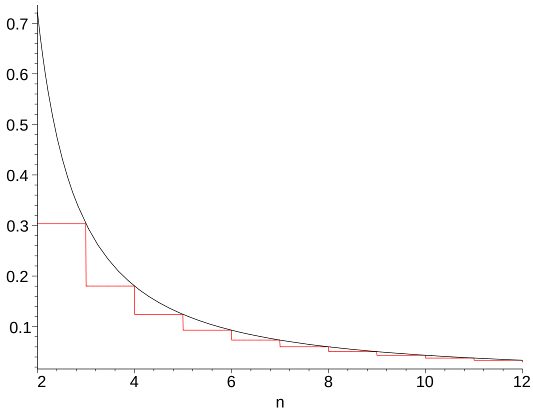
a proto daná řada diverguje. Výsledek ještě ověříme pomocí procedury `csum`:

```
> csum(a(n),n);
```

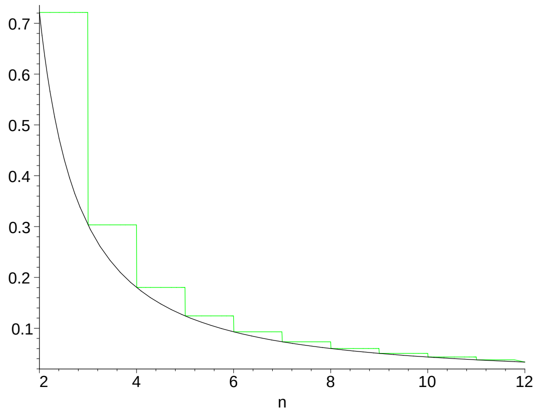
false

Na tomto příkladě ilustrujme integrální kritérium. Ke grafickému znázornění použijeme následující příkazy:

```
> plot([a(n),a(floor(n+1))], n=2..12,
> color=[black,red]);
> plot([a(n),a(floor(n))], n=2..12,
> color=[black,green]);
```



Obr. 2.1: Dolní odhad integrálu pomocí součtu řady



Obr. 2.2: Horní odhad integrálu pomocí součtu řady

Na Obrázku 2.1 je uvedena funkce $y = \frac{1}{x\ln x}$ a schodovitá funkce $y = a(n+1)$ pro $x \in [n, n+1)$. Tento obrázek představuje dolní odhad integrálu pomocí součtu řady

$$a_3 + \cdots + a_n \le \int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Na Obrázku 2.2 je uvedena funkce $y = \frac{1}{x \ln x}$ a schodovitá funkce $y = a(n)$ pro $x \in [n, n+1)$, což představuje horní odhad integrálu

$$\int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \le a_2 + \cdots + a_{n-1}.$$

Protože $\int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje, z horního odhadu plyne divergence řady $\sum a_n$ (viz Obr. 2.2). Naopak, protože řada $\sum a_n$ je divergentní, z dolního odhadu plyne divergence $\int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ (viz Obr. 2.1).

b) Užijeme integrálního kritéria. Položme $f(x) = \frac{1}{x^a}$ pro $x \in [1, \infty)$; což je pro $a > 0$ klesající funkce. Vyšetřujme konvergenci, resp. divergenci nevlastního integrálu této funkce na intervalu $[1, \infty)$. Platí

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^a} &= \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-1} \qquad \text{pro } a > 1,\\
\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{t\to\infty} (\ln t) = \infty,\\
\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^a} &= \frac{1}{1-a}\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{a-1}} - 1\right) = \infty \qquad \text{pro } a \in (0,1).
\end{aligned}$$

Proto daná řada konverguje pro $a > 1$ a diverguje pro $a \in (0, 1]$.

Cvičení

2.1. Pomocí vhodného kritéria rozhodněte o konvergenci řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \quad (a > 0, a \in \mathbb{R})$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$

g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^a n} \quad (a > 0, a \in \mathbb{R})$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$

j) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)} \cdot \frac{1}{2n-1}$

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$

n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\operatorname{arctg} n}\right)^n \quad (a > 0,\, a \in \mathbb{R})$

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$

q) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

Pomocí Maplu rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady z Cvičení 2.1b).

```
> a:=n->1/(n*(n+1)*(n+2)):
> Sum(a(n),n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}$$

Podílovým kritériem nelze o konvergenci rozhodnout:

```
> podilk(a(n));
```

tímto kriteriem nelze rozhodnout

Raabeovo kritérium dává

```
> Limit(n*(1-(a(n+1)/a(n))),n=infinity):
> %=value(%);
```

$$\lim_{n\to\infty} n\,(1 - \frac{n}{n+3}) = 3$$

a řada tedy konverguje.

Celý postup teď opět zautomatizujeme pomocí procedury `limraabk`.

```
> limraabk := proc (a) local q;
> q := evalf(limit(n*(1-subs(n = n+1,a)/a),
> n = infinity));
> if 1 < q then print(Sum(a,n = 1 .. infinity));
> print(konverguje)
> elif q < 1 then
> print(Sum(a,n = 1 .. infinity));
> print(diverguje)
> else print(‘tímto kriteriem nelze rozhodnout‘)
> fi end:
> limraabk(a(n));
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}$$

konverguje

2.2. Najděte příklad řady $\sum a_n$ s kladnými členy, pro niž $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, ale která konverguje.

2.3. Existuje konvergentní řada $\sum a_n$ s nezápornými členy, pro niž $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$?

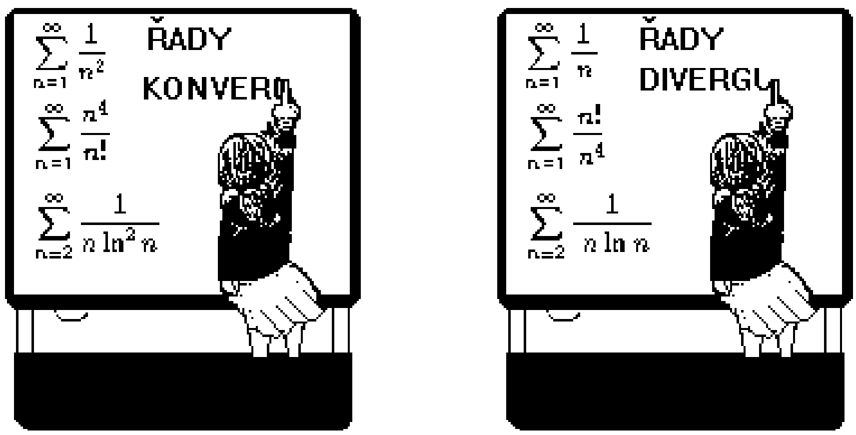
2.4. Nalezněte příklad řady $\sum a_n$ s kladnými členy, o jejíž konvergenci nebo divergenci

a) lze rozhodnout odmocninovým kritériem a nelze rozhodnout podílovým kritériem,

b) lze rozhodnout Raabeovým kritériem a nelze rozhodnout odmocninovým kritériem,

c) lze rozhodnout Raabeovým kritériem a nelze rozhodnout podílovým kritériem,

d) lze rozhodnout odmocninovým kritériem a nelze rozhodnout Raabeovým kritériem.



Zákon pro pedagogy: Nikdo vás neposlouchá, dokud se nespletete.

Kapitola 3

Řady absolutně a neabsolutně konvergentní

Předmětem této kapitoly budou číselné řady $\sum a_n$, kde $a_n \in \mathbb{R}$. Nejprve si všimneme speciálního případu, kterými jsou řady se střídavými znaménky, tzv. alternující řady. Dále zavedeme důležitý pojem pro řady s libovolnými členy, kterým je *absolutní*, resp. *neabsolutní konvergence*. Také se vrátíme k otázce z Kapitoly 1, zda pro nekonečné řady platí analogie komutativního zákona, tj. zda lze přerovnávat členy číselné řady, aniž se poruší její součet. Ukážeme, že pro přerovnávání řad je rozhodující právě skutečnost, zda jsou tyto řady absolutně konvergentní.

3.1. Alternující řady

Definice 3.1. Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *alternující*, právě když platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Vyloučíme-li případ řady, jejíž všechny členy jsou nulové, lze každou alternující řadu psát ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ nebo tvaru $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$, kde $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pro alternující řady platí následující Leibnizovo kritérium konvergence.

Věta 3.1 (Leibnizovo kritérium). *Nechť a_n je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Pak alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ konverguje právě tehdy, když platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Důkaz. Nutnost uvedené podmínky plyne ihned z Věty 1.1, neboť vztah $\lim a_n = 0$ je ekvivalentní se vztahem $\lim[(-1)^{n-1}a_n] = 0$. Dokážeme její dostatečnost. Nechť jsou předpoklady věty splněny a uvažme posloupnost $\{s_n\}$ částečných součtů řady $\sum(-1)^{n-1}a_n$. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Protože je zde každý sčítanec nezáporný, platí $s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2n}$, tj. vybraná posloupnost $\{s_{2n}\}$ je neklesající. Analogicky je

$$s_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

a protože opět čísla v závorkách jsou nezáporná, je $s_1 \geq s_3 \geq \cdots \geq s_{2n+1}$, takže $\{s_{2n+1}\}$ je nerostoucí. Obě posloupnosti $\{s_{2n}\}$, $\{s_{2n+1}\}$ jsou tedy monotonní a obě jsou ohraničené, neboť pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_1 - a_2 = s_2 \leq s_{2n} < s_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n+1} \leq s_1 = a_1.$$

Podle věty o monotonních posloupnostech jsou tedy obě konvergentní a přitom mají stejnou limitu, neboť $\lim s_{2n+1} - \lim s_{2n} = \lim(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim a_{2n+1} = 0$. Je-li $\lim s_{2n} = \lim s_{2n+1} = s$, pak zřejmě i $\lim s_n = s$, takže $\sum(-1)^{n-1}a_n$ je konvergentní a má součet s. □

Příklad 3.1. Rozhodněte o konvergenci řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n+1}{2n-3}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n-\ln n}$.

Řešení. Všechny uvedené řady jsou alternující; ověříme, zda jsou splněny podmínky Leibnizova kritéria (Věta 3.1).

a) Tato alternující řada se nazývá *Leibnizova řada*. Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je klesající a platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Proto podle Leibnizova kritéria Leibnizova řada konverguje. Později ukážeme, že její součet je $\ln 2$ (viz Příklad 6.4).

b) Platí $\lim a_n = \frac{3}{2}$, a proto je daná řada divergentní (nesplňuje nutnou podmínku konvergence, tj. $\lim a_n \neq 0$).

c) Nejprve ověřme, zda je posloupnost $\left\{\frac{1}{n-\ln n}\right\}$ klesající. Uvažujme funkci $y = \frac{1}{x-\ln x}$. Platí, že

$$y' = \left(\frac{1}{x-\ln x}\right)' = -\frac{1}{(x-\ln x)^2}\left(1-\frac{1}{x}\right) < 0 \quad \text{pro } x > 1,$$

tj. tato funkce je klesající na intervalu $(1, \infty)$, odkud plyne, že také posloupnost $\left\{\frac{1}{n-\ln n}\right\}$ je klesající. Dále je $\lim(n-\ln n) = \lim \ln \frac{\mathrm{e}^n}{n} = \infty$, a proto $\lim \frac{1}{n-\ln n} = 0$. Podle Leibnizova kritéria daná řada konverguje.

Ukažme si nyní řešení tohoto příkladu s využitím Maplu. Řadu nejdříve zadefinujeme

```
> a:=n->1/(n-ln(n)):
> Sum((-1)^n*a(n), n=1..infinity);
```

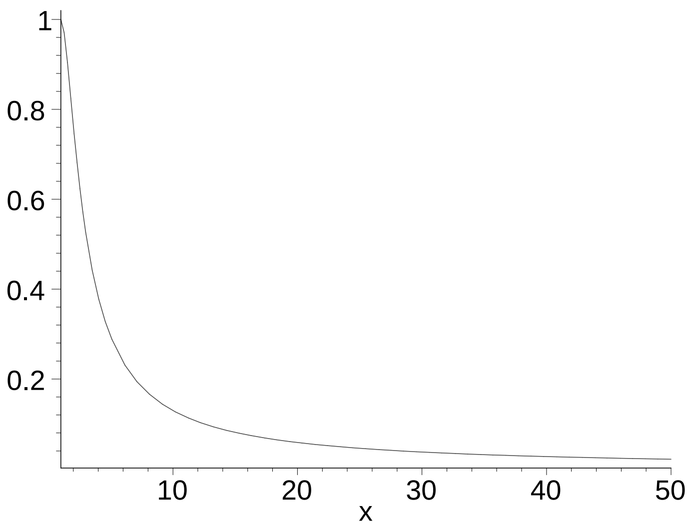
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln(n)}$$

Ověříme, že je posloupnost $\{\frac{1}{n-\ln n}\}$ je klesající.

```
> solve(diff(a(x),x)<=0);
```

$$\text{RealRange}(1, \infty)$$

```
> plot(a(x), x=1..50);
```



Obr. 3.1: Funkce $f(x) = \frac{1}{x-\ln(x)}$ pro $x \geq 1$

Tedy funkce $y = \frac{1}{x - \ln x}$ je na intervalu intervalu $\left[1, \infty\right)$ klesající (což je dobře vidět i z Obrázku 3.1), a odtud plyne, že také posloupnost $\{\frac{1}{n - \ln n}\}$ je klesající.

Dále

```
> Limit(a(n), n=infinity):%=value(%);
```

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n - \ln(n)} = 0$$

a proto podle Leibnizova kritéria daná řada konverguje.

3.2. Absolutní konvergence číselných řad

Věta 3.2. *Konverguje-li řada* $\sum |a_n|$ *, konverguje i řada* $\sum a_n$ *.*

Důkaz. Nechť $\sum |a_n|$ konverguje a buď $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ libovolné. Pak podle Cauchyova-Bolzanova kritéria konvergence (Lemma 1.1) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ a libovolné $m \in \mathbb{N}$ platí: $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon$. Potom též platí, že $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < < \varepsilon$ pro $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \in \mathbb{N}$, tj. podle Cauchy-Bolzanova kritéria řada $\sum a_n$ konverguje. □

Opačná implikace neplatí, jak ukazuje příklad Leibnizovy řady $\sum (-1)^{(n-1)} \frac{1}{n}$: tato řada je konvergentní, avšak řada $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n}$ je divergentní. Proto má smysl zavést u řad s libovolnými členy silnější vlastnost než je konvergence:

Definice 3.2. Řekneme, že řada $\sum a_n$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum |a_n|$. Jestliže řada $\sum a_n$ konverguje a $\sum |a_n|$ diverguje, říkáme, že řada $\sum a_n$ *konverguje neabsolutně*.

Příklad 3.2. Leibnizova řada $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ je neabsolutně konvergentní, naopak řada $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ je absolutně konvergentní, neboť řada $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje (viz Příklad 2.1).

Lemma 3.1. *Nechť* $\sum a_n = s$ *je absolutně konvergentní řada. Pak platí* $|s| \leq \leq \sum |a_n|$.

Důkaz. Označme $\{s_n\}$ posloupnost n-tých částečných součtů řady $\sum a_n$ a $\{t_n\}$ posloupnost n-tých částečných součtů řady $\sum |a_n|$. Protože $|s_n| \leq |t_n|$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, platí $\lim |s_n| = |s| \leq \lim t_n = \sum |a_n|$. (Tvrzení také okamžitě plyne z Poznámky 1.2, uvědomíme-li si, že $a_n \leq |a_n|$). □

Řada $\sum |a_n|$ je řada s nezápornými členy, a proto můžeme pro určování absolutní konvergence řad použít všechna kritéria z Kapitoly 2.

Věta 3.3 (Srovnávací kritérium). *Nechť $\sum b_n$ je konvergentní řada s nezápornými členy a $\sum a_n$ je řada s libovolnými členy. Jestliže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq b_n$, pak řada $\sum a_n$ konverguje absolutně.*

Důkaz. Plyne z Věty 2.1. □

Věta 3.4 (Odmocninové kritérium). *Jestliže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje absolutně. Platí-li pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, pak tato řada diverguje.*

Existuje-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = q \in \mathbb{R}^*$, pak v případě $q < 1$ řada $\sum a_n$ konverguje absolutně a v případě $q > 1$ řada diverguje.

Důkaz. První a třetí tvrzení plyne z odmocninového kritéria pro řadu $\sum |a_n|$ (Věta 2.3). Je-li $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, je i $|a_n| \geq 1$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, takže neplatí $\lim a_n = 0$ a $\sum a_n$ diverguje podle Věty 1.1. □

Věta 3.5 (Podílové kritérium). *Buď $\sum a_n$ řada s nenulovými členy.*

Jestliže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q < 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje absolutně. Platí-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, řada diverguje.

Existuje-li $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, pak v případě $q < 1$ řada $\sum a_n$ konverguje absolutně a v případě $q > 1$ tato řada diverguje.

Důkaz. První a třetí tvrzení plyne z podílového kritéria pro řadu $\sum |a_n|$ (Věta 2.4). Je-li $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, tj. $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, je posloupnost $\{|a_n|\}$ neklesající, takže neplatí $\lim a_n = 0$ a $\sum a_n$ diverguje podle Věty 1.1. □

Příklad 3.3. Zjistěte, zda jsou následující řady absolutně konvergentní:

a) $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)^3}$

b) $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln^n (n+1)} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 3} + \frac{1}{\ln^3 4} - \dots$

c) $\sum (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$

d) $\sum (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\ \dots\ (2+\sqrt{n})}$.

Řešení. Ve všech případech budeme ověřovat konvergenci řady $\sum |a_n|$.

a) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{(2n+1)^3} \le \frac{1}{n^3}$. Řada $\sum \frac{1}{n^3}$ je konvergentní, proto je podle Věty 3.3 daná řada absolutně konvergentní.

b) Platí:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln^n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0.$$

Podle Věty 3.4 je daná řada absolutně konvergentní.

c) Platí:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}{3} = \frac{e}{3} < 1.$$

Podle Věty 3.4 je daná řada absolutně konvergentní.

Pro řešení příkladu využijeme dvě z procedur uvedených v předcházející kapitole.

```
> a:=n->(-1)^(n+1)*((n+1)/n)^(n^2)/3^n:
> Sum(a(n), n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(n^2)}}{3^n}$$

```
> odmock(abs(a(n)));
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{(n+1)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(n^2)}}{3^n} \right|$$

konverguje

```
> csum(a(n),n);
```

true

Obdobně můžeme postupovat i při řešení ostatních úloh.

d) V tomto případě se ukazuje výhodné použít Raabeovo kritérium pro řadu $\sum |a_n|$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})\ \ldots\ (2+\sqrt{n})}\frac{(2+\sqrt{1})\ \ldots\ (2+\sqrt{n+1})}{\sqrt{(n+1)!}}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}}=\infty,$$

proto je vyšetřovaná řada absolutně konvergentní.

Příklad 3.4. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$$

absolutně konvergentní, pro která neabsolutně a pro která diverguje.

Řešení. Pro $x \neq 0$ je

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{n}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x|=|x|.$$

Podle Věty 3.5 řada absolutně konverguje pro $|x|<1$, pro $|x|>1$ řada diverguje. Pro $x=1$ dostáváme harmonickou řadu $\sum \frac{1}{n}$, která je divergentní, a pro $x=-1$ Leibnizovu řadu $\sum (-1)^{(n+1)}\frac{1}{n}$, která je neabsolutně konvergentní.

Na závěr tohoto odstavce uveďme dvě kritéria k určení konvergence řady s libovolnými členy. Jejich důkaz lze nalézt např. v [8, 18].

Věta 3.6 (Abelovo a Dirichletovo kritérium). *Nechť $\{b_n\}$ je monotonní posloupnost a platí jedna z následujících podmínek:*

1. *(Dirichlet) Posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$ je ohraničená a* $\lim b_n = 0$*;*
2. *(Abel) Řada $\sum a_n$ konverguje a posloupnost $\{b_n\}$ je ohraničená.*

Pak řada $\sum a_n b_n$ konverguje.

Příklad 3.5. Dokažte, že řada

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ konverguje pro libovolné $x \in \mathbb{R}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\sin n}{n}$ je konvergentní.

Řešení. a) Případ kdy $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ je triviální, neboť se jedná o nulovou řadu.

Nechť tedy $x \neq k\pi$. Položme $b_n = \frac{1}{n}$ a $a_n = \sin nx$. Ukážeme, že jsou splněny podmínky Dirichletova kritéria (Věta 3.6). Zřejmě je posloupnost $\{b_n\}$ monotonní a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Zbývá dokázat, že posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$ je ohraničená. Označme

$$\begin{aligned} s_n &= \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx, \\ r_n &= \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx, \\ q &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

Z Moivreovy věty plyne

$$q^n = (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx,$$

odkud

$$q^n - q^{-n} = \cos nx + i \sin nx - (\cos(-nx) + i \sin(-nx)) = 2i \sin nx.$$

Užitím těchto vzorců dostaneme

$$\begin{aligned} r_n + i s_n &= \cos x + i \sin x + \cos 2x + i \sin 2x + \cdots + \cos nx + i \sin nx = \\ &= q + q^2 + \cdots + q^n = q\frac{q^n - 1}{q - 1} = q\frac{q^{\frac{n}{2}}(q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}})}{q^{\frac{1}{2}}(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})} = q^{\frac{n+1}{2}}\frac{2i \sin \frac{n}{2}x}{2i \sin \frac{1}{2}x} = \\ &= \left(\cos \frac{n+1}{2}x + i \sin \frac{n+1}{2}x\right) \frac{\sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x}\,. \end{aligned}$$

Nyní porovnáme reálnou a imaginární část

$$\begin{aligned} r_n &= \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x}, \\ s_n &= \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x}\,. \end{aligned}$$

Odtud plyne $|s_n| \leq \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}x|}$, a proto je posloupnost $\{s_n\}$ částečných součtů řady $\sum \sin nx$ ohraničená. Tím jsme dokázali, že řada $\sum \frac{\sin nx}{n}$ je konvergentní pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

b) Použijeme Abelovo kritérium (Věta 3.6) při volbě $b_n = \sqrt[n]{n}$, $a_n = \frac{\sin n}{n}$. Podle předchozího příkladu $\sum a_n$ konverguje. Protože $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, je $\{b_n\}$ ohraničená; ukážeme ještě, že pro $n \geq 3$ je klesající. Vskutku, $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ právě když $n^{n+1} > (n+1)^n$, což je ekvivalentní $n > (1 + \frac{1}{n})^n$ a tato nerovnost platí pro $n \geq 3$, neboť $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ je rostoucí posloupnost s limitou $e < 3$.

3.3. Přerovnávání řad

Již v první kapitole jsme ukázali, že s nekonečnými součty nemůžeme zacházet stejně jako se součty konečnými. V tomto odstavci se budeme zabývat analogií komutativního zákona – přerovnáváním nekonečných řad.

Zaveďme následující definici:

Definice 3.3. Nechť $\sum a_n$ je řada, $\{k_n\}$ permutace množiny $\mathbb{N}$ (tj. $\{k_n\}$ je prostá posloupnost přirozených čísel, v níž se každé přirozené číslo vyskytuje). Pak říkáme, že $\sum a_{k_n}$ vznikla *přerovnáním* řady $\sum a_n$.

Věta 3.7. *Nechť řada $\sum a_n$ konverguje absolutně. Pak konverguje absolutně také každá řada $\sum a_{k_n}$ vzniklá přerovnáním řady $\sum a_n$ a platí $\sum a_{k_n} = \sum a_n$.*

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože řada $\sum a_n$ je absolutně konvergentní, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ a libovolné $m \in \mathbb{N}$ platí $|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon$. Dále protože $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je permutace množiny $\mathbb{N}$, existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $\{1, 2, \ldots, n_0\} \subseteq \{k_1, k_2, \ldots, k_p\}$. Buď nyní $n > p$ a $m \in \mathbb{N}$ libovolné. Označíme-li $t = \max\{k_{n+1}, \ldots \ldots, k_{n+m}\}$, platí $|a_{k_{n+1}}| + \cdots + |a_{k_{n+m}}| \leq |a_{n_0+1}| + \cdots + |a_t| < \varepsilon$. Podle Cauchy-Bolzanova kritéria řada $\sum |a_{k_n}|$ konverguje, tj. řada $\sum a_{k_n}$ konverguje absolutně.

Zbývá dokázat, že obě řady mají stejný součet. Označme s_n částečné součty řady $\sum a_n$, t_n částečné součty řady $\sum a_{k_n}$. Pro $n > \max\{n_0, k_p\}$ platí

$$
\begin{aligned}
|s_n - t_n| = |a_1 + \cdots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n - (a_{k_1} + \cdots + a_{k_n})| \leq \\
\leq |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \cdots + |a_{n_0+q}| < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

kde $n_0 + q = \max\{n, k_1, \ldots, k_n\}$. Je tedy $\lim_{n\to\infty} (s_n - t_n) = 0$, tj. $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n$. □

Právě jsme dokázali, že pro absolutně konvergentní řady platí komutativní zákon. Vyvstává otázka, jak se chovají při přerovnávání neabsolutně konvergentní řady.

Zaveďme následující označení: pro $a \in \mathbb{R}$ položme

$$a^+ = \max\{a, 0\}, \quad a^- = \max\{-a, 0\}.$$

Potom je zřejmě $a^+ \geq 0$, $a^- \geq 0$, $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$.

Proto je-li $\sum a_n$ nekonečná řada, můžeme uvažovat dvě nekonečné řady s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Tyto řady mají následující vlastnost:

Lemma 3.2. *Nechť řada* $\sum a_n$ *konverguje neabsolutně. Pak obě řady* $\sum a_n^+$ *a* $\sum a_n^-$ *divergují k* $+\infty$.

Důkaz. Protože $\sum a_n^+$ a $\sum a_n^-$ jsou řady s nezápornými členy, každá z nich buď konverguje nebo diverguje k $+\infty$. Kdyby obě konvergovaly, pak by podle Věty 1.3 konvergovala i řada $\sum(a_n^+ + a_n^-) = \sum |a_n|$, tj. $\sum a_n$ by konvergovala absolutně. Kdyby např. $\sum a_n^+$ divergovala k $+\infty$, $\sum a_n^-$ konvergovala, pak by podle Cvičení 1.8 řada $\sum(a_n^+ - a_n^-) = \sum a_n$ divergovala k $+\infty$. Tedy obě řady $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ divergují. □

Nyní můžeme dokázat větu o neabsolutně konvergentních řadách, která říká, jak „labilní" jsou tyto řady vzhledem k přerovnávání.

Věta 3.8 (Riemannova). *Nechť řada* $\sum a_n$ *konverguje neabsolutně a nechť* $s \in \mathbb{R}$ *je libovolné. Pak existuje takové přerovnání* $\sum a_{k_n}$ *řady* $\sum a_n$ *, že* $\sum a_{k_n} = s$, *existuje takové přerovnání* $\sum a_{p_n}$ *řady* $\sum a_n$ *, že* $\sum a_{p_n}$ *určitě diverguje a takové přerovnání* $\sum a_{q_n}$, *že* $\sum a_{q_n}$ *osciluje.*

Důkaz. Dříve než provedeme přesný důkaz, naznačme velmi zjednodušeně, jakým způsobem bude důkaz veden. Myšlenkou důkazu tvrzení, že $\sum a_{k_n} = s$, je přerovnat danou řadu následujícím způsobem: nejdříve ponecháme kladné členy, dokud „nepřekročíme" předepsaný součet. Poté začneme odčítat záporné členy až bude částečný součet řady menší než součet předepsaný a stejným způsobem pokračujeme dál. Nakonec dokážeme, že takto přeskládaná řada opravdu konverguje k předem určenému číslu.

(i) Ukažme, že lze řadu přerovnat tak, že přerovnaná řada konverguje a má součet s. Předpokládejme pro určitost, že $s > 0$. Nechť $n_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší takové, že ${a^+}_1 + \cdots + {a^+}_{n_1} > s$; vzhledem k divergenci $\sum a_n^+$ takové n_1 existuje. Nechť $m_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší takové, že ${a^+}_1 + \cdots + {a^+}_{n_1} - ({a^-}_1 + \cdots + {a^-}_{m_1}) < s$; existence takového m_1 plyne z divergence řady $\sum a_n^-$. Nechť dále $n_2 \in \mathbb{N}, n_2 > n_1$ je nejmenší takové, že ${a^+}_1 + \cdots + {a^+}_{n_1} - ({a^-}_1 + \cdots + {a^-}_{m_1}) + {a^+}_{n_1+1} + \cdots + {a^+}_{n_2} >$ $> s$. Takové n_2 opět existuje ze stejných důvodů jako n_1. V této konstrukci lze pokračovat indukcí; jejím výsledkem je jistá řada, která vznikla přerovnáním řady $\sum a_n$.

Dokažme, že součet takto přerovnané řady je s. Z konstrukce je patrné, že částečný součet $s_{n_1+m_1+\cdots+n_k}$ přerovnané řady se od požadovaného součtu s liší maximálně o ${a^+}_{n_k}$, částečný součet $s_{n_1+m_1+\cdots+n_k+m_k}$ se liší od s maximálně o ${a^-}_{m_k}$ a částečný součet s_n, kde $n_1 + m_1 + \cdots + n_k < n < n_1 + m_1 + \cdots + n_k + m_k$, resp. $n_1 + m_1 + \cdots + n_k + m_k < n < n_1 + m_1 + \cdots + n_k + m_k + n_{k+1}$ se liší od s nanejvýš o $\max\{a_{n_k}, a_{m_k}\}$ resp. o $\max\{a_{m_k}, a_{n_{k+1}}\}$. Protože $\sum a_n$ konverguje, je $\lim a_n = 0$, tedy i $\lim {a^+}_n = \lim {a^-}_n = 0$; odtud $\lim s_n = s$.

(ii) Ukažme, že lze řadu přerovnat tak, že přerovnaná řada diverguje k ∞. Nechť $n_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší takové, že $a^+_1 + \cdots + a^+_{n_1} > 1$; $n_2 > n_1$ nejmenší takové, že $a^+_1 + \cdots + a^+_{n_1} - a^-_1 + a^+_{n_1+1} + \cdots + a^+_{n_2} > 2$, $n_3 > n_2$ nejmenší takové, že $a^+_1 + \cdots + a^+_{n_1} - a^-_1 + a^+_{n_1+1} + \cdots + a^+_{n_2} - a^-_2 + a^+_{n_2+1} + \cdots + a^+_{n_3} > 3$ atd. Vzniklá přerovnaná řada určitě diverguje k ∞.

(iii) Obdobně určíme nejmenší $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a^+_1 + \cdots + a^+_{n_1} > 1$, nejmenší $m_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a^+_1 + \cdots + a^+_{n_1} - (a^-_1 + \cdots + a^-_{m_1}) < 0$, nejmenší $n_2 > n_1$ tak, že $a^+_1 + \cdots + a^+_{n_1} - (a^-_1 + \cdots + a^-_{m_1}) + a^+_{n_1+1} + \cdots + a^+_{n_2} > 1$ atd. Vzniklá přerovnaná řada osciluje. □

Příklad 3.6. Přerovnejte Leibnizovu řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n+1)}\frac{1}{n}$ tak, aby součet přerovnané řady byl:

a) $1{,}8$ b) $0{,}7$ c) $-0{,}6$.

Řešení. Podle příkladu 3.2 je Leibnizova řada neabsolutně konvergentní, tedy splňuje podmínky věty 3.8 a existují její přerovnání taková, že konverguje k zadaným číslům.

V příkladu 6.4 jsme ukázali, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n+1)}\frac{1}{n} = \ln 2 \doteq 0{,}693$.

```
> a:=n->(-1)^(n+1)/n: Sum(a(n), n=1..infinity):
> %=value(%);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} = \ln(2)$$

```
> evalf(lhs(%));
```

$$0.6931471806$$

V zadání máme tedy tři různé typové příklady.

Při řešení tohoto příkladu budeme postupovat podle důkazu Riemannovy věty. Maplu využijeme k znázorňování přeskládaných řad a posloupností jejich částečných součtů. Využijeme nových procedur `rieman` a `preskl`. Procedura `rieman(ps,n,fce,prom)` přeskládá zadanou neabsolutně konvergentní řadu tak, aby konvergovala k předepsanému součtu a zobrazí její částečné součty. Procedura má čtyři argumenty: `ps` součet, k němuž má konvergovat přeskládaná řada, `n` počet zobrazených částečných součtů přeskládané řady, `fce` předpis pro n-tý člen řady a `prom` proměnná použitá ve výrazu `fce`.

```
> cast_s := proc (ps, f)
> local s; global old_s, nk, nz;
> s := old_s; if s <= ps
> then s := s+f(nk); nk := nk+2 else
> s := s+f(nz);
> nz := nz+2
> fi;
> old_s:= s;
> RETURN(s)
> end;
> rieman := proc (ps, n, fce, prom)
> local f, s, l; global old_s, nk, nz;
> f := unapply(fce,prom);
> if 0 < f(1) then nk := 1; nz := 2
> else nk := 2; nz := 1 fi;
> s := 0; old_s := 0;
> l := [seq([i, cast_s(ps,f,nk,nz)],i = 1 .. n)];
> RETURN(display({pointplot(l,symbol = CIRCLE,
> symbolsize=4),
> plot(ps,x = 0 ..n,labels = [‘‘, ‘‘])}))
> end;
```

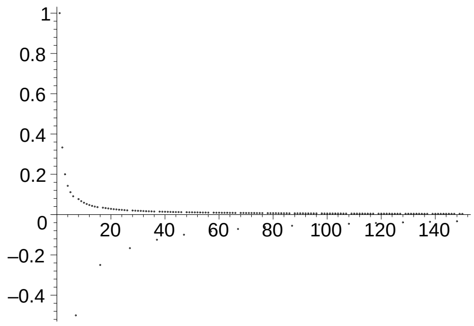
Procedura `preskl(ps,n,fce,prom)` má stejné parametry jako procedura `rieman` a slouží ke znázornění prvních *n* členů přeskládané řady.

```
> clen := proc (ps, f) local s, h;
> global old_s, nk, nz; s := old_s;
> if s <= ps
> then h := f(nk); s := s+h; nk := nk+2
> else h := f(nz); s := s+h; nz := nz+2
> fi;
> old_s := s; RETURN(h)
> end;
> preskl := proc (ps, n, fce, prom)
> local f, s, l; global old_s, nk, nz;
> f := unapply(fce,prom);
> if 0 < f(1) then nk := 1; nz := 2
> else nk := 2; nz := 1 fi;
> s := 0; old_s := 0;
> l := [seq([i, clen(ps,f,nk,nz)],i = 1 .. n)];
> RETURN(pointplot(l, symbol = CIRCLE,
> symbolsize=4))
> end;
```

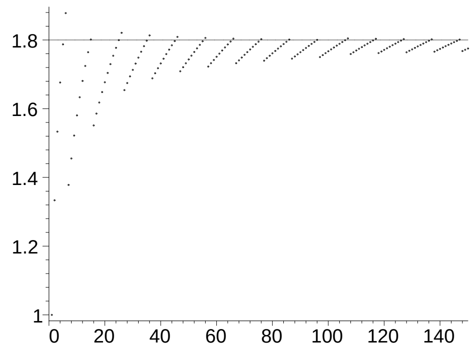
Nyní aplikujeme tyto procedury na jednotlivé případy.

V případě a) je předepsaný součet dostatečně větší než součet $\ln 2$, proto v přeskládané řadě převažují kladné členy, viz Obr. 3.2.

```
> preskl(1.8,150,a(n),n);
```



Obr. 3.2: Prvních 150 členů přeskládané řady konvergující k 1,8



Obr. 3.3: Posloupnost částečných součtů konvergující k 1,8

Je vidět, že nejdříve sčítáme jen kladné členy, čímž posloupnost částečných součtů roste dokud nepřekročí předepsaný součet, tj. $s_n > 1{,}8$. Poté následuje člen záporný, který způsobí, že $s_{n+1} < 1{,}8$. Opět následují členy kladné, až $s_n > 1{,}8$, poté člen záporný atd. (viz Obr. 3.3).

```
> rieman(1.8,150,a(n),n);
```

Obrázky 3.4 a 3.5 ukazují případ b), kdy předepsaný součet je velmi blízko hodnotě $\ln 2$. Pořadí členů řady (Obr. 3.4) se proto mění až u členů s vyššími indexy a přeskládání není z grafu téměř patrné. U částečných součtů (Obr. 3.5) to má za následek, že oscilují okolo předepsaného součtu bez větších skoků.

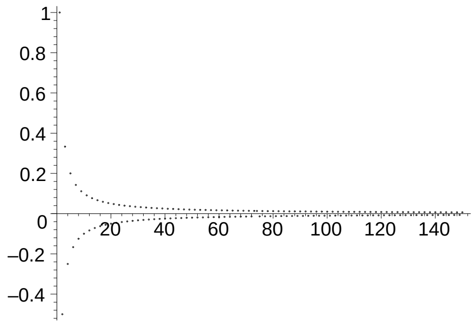
```
> preskl(0.7,150,a(n),n);
```

```
> rieman(0.7, 150, a(n),n);
```

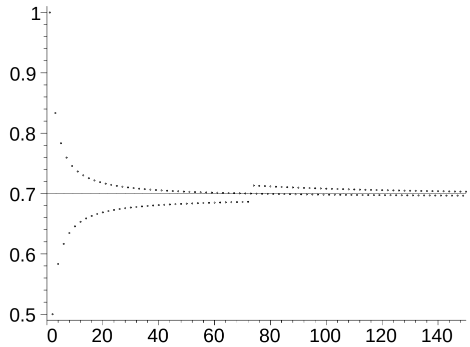
Poslední případ (znázorněný na obrázcích 3.6 a 3.7), kdy předepsaný součet je záporný a dostatečně menší než $\ln 2$, je v podstatě „inverzní“ k případu a).

```
> preskl(-0.6,150,a(n),n);
```

```
> rieman(-0.6,150,a(n),n);
```



Obr. 3.4: Prvních 150 členů přeskládané řady konvergující k $0,7$



Obr. 3.5: Posloupnost částečných součtů konvergující k $0,7$

Cvičení

3.1. Rozhodněte o konvergenci alternujících řad:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+100}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{5n-2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n-\ln n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$

3.2. Vyšetřete, které řady konvergují absolutně, které konvergují neabsolutně a které divergují:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

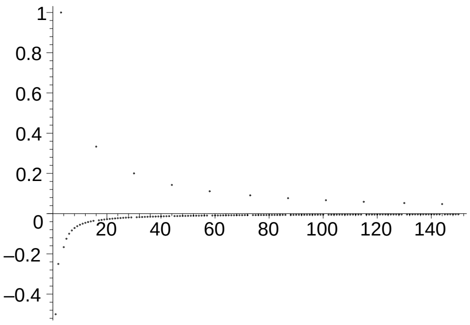
b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\ln n}$

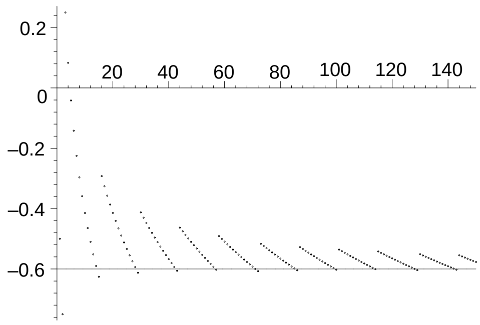
d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{n^2}}{n!}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{6^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$



Obr. 3.6: Prvních 150 členů přeskládané řady konvergující k $-0{,}6$

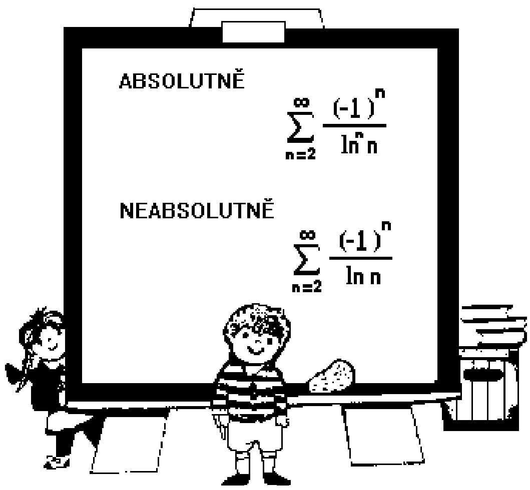


Obr. 3.7: Posloupnost částečných součtů konvergující k $-0{,}6$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

3.3. Určete, pro která reálná čísla x následující řady absolutně konvergují, pro která neabsolutně a pro která divergují:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2x}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3 2^n}x^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\mathrm{e}^{nx}}$



Cítíte-li se skvěle, buďte bez obav. To přejde.

Kapitola 4

Součin řad a numerická sumace řad

V této kapitole ukážeme, za jakých předpokladů a jakým způsobem lze násobit dvě nekonečné řady. Dále ukážeme některé odhady zbytku při numerické sumaci číselné řady, což později budeme používat při přibližném výpočtu funkčních hodnot.

4.1. Součin řad

Součin dvou konečných součtů $\sum_{i=1}^{m} a_i$, $\sum_{k=1}^{n} b_k$ reálných čísel lze podle distributivního zákona vypočítat tak, že utvoříme všechny součiny $a_i b_k$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq$ $\leq k \leq n$) a tyto součiny sečteme:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_i b_k =$$

$$= a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots + a_1 b_n + a_2 b_1 + \cdots + a_2 b_n + \cdots + a_m b_1 + \cdots + a_m b_n .$$

Chceme-li analogicky postupovati v případě dvou (konvergentních) řad $\sum a_n$, $\sum b_n$, je třeba utvořit všechny součiny $a_i b_k$ ($i, k \in \mathbb{N}$) a tyto součiny sečíst. Systém $\{a_i b_k; i, k \in \mathbb{N}\}$ je však spočetnou množinou reálných čísel opatřených dvěma indexy, kterou můžeme napsat ve tvaru „nekonečné matice“

$$\begin{array}{cccccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n & \dots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n & \dots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_mb_1 & a_mb_2 & a_mb_3 & \dots & a_mb_n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array} \tag{4.1}$$

Prvky takovéto množiny lze sčítat (ve smyslu předchozí teorie), pokud je nějakým způsobem srovnáme do obyčejné posloupnosti, tj. utvoříme posloupnost $\{c_n\}$, jež je permutací množiny $\{a_ib_k;\ i, k \in \mathbb{N}\}$. Každou řadu $\sum c_n$, která vznikne tímto způsobem, nazýváme *součinem řad* $\sum a_n, \sum b_n$. Obecně tedy existuje nekonečně mnoho různých součinů řad $\sum a_n, \sum b_n$ při čemž jeden z druhého vznikne přeřazením. V Kapitole 3 jsme viděli, že v obecném případě se u konvergentních řad hodnota součtu při přeřazení nezachovává. Proto různé součiny dvou konvergentních řad mohou mít různé hodnoty; dokonce uvidíme, že součin dvou konvergentních řad může být divergentní. Jednoduchá situace je však v případě, kdy obě řady $\sum a_n, \sum b_n$ konvergují absolutně:

Věta 4.1. *Nechť řady $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$ konvergují absolutně. Je-li $\{c_n\}$ libovolná posloupnost, jež je permutací množiny $\{a_ib_k;\ i, k \in \mathbb{N}\}$, pak řada $\sum c_n$ konverguje absolutně a platí $\sum c_n = a \cdot b$.*

Důkaz. Nechť $\sum |a_n| = s$, $\sum |b_n| = t$, takže $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_i| \le s$ pro každé $i \in \mathbb{N}$ a $|b_1| + |b_2| + \dots + |b_k| \le t$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Zvolme libovolně $n \in \mathbb{N}$ a nechť $c_1 = a_{i_1}b_{k_1}$, $c_2 = a_{i_2}b_{k_2}, \dots, c_n = a_{i_n}b_{k_n}$. Je-li $i_0 = \max\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, $k_0 = \max\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, pak zřejmě

$$\begin{aligned} |c_1| + |c_2| + \dots + |c_n| &= |a_{i_1}|\,|b_{k_1}| + |a_{i_2}|\,|b_{k_2}| + \dots + |a_{i_n}|\,|b_{k_n}| \le \\ &\le (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{i_0}|) \cdot (|b_1| + |b_2| + \dots + |b_{k_0}|) \le s \cdot t. \end{aligned}$$

Tedy řada $\sum |c_n|$ má ohraničené částečné součty, takže $\sum |c_n|$ konverguje, tj. $\sum c_n$ konverguje absolutně. Podle Věty 3.7 platí $\sum c_n = \sum c_{k_n}$, kde $\{k_n\}$ je libovolná permutace množiny $\mathbb{N}$. Speciálně platí

$$\begin{aligned} \sum c_n = a_1b_1 &+ (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + \\ &+ a_3b_1) + \dots + (a_1b_n + a_2b_n + \dots + a_nb_n + a_nb_{n-1} + \dots + a_nb_1) + \cdots . \end{aligned}$$

Označíme-li s_n částečné součty řady na pravé straně této rovnosti, t_n částečné součty řady $\sum a_n$ a w_n částečné součty řady $\sum b_n$, platí

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1b_1 = t_1w_1\\
s_2 &= a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = t_2w_2\\
s_3 &= a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1\\
&= (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3) = t_3w_3\\
&\vdots\\
s_n &= t_nw_n.
\end{aligned}$$

Odtud plyne $s_n \to a \cdot b$, tj. $\sum c_n = a \cdot b$. □

Předpoklad absolutní konvergence obou řad $\sum a_n$, $\sum b_n$ je však značně silný a dá se očekávat, že při speciální volbě permutace (c_n) množiny $\{a_ib_k;\, i, k \in \mathbb{N}\}$ lze dokázat konvergenci součinu $\sum c_n$ za slabších podmínek. Zaveďme dva typy součinů konvergentních řad:

Dirichletovým součinem řad $\sum a_n$, $\sum b_n$ rozumíme řadu $\sum c_n$, kde

$$c_n = a_1b_n + a_2b_n + \cdots + a_nb_n + a_nb_{n-1} + \cdots + a_nb_1;$$

tato řada odpovídá postupu ve schématu (4.1) „po čtvercích“:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_1b_1 & & a_1b_2 & & a_1b_3 & & a_1b_4 & \dots\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
a_2b_1 & \leftarrow & a_2b_2 & & a_2b_3 & & a_2b_4 & \dots\\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & \\
a_3b_1 & \leftarrow & a_3b_2 & \leftarrow & a_3b_3 & & a_3b_4 & \dots\\
 & & & & & & \downarrow & \\
a_4b_1 & \leftarrow & a_4b_2 & \leftarrow & a_4b_3 & \leftarrow & a_4b_4 & \dots\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Cauchyovým součinem řad $\sum a_n$, $\sum b_n$ rozumíme řadu $\sum c_n$, kde

$$c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_2 + a_nb_1;$$

tato řada odpovídá postupu ve schématu (4.1) „po diagonálách“:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_1b_1 & & a_1b_2 & & a_1b_3 & & a_1b_4 & \ldots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
a_2b_1 & & a_2b_2 & & a_2b_3 & & a_2b_4 & \ldots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
a_3b_1 & & a_3b_2 & & a_3b_3 & & a_3b_4 & \ldots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
a_4b_1 & & a_4b_2 & & a_4b_3 & & a_4b_4 & \ldots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Věta 4.2. *Nechť* $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$ *jsou konvergentní řady a nechť* $\sum c_n$ *je jejich Dirichletův součin. Pak* $\sum c_n$ *je konvergentní a platí* $\sum c_n = a \cdot b$.

Důkaz. Označíme-li t_n částečné součty řady $\sum a_n$, w_n částečné součty řady $\sum b_n$ a s_n částečné součty jejich Dirichletova součinu $\sum c_n$, potom – jak jsme odvodili v důkaze věty 4.1 – platí $s_n = t_n \cdot w_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Avšak $t_n \to a$, $w_n \to b$ a tedy $s_n \to a \cdot b$, tj. $\sum c_n = a \cdot b$. □

Pro Cauchyův součin takové tvrzení neplatí:

Příklad 4.1. Nechť $\sum a_n = \sum b_n = \sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$. Podle Leibnizova kritéria řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ konvergují. Ukážeme, že jejich Cauchyův součin $\sum c_n$ diverguje.

Vskutku,

$$c_n = (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} \right),$$

takže

$$\begin{aligned}
|c_n| &= \frac{1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{1}} \geq \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = 1.
\end{aligned}$$

Neplatí tedy $\lim c_n = 0$ a $\sum c_n$ diverguje podle Věty 1.1.

Věta 4.3 (Mertensova). *Nechť řady* $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$ *konvergují a alespoň jedna z nich absolutně. Nechť* $\sum c_n$ *je Cauchyův součin těchto řad. Pak* $\sum c_n$ *konverguje a platí* $\sum c_n = a \cdot b$.

Důkaz. Předpokládejme pro určitost, že $\sum a_n$ konverguje absolutně. Označme t_n částečné součty řady $\sum a_n$, w_n částečné součty řady $\sum b_n$ a s_n částečné součty jejich Cauchyova součinu $\sum c_n$. Je tedy

$$\begin{aligned}
s_n &= c_1 + c_2 + \cdots + c_n = \\
&= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots \\
&\quad \cdots + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1) = \\
&= a_1(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a_2(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_nb_1 = \\
&= a_1w_n + a_2w_{n-1} + \cdots + a_nw_1.
\end{aligned}$$

Označme $w_n - b = v_n$; pak je $w_n = b + v_n$ a protože $w_n \to b$, platí $v_n \to 0$. Odtud

$$s_n = a_1(b + v_n) + a_2(b + v_{n-1}) + \cdots + a_n(b + v_1) =$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot b + a_1v_n + a_2v_{n-1} + \cdots + a_nv_1 = t_n \cdot b + u_n,$$

kde $u_n = a_1v_n + a_2v_{n-1} + \cdots + a_nv_1$. Protože $t_n \to a$, platí $t_n \cdot b \to a \cdot b$, takže ukážeme-li , že platí $\lim u_n = 0$, bude tím dokázáno $\lim s_n = a \cdot b$, tj. $\sum c_n = a \cdot b$.

Protože $\sum |a_n|$ konverguje, je posloupnost jejích částečných součtů shora ohraničená, tj. existuje $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$ tak, že platí $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| < h$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Protože $\lim v_n = 0$, je posloupnost $\{v_n\}$ ohraničená, tj. existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ tak, že platí $|v_n| < k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Buď $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože $\lim v_n = 0$, k číslu $\frac{\varepsilon}{2h} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \geq n_1$ platí $|v_n| < \frac{\varepsilon}{2h}$. Protože $\sum |a_n|$ konverguje, k číslu $\frac{\varepsilon}{2k} > 0$ existuje podle Cauchy-Bolzanova kritéria $n_2 \in$ $\in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \geq n_2$ a pro všechna $m \in \mathbb{N}$ platí $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \frac{\varepsilon}{2k}$.

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > 2n_0$ platí

$$\begin{aligned}
|u_n| &= |a_1v_n + a_2v_{n-1} + \cdots + a_{n_0}v_{n-n_0+1} + a_{n_0+1}v_{n-n_0} + \cdots + a_nv_1| \leq \\
&\leq |a_1| \cdot |v_n| + |a_2| \cdot |v_{n-1}| + \cdots + |a_{n_0}| \cdot |v_{n-n_0+1}| + \\
&\quad + |a_{n_0+1}| \cdot |v_{n-n_0}| + \cdots + |a_n| \cdot |v_1| < \\
&< (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_0}|) \cdot \frac{\varepsilon}{2h} + (|a_{n_0+1}| + \cdots + |a_n|) \cdot k < \\
&< h \cdot \frac{\varepsilon}{2h} + \frac{\varepsilon}{2k} \cdot k = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Je tedy vskutku $\lim u_n = 0$ a $\sum c_n = a \cdot b$. □

4.2. Numerická sumace

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada. Její součet s lze psát ve tvaru

$$s = s_n + R_n,$$

kde $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ je n-tý částečný součet řady a $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$ se nazývá zbytek po n-tém členu. To znamená, že číslo R_n udává velikost chyby, jíž se dopustíme, jestliže přesnou hodnotu součtu dané konvergentní řady aproximujeme částečným součtem. Přitom platí $\lim R_n = \lim(s - s_n) = s - s = 0$. V tomto odstavci odvodíme některé odhady pro velikost zbytku $|R_n|$. Aplikace těchto odhadů při přibližném vyjadřování funkčních hodnot a integrálů budou ukázány v Kapitole 7.

Lemma 4.1. *Nechť $\sum a_n$ je řada, $\sum b_n$ je konvergentní řada s nezápornými členy a nechť platí $|a_n| \leq b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Značí-li r_n zbytek po n-tém členu řady $\sum a_n$ a R_n zbytek po n-tém členu řady $\sum b_n$, pak platí $|r_n| \leq R_n$.*

Důkaz. Z předpokladů věty plyne, že $\sum a_n$ konverguje absolutně. Tedy také konverguje absolutně řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ a podle Poznámky 1.2 a Lemmatu 3.1 platí $|r_n| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n+k}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_{n+k} = R_n$. □

Věta 4.4. *Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel taková, že $\lim a_n = 0$. Pak pro zbytek po n-tém členu R_n alternující řady $\sum(-1)^{n-1}a_n$ platí*

$$|R_n| < a_{n+1}.$$

Důkaz. Z Leibnizova kritéria (Věta 3.1) plyne, že řada $\sum(-1)^{n-1}a_n$ je konvergentní. Dále platí

$$\begin{aligned} R_n &= (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+k-1} a_{n+k} + \ldots = \\ &= (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + (-1)^{k-1} a_{n+k} + \ldots). \end{aligned}$$

Opakováním úvah z důkazu Leibnizova kritéria zjistíme, že pro součet σ řady v závorce platí $a_{n+1} - a_{n+2} < \sigma < a_{n+1}$. Je tedy zejména $\sigma > 0$ a protože $R_n = (-1)^n \cdot \sigma$, platí $|R_n| = \sigma < a_{n+1}$. □

Pokud daná řada není alternující, můžeme pro určování chyby použít následující dvě tvrzení.

Věta 4.5. *Nechť $\sum a_n$ je číselná řada, pro kterou platí*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \quad \textit{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Pak pro zbytek R_n této řady platí

$$|R_n| \le |a_n| \frac{q}{1-q}.$$

Důkaz. Uvedený předpoklad zaručuje absolutní konvergenci řady $\sum a_n$ podle Věty 3.5. Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_{n+1}| \le |a_n| \cdot q$, je i $|a_{n+2}| \le |a_{n+1}| \cdot \cdot q \le |a_n| \cdot q^2$, $|a_{n+3}| \le |a_{n+2}| \cdot q \le |a_n| \cdot q^3$ a obecně indukcí $|a_{n+k}| \le |a_n| \cdot q^k$. Proto podle Poznámky 1.2 a Lemmatu 3.1 platí

$$\begin{aligned} |R_n| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n+k}| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_n| \cdot q^k = \\ &= |a_n| \cdot q \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = |a_n| \cdot \frac{q}{1-q}. \end{aligned}$$

□

Věta 4.6. *Nechť $\sum a_n$ je konvergentní řada s nezápornými členy. Nechť $a_n = f(n)$, kde f je nezáporná a nerostoucí funkce na intervalu* $[1, \infty)$. *Pak pro zbytek R_n řady $\sum a_n$ platí $R_n \le \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Důkaz. Z konvergence řady $\sum a_n$ plyne konvergence nevlastního integrálu $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ (podle Věty 2.6) a tedy i nevlastního integrálu $\int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. V důkazu Věty 2.6 jsme dále odvodili nerovnost $a_{n+1} \le \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ platnou pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Dosadíme-li do ní za n postupně $n+1, n+2, \ldots, n+k-1$ a sečteme takto vzniklé nerovnosti, obdržíme $a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+k} \le \int_n^{n+k} f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $k \in \mathbb{N}$ je libovolné. Protože funkce f je nezáporná na intervalu $[n, \infty)$, platí $\int_n^{n+k} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Je tedy $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} \le \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a odtud již plyne $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = R_n \le \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Příklad 4.2. a) Nalezněte odhad zbytku řady

$$\sum \frac{1}{n^p}, \qquad \text{kde } p \in \mathbb{R},\ p > 1.$$

b) Kolik členů řady

$$\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

je třeba sečíst, aby částečný součet aproximoval přesnou hodnotu součtu s chybou menší než 0,001?

c) Kolik členů řady

$$\sum \frac{2^n}{n!}$$

je třeba sečíst, abychom její součet aproximovali s chybou menší než 0,01?

d) Najděte odhad zbytku pro Leibnizovu řadu

$$\sum (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \ln 2\,.$$

Řešení. a) Daná řada konverguje; podle Věty 4.6 platí

$$R_n \le \int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{x^{p-1}}\right]_n^{\infty} = \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}\,.$$

Například pro řadu $\sum \frac{1}{n^2}$ máme pro její zbytek odhad $R_n \le \frac{1}{n}$, tj. její konvergence je „pomalá“.

b) Protože $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^3}$, plyne z Lemmatu 4.1 a z předchozího příkladu odhad zbytku $R_n < \frac{1}{2n^2}$. Nerovnost $\frac{1}{2n^2} \le 0{,}001$, tj. $n^2 \ge 500$, je splněna pro $n \ge 23$. Stačí tedy sečíst 23 členy řady.

c) Protože

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1},$$

podílové kritérium (v limitním tvaru) ukazuje, že řada konverguje. Dále je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{1}{2}$ pro $n \ge 3$. Tedy pro $n \ge 3$ platí podle Věty 4.5

$$R_n \le a_n \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = a_n = \frac{2^n}{n!}.$$

Nerovnost $\frac{2^n}{n!} < 0{,}01$, tj. $n! > 100 \cdot 2^n$ je, jak se snadno přesvědčíme, splněna pro $n \ge 8$. Stačí tedy sečíst 8 členů řady.

d) Podle Věty 4.4 je $|R_n| < \frac{1}{n+1}$. Abychom tedy určili číslo $\ln 2$ např. s chybou menší než 0,01, je třeba sečíst alespoň 100 členů řady $\sum (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. To ukazuje, že tato řada je nevýhodná pro počítání logaritmů, její konvergence je příliš „pomalá“. Jiný způsob výpočtu logaritmů ukážeme v Příkladu 7.4.

Cvičení

4.1. Určete Cauchyův součin řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \,.$$

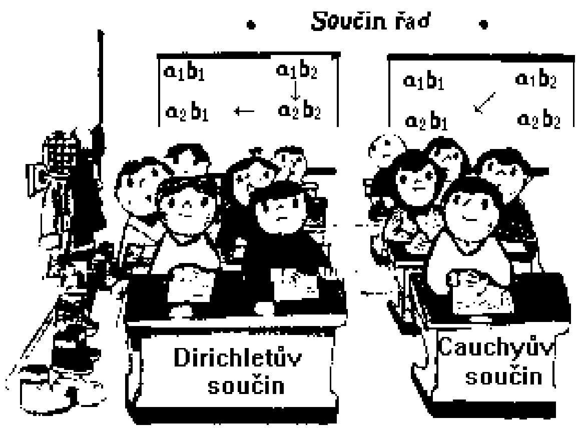
4.2. Nechť $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$. Určete Cauchyův součin řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}$ se sebou samou. Pomocí získaného výsledku určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^n}$.

4.3. Kolik členů následujících řad je třeba sečíst, abychom jejich součet aproximovali s chybou menší než $0{,}01$:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n!}$.

4.4. Kolik členů řady je třeba sečíst, aby zbytek byl menší než $0{,}0001$:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \qquad \text{b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} \,.$$



Člověk s jedněmi hodinkami ví přesně, kolik je hodin.
Člověk s dvojími si není nikdy jistý.

Kapitola 5

Posloupnosti a řady funkcí

Důležitou roli v matematice hrají nekonečné řady, jejichž členy jsou funkce $f_n(x)$. V tomto případě mluvíme o řadě funkcí $\sum f_n(x)$ a jejím součtem je nějaká funkce $f(x)$. K bouřlivému rozvoji řad funkcí došlo v druhé polovině 17. století a zejména pak v 18. století, kdy byly funkce vyjadřovány ve tvaru nekonečných řad. Středem pozornosti matematiků byly následující otázky pro počítání s nekonečnými řadami funkcí:

Jsou-li funkce $f_n(x)$ spojité na intervalu I, je také funkce $f(x) = \sum f_n(x)$ spojitá na I?

Kdy lze integrovat nekonečnou řadu funkcí člen po členu, tj. zaměnit pořadí integrace a sumace?

Kdy lze derivovat nekonečnou řadu funkcí člen po členu, tj. zaměnit pořadí derivace a sumace?

Odpovědi na tyto otázky budou obsahem této kapitoly. V následujících dvou kapitolách pak budeme podrobně studovat dva nejdůležitější případy řad funkcí, kterými jsou

▹ *mocninné řady*, kdy funkce $f_n(x)$ jsou mocninné funkce, tj. $f_n(x) = a_n x^n$; tyto řady jsou vhodné pro aproximaci (přibližné vyjádření) funkce v okolí bodu $x = 0$;

▹ *Fourierovy řady*, kdy funkce $f_n(x)$ jsou tvaru $f_n(x) = a_n \sin nx + b_n \cos nx$; tyto řady jsou vhodné pro aproximaci periodických funkcí.

Ukážeme, že klíčovou úlohu v těchto problémech hraje velmi důležitá vlastnost řad funkcí, kterou je *stejnoměrná konvergence*.

5.1. Pojmy posloupnost a řada funkcí

Nejprve zaveďme pojem bodové konvergence pro posloupnost funkcí.

Definice 5.1. Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí na intervalu I a $x_0 \in$ $\in I$ je libovolné. Je-li číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, říkáme, že posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je *konvergentní v bodě* x_0.
Řekneme, že posloupnost funkcí *bodově konverguje k funkci* $f(x)$ *na intervalu* I, jestliže konverguje v každém bodě $x \in I$, tj. ke každému $x \in I$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Píšeme $\lim f_n(x) = f(x)$ pro $x \in I$ nebo $f_n \to f$ na I.

Všimněme si, že číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ závisí jak na volbě čísla ε, tak na volbě bodu $x \in I$, takže při témže ε a různých $x \in I$ může být příslušné n_0 různé.

Příklad 5.1. Znázorněte prvních n členů posloupnosti funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a určete její limitu:

$$a)\ f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1] \qquad b)\ f_n(x) = \operatorname{arctg} nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Platí

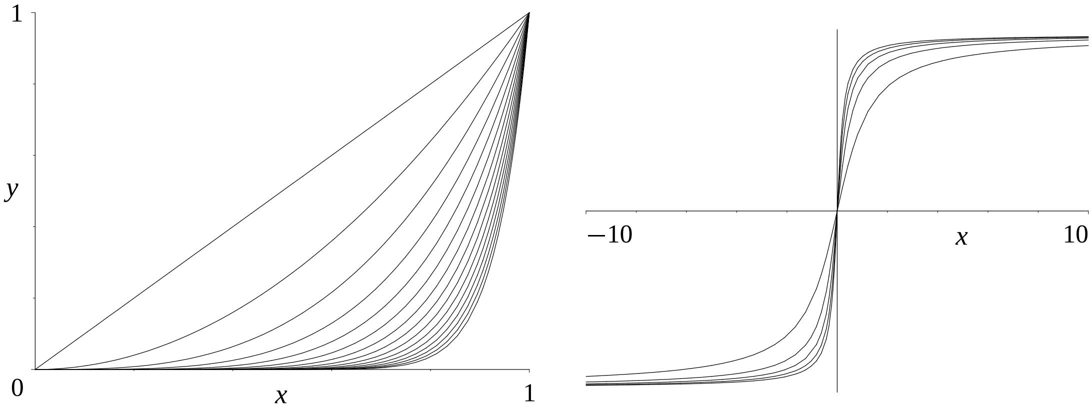
$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ 1 & x = 1, \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0. \end{cases}$$

Všimněme si, že limitní funkce obou posloupností jsou nespojité funkce, třebaže funkce x^n i $\operatorname{arctg} nx$ jsou spojité na $\mathbb{R}$.

Obrázek 5.1 byl vygenerován pomocí následující posloupnosti příkazů.

```
> display(seq(plot(x^n,x=0..1,y=0..1,style=line,
> color=black),n=1..15));
> display(seq(plot(arctan((n)*x),x=-10..10,
> style=line,] color=black),n=1..5));
```

Nekonečné řady funkcí definujeme analogicky jako číselné řady a bodovou konvergenci řad funkcí definujeme pomocí bodové konvergence posloupnosti n-tých částečných součtů.



Obr. 5.1: Posloupnosti funkcí $\{x^n\}$ a $\{\operatorname{arctg} nx\}$

Definice 5.2. Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu I. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \text{nebo} \quad f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \tag{5.1}$$

nazýváme *nekonečnou řadou funkcí*. Posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $s_n(x) = f_1(x) + {} + \cdots + f_n(x)$, nazýváme *posloupností částečných součtů* řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Jestliže posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje pro všechna $x \in I$, řekneme, že řada (5.1) *bodově konverguje* na intervalu I a funkci $s(x) = \lim s_n(x)$ nazýváme *součtem řady* $\sum f_n(x)$.

Bodová konvergence posloupnosti funkcí, resp. řady funkcí, závisí na intervalu, na kterém konvergenci vyšetřujeme. Největší množinu (vzhledem k množinové inkluzi), na níž posloupnost funkcí bodově konverguje, nazýváme *oborem konvergence* posloupnosti funkcí $\{f_n(x)\}$. Stejně definujeme obor konvergence řady funkcí $\sum f_n(x)$.

Příklad 5.2. Určete obor konvergence řady:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2 x}\,.$$

Řešení. Postupujeme tak, že proměnnou x považujeme za parametr a pro toto x vyšetřujeme absolutní konvergenci, příp. konvergenci, číselné řady.

a) Podle podílového kritéria pro číselné řady platí

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\,\frac{n(n+1)}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}\,|x| = |x|.$$

Proto řada konverguje pro $|x| < 1$. Jestliže $|x| = 1$, nelze podílovým kritériem o konvergenci rozhodnout, proto je třeba vyšetřit body $x = \pm 1$ zvlášť.

Je-li $x = 1$, dostáváme řadu $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ a tato řada je konvergentní (viz Příklad 1.2). Je-li $x = -1$, dostáváme řadu $\sum (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$, která konverguje absolutně. Pro $|x| > 1$ není splněna nutná podmínka konvergence.

Oborem konvergence dané řady je interval $[-1, 1]$, přičemž konvergence je absolutní.

b) V tomto případě se jedná pro všechna $x \in \mathbb{R}$ o řadu s kladnými členy; použijeme odmocninové kritérium a dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mathrm{e}^{-n^2x}} = \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-nx} = 0 < 1 \qquad \text{pro } x > 0.$$

Pro $x = 0$ dostáváme řadu $\sum 1$, která diverguje, a pro $x < 0$ řadu $\sum \mathrm{e}^{n^2|x|}$, která je také divergentní. Oborem konvergence dané řady je interval $(0, \infty)$.

5.2. Stejnoměrná konvergence

Jednou ze základních otázek v teorii posloupností a řad funkcí je, nakolik se vlastnosti členů posloupnosti přenášejí na limitní funkci, resp. součet řady. U některých vlastností nevyvstávají větší obtíže.Například limita posloupnosti (součet řady) nezáporných funkcí je zřejmě také nezáporná funkce; z vlastností posloupností reálných čísel rovněž plyne, že limita posloupnosti (součet řady) neklesajících funkcí je rovněž neklesající funkce. Oproti tomu, jak ukazuje Příklad 5.1, se na limitní funkci obecně nepřenáší velmi důležitá vlastnost, kterou je spojitost.

Tím je motivována následující definice „silnějšího typu“ konvergence, kterou je stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí:

Definice 5.3. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně* k funkci $f(x)$ na intervalu I, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a všechna $x \in I$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na I.

Poznámka 5.1. Se stejnoměrnou konvergencí spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ jsme se setkali již v teorii metrických prostorů, kde jsme vyšetřovali metrický prostor $(C[a, b], \rho_c)$ (viz [3], str. 8, 22). Připomeňme, že $C[a, b]$ je množina reálných spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ a ρ_c je metrika tzv. stejnoměrné konvergence

$$\rho_c(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Ukažme, že tato definice je ekvivalentní s Definicí 5.3. V metrickém prostoru $(C[a, b], \rho_c)$ posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkci f, tj. $f_n(x) \xrightarrow{\rho_c} f(x)$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \rho_c(f_n, f) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \max\nolimits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0 \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \text{ platí } \max\nolimits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \text{ a } \forall x \in [a, b] \text{ platí } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

což je Definice 5.3. Obecně lze v terminologii metrických prostorů definovat stejnoměrnou konvergenci jako konvergenci v prostoru ohraničených funkcí na intervalu I se suprémovou metrikou (viz [3, strana 15]).

Geometrický význam stejnoměrné konvergence $f_n \rightrightarrows f$ spočívá v tom, že od určitého indexu n_0 všechny další členy posloupnosti „leží v epsilonovém okolí“ limitní funkce f, tj. mezi grafy funkcí $f - \varepsilon$ a $f + \varepsilon$.

Srovnejme definici bodové a stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí.

▷ Bodová konvergence ($f_n \to f$):

$$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon \in R, \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

▷ Stejnoměrná konvergence ($f_n \rightrightarrows f$):

$$(\forall \varepsilon \in R, \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Vidíme, že se oba pojmy od sebe liší pouze v „pořadí kvantifikátorů“ – zatímco v definici stejnoměrné konvergence závisí číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ pouze na volbě čísla $\varepsilon > 0$, v definici bodové konvergence je n_0 závislé i na bodě $x \in I$. Proto ze stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{f_n\}$ k funkci f na I plyne bodová konvergence k f na I. Opak obecně neplatí, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 5.3. Rozhodněte, zda posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$$

stejnoměrně konverguje na intervalu $[0, 1]$.

Řešení. Pro každé $x \in [0, 1]$ platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{1 + n^2x^2} = 0.$$

Limitní funkcí posloupnosti je tedy $f(x) = 0$. Zjistěme, zda se jedná o stejnoměrnou konvergenci. Buď si přímo všimneme, že $f_n(\frac{1}{n}) = 1$ nebo postupujeme jako při hledání absolutního extrému funkce $y = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ na $[0, 1]$: určíme první derivace a zjistíme, v kterých bodech je rovna nule. Platí

$$\left(\frac{2nx}{1 + n^2x^2}\right)' = \frac{2n(1 - n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)^2} = 0$$

pro $x = \frac{1}{n}$ a $x = -\frac{1}{n}$, přičemž hodnota $-\frac{1}{n}$ neleží ve vyšetřovaném intervalu. Pro $x = \frac{1}{n}$ dostaneme uvedenou hodnotu $f_n(\frac{1}{n}) = 1$.

Je-li nyní $0 < \varepsilon < 1$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x = \frac{1}{n} \in [0, 1)$ platí, že

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{2nx}{1 + n^2x^2} - 0\right| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 > \varepsilon.$$

Proto není daná posloupnost stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$.

Stejnoměrnou konvergenci řady funkcí definujeme již snadno pomocí posloupnosti jejích n-tých částečných součtů.

Definice 5.4. Řekneme, že řada funkcí $\sum f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na intervalu* I ke svému součtu $s(x)$, jestliže posloupnost $\{s_n(x)\}$ jejích částečných součtů stejnoměrně konverguje na I k funkci $s(x)$.

5.3. Kritéria stejnoměrné konvergence

V tomto odstavci uvedeme kritéria pro vyšetřování stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí a zejména řady funkcí. Následující dvě tvrzení mají spíše teoretický význam a užívají se zejména v důkazech dalších kritérií a vět.

Lemma 5.1 (Cauchyovo-Bolzanovo kritérium stejnoměrné konvergence). *Posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}$ konverguje stejnoměrně na intervalu I právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$ a pro všechna $x \in I$ platí $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.*

Důkaz. Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na I a buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \geq n_0$ a $x \in I$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy pro $m \geq n_0, n \geq n_0$ a $x \in I$ platí $|f_m(x) - f_n(x)| = |f_m(x) - f(x) - [f_n(x) - f(x)]| \leq |f_m(x) - - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Nechť je splněna podmínka věty. Volíme-li libovolně, ale pevně, bod $x_0 \in I$, vidíme, že číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}$ je cauchyovská a tedy konvergentní. Je tedy $\{f_n(x)\}$ bodově konvergentní na I. Označme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$; nyní dokážeme, že $f_n \rightrightarrows f$ na I. Buď tedy $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $m \geq n_0, n \geq n_0$ a všechna $x \in I$ platí $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Limitním přechodem pro $m \to \infty$ odtud plyne $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Tedy opravdu $f_n \rightrightarrows f$ na I. $\square$

Lemma 5.2 (Cauchyovo-Bolzanovo kritérium pro řady funkcí). *Řada funkcí $\sum f_n(x)$ je na intervalu I stejnoměrně konvergentní právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, libovolné $m \in \mathbb{N}$ a a každé $x \in I$ platí*

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon\ .$$

Důkaz. Podle definice řada $\sum f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na I k $s(x)$ právě tehdy, když posloupnost částečných součtů $s_n(x)$ řady $\sum f_n(x)$ stejnoměrně konverguje k $s(x)$. Podle předchozího lemmatu je tato podmínka splněna právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, libovolné $m \in \mathbb{N}$ a pro všechna $x \in I$ platí

$$|s_{n+m}(x) - s_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon.$$

$\square$

Věta 5.1 (Weierstrassovo kritérium). *Nechť $\{f_n(x)\}$ je posloupnost funkcí na I. Nechť existuje posloupnost nezáporných čísel $\{a_n\}$ taková, že řada $\sum a_n$ konverguje a platí*

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \text{pro všechna } x \in I \text{ a } n \in \mathbb{N}.$$

Pak řada $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu I.

Důkaz. Nechť jsou splněny podmínky věty. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle Lemmatu 1.1 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \geq n_0$ a libovolné $m \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} + a_{n+2} + + \cdots + a_{n+m} < \varepsilon$. Pak pro $n \geq n_0$, libovolné $m \in \mathbb{N}$ a každé $x \in I$ platí

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+m}(x)| \leq a_{n+1} + \cdots + a_{n+m} < \varepsilon.$$

Tvrzení nyní plyne z Lemmatu 5.2. $\square$

Příklad 5.4. Rozhodněte, zda je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$.

Řešení. Pro všechna $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ platí $|\sin nx| \le 1$, a proto

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}\,.$$

Číselná řada $\sum \frac{1}{n^2}$ je konvergentní (viz Příklad 2.1), proto podle Věty 5.1 řada $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

Weierstrassovo kritérium je dobře prakticky použitelné, dává však pouze postačující podmínku stejnoměrné konvergence. K formulaci dalších kritérií, jejichž důkaz lze nalézt např. v [8, 18], zaveďme následující pojmy:

O posloupnosti funkcí $\{f_n(x)\}$ řekneme, že je na intervalu I *neklesající*, resp. *nerostoucí*, jestliže je číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}$ neklesající, resp. nerostoucí pro všechna $x_0 \in I$. Posloupnost funkcí, která je buď neklesající, nebo nerostoucí na I, se nazývá monotonní na I.

O posloupnosti funkcí $\{f_n(x)\}$ řekneme, že je na intervalu I *stejnoměrně ohraničená*, jestliže existuje $k \in \mathbb{R},\ k > 0$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in I$ platí $|f_n(x)| \le k$.

Věta 5.2 (Dirichletovo a Abelovo kritérium). *Nechť $\{f_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$ jsou posloupnosti funkcí na I, $\{g_n(x)\}$ je monotonní na I. Nechť je splněna některá z následujících podmínek:*

1. *(Dirichlet) Řada $\sum f_n(x)$ má stejnoměrně ohraničenou posloupnost částečných součtů a $g_n(x) \rightrightarrows 0$ na I;*

2. *(Abel) Řada $\sum f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na I a posloupnost $\{g_n(x)\}$ je stejnoměrně ohraničená na I.*

Potom řada $\sum f_n(x)g_n(x)$ stejnoměrně konverguje na I.

Z Dirichletova kritéria plyne následující kritérium:

Důsledek 5.1. *Nechť posloupnost částečných součtů řady $\sum f_n(x)$ je stejnoměrně ohraničená na intervalu I a nechť $\{a_n\}$ je monotonní číselná posloupnost taková, že $\lim a_n = 0$. Pak řada $\sum a_n f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na I.*

Příklad 5.5. Dokažte, že řada $\sum \frac{\sin nx}{n}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[\delta, 2\pi - \delta]$, kde $\delta \in \mathbb{R},\ 0 < \delta < \pi$ (viz Obr. 5.2, 5.3).

Řešení. V Příkladu 3.5-a) jsme dokázali, že daná řada konverguje na $\mathbb{R}$. Vyšetřeme nyní stejnoměrnou konvergenci. Položme $f_n(x) = \sin nx$, $a_n = \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Podle Příkladu 3.5 je

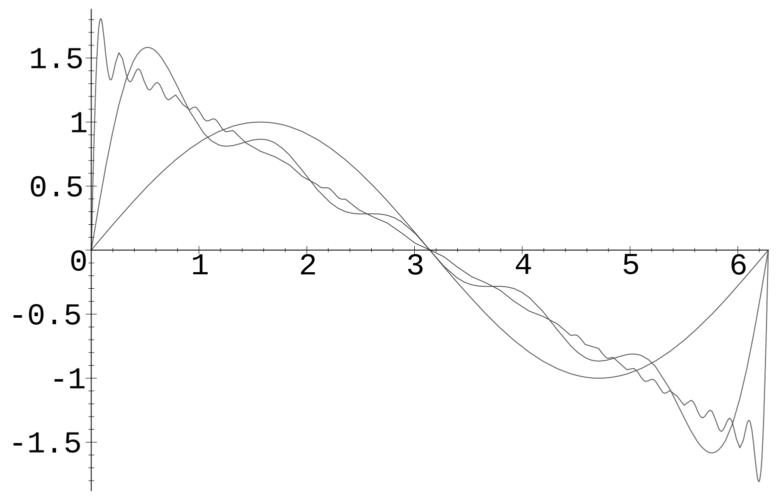
$$s_n(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x},$$

takže

$$|s_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \qquad \text{pro } x \in [\delta, 2\pi - \delta].$$

Posloupnost $\{a_n\}$ je zřejmě nerostoucí a $\lim a_n = 0$, a proto podle Důsledku 5.1 konverguje řada $\sum \frac{\sin nx}{n}$ stejnoměrně na intervalu $[\delta, 2\pi - \delta]$.

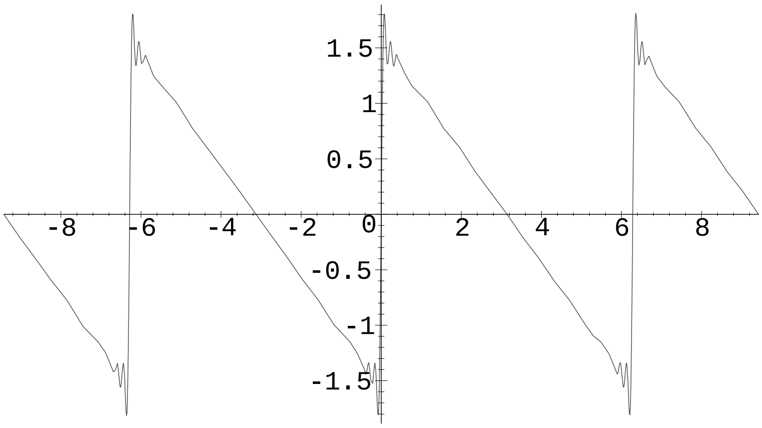
Z obrázku 5.3 je vidět, že v bodech $x = k\pi$, kde $k \in \mathbb{N}$, se funkce bude „trhat“ a součet řady není v těchto bodech spojitou funkcí. Poznamenejme, že uvedená řada se nazývá Fourierovou řadou a její součet je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{2}(\pi - x)$ pro $x \in (0, 2\pi)$ (viz cvičení 8.12).



Obr. 5.2: n-tý částečný součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ pro $n = 1, 4, 35$, $x \in [0, 2\pi]$

Obrázky 5.2 a 5.3 byly vygenerovány pomocí procedury `CSsoucetR`:

```
> CSoucetR := proc (fce, p, i, rp, ri)
> RETURN(display(seq(plot(unapply(sum(fce,i
> = 1 .. o),p)(p),p = rp,labels = [‘‘, ‘‘],
> discont=true), o = ri)))
> end:
> with(plots):
```



Obr. 5.3: n-tý částečný součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ pro $n = 45$

```
> s1:=CSoucetR(sin(n*x)/n,x,n,0..2*Pi,1):
> s2:=CSoucetR(sin(n*x)/n,x,n,0..2*Pi,4):
> s3:=CSoucetR(sin(n*x)/n,x,n,0..2*Pi,35):
> display(s1,s2,s3);
> CSoucetR(sin(n*x)/n,x,n,-3*Pi..3*Pi,45);
```

K vytváření animovaných obrázků můžeme použít proceduru `AnimR`:

```
> AnimR := proc (fce, p, i, rp, poc)
> RETURN(animate(unapply(sum(fce,i=1 .. o),p)(p),
> p = rp,o = 1 .. poc, frames = poc))
> end;
```

Řadu pěkných příkladů na stejnoměrnou konvergenci číselných řad je možno najít na adrese http://adela.karlin.mff.cuni.cz/kam/˜pyrih/animace/k0061/kapitola.htm.

Nejjednodušším kritériem pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti je patrně následující upravený „přepis definice“:

Věta 5.3. *Nechť* $\{f_n(x)\}$ *je posloupnost funkcí na* I *a*

$$a_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|;\, x \in I\}.$$

Platí $f_n \rightrightarrows f$ *na* I*, právě když je posloupnost* $\{a_n\}$ *nulová, tj.* $\lim a_n = 0$.

Příklad 5.6. Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci následujících posloupností:

a) $f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1)$ b) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx, \quad x \in \mathbb{R}$.

Řešení. a) Pro každé $x \in [0,1)$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$. Limitní funkcí posloupnosti $\{x^n\}$ je tedy $f(x) = 0$. Avšak $a_n = \sup\{|x^n|;\ x \in [0,1)\} = 1$, a proto podle Věty 5.3 není posloupnost $\{x^n\}$ stejnoměrně konvergentní na $[0,1)$.

b) Podle Příkladu 5.1 b) platí

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Avšak pro $n \in \mathbb{N}$ libovolné platí

$$a_n = \sup\{|\operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x)|;\ x \in \mathbb{R}\} = \frac{\pi}{2},$$

a proto podle Věty 5.3 není daná posloupnost stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$. Jiné zdůvodnění, že tato posloupnost není stejnoměrně konvergentní, ukážeme v následujícím odstavci pomocí spojitosti.

5.4. Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností a řad funkcí

Stejnoměrná konvergence je v teorii funkčních řad a posloupností velmi důležitá. Na Příkladu 5.1 jsme ukázali, že bodová konvergence není dostatečnou podmínkou k tomu, aby se některé důležité vlastnosti, jako je spojitost funkce, přenášely na limitní funkci. V tomto odstavci ukážeme několik nejdůležitějších vlastností stejnoměrně konvergentních posloupností a řad. Nejprve se budeme zabývat otázkou spojitosti, integrace a derivace pro posloupnosti funkcí a poté stejným problémem pro řadu funkcí.

Věta 5.4. *Nechť posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}$ stejnoměrně konverguje na intervalu I k funkci f. Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité na I, je i $f(x)$ spojitá na I.*

Důkaz. Nechť $x_0 \in I$. Buď $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a pro všechna $x \in I$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$; speciálně tedy platí $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro všechna $x \in I$. Funkce f_{n_0} je spojitá na I, tedy i v bodě x_0; proto k číslu $\frac{\varepsilon}{3}$ existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0) \cap I$. Odtud plyne pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \cap I$ vztah $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, což dokazuje spojitost funkce f v bodě x_0. Bod x_0 byl však libovolný, a proto je f spojitá na I. □

Příklad 5.7. Uvažujme posloupnosti funkcí z Příkladu 5.1:

$$a)\ f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1] \qquad b)\ f_n(x) = \operatorname{arctg} nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funkce x^n jsou spojité, avšak jejich limita není spojitá na $[0, 1]$. Proto posloupnost $\{x^n\}$ nemůže být na tomto intervalu stejnoměrně konvergentní.

Podobně plyne, že posloupnost $\{\operatorname{arctg} nx\}$ není stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$.

Věta 5.4 říká, že stejnoměrná konvergence je dostatečnou podmínkou pro to, aby limita posloupnosti spojitých funkcí byla spojitá. Následující věta ukáže, že v případě monotonní posloupnosti je předpoklad stejnoměrné konvergence nutný. Důkaz lze nalézt v [8, 15].

Věta 5.5 (Diniho). *Buď $\{f_n(x)\}$ monotonní posloupnost spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ a nechť $f_n \to f$ na I. Je-li funkce f spojitá na $[a, b]$, pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.*

Věta 5.6. *Nechť posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}$ stejnoměrně konverguje na intervalu $[a, b]$ k funkci f. Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ integrovatelné na $[a, b]$, je i $f(x)$ integrovatelná na $[a, b]$ a platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$, tj.*

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $\frac{\varepsilon}{4(b-a)} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a všechna $x \in [a, b]$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Vyberme takové $n \geq n_0$ pevně; tedy pro všechna $x \in [a, b]$ platí $f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Odtud mj. plyne, že f je ohraničená na $[a, b]$, neboť f_n je ohraničená. Protože f_n je integrovatelná na $[a, b]$, k číslu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ intervalu $[a, b]$ takové, že $S(D, f_n) - s(D, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, kde $S(D, f_n)$, $s(D, f_n)$ je dolní a horní součet f_n při dělení D (viz např. [14]). Označíme-li $m_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $M_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $n_i = \inf\{f_n(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $N_i = \sup\{f_n(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, plyne z předchozích nerovností $n_i - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq m_i \leq M_i \leq N_i + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ pro všechna $i = 1, \dots, k$ a tedy i $M_i - m_i \leq N_i - n_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Vynásobíme-li tuto nerovnost kladným číslem $(x_i - x_{i-1})$ a sečteme-li všechny takto vzniklé nerovnosti pro $i = 1, \dots, k$, obdržíme

$$S(D, f) - s(D, f) \leq S(D, f_n) - s(D, f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) =$$
$$S(D, f_n) - s(D, f_n) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Je tedy f integrovatelná na $[a, b]$.

Buď nyní opět $\varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a všechna $x \in [a, b]$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Tedy pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

tj. $\lim \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Lemma 5.3. *Buď I interval, $x_0 \in I$ a $\{f_n(x)\}$ posloupnost funkcí, která stejnoměrně konverguje na $I \setminus \{x_0\}$ k funkci $f(x)$*[1]*. Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$. Pak existuje $\lim a_n$ a platí $\lim a_n = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, tj.*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right).$$

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle Cauchyova-Bolzanova kritéria k číslu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $m \geq n_0$, $n \geq n_0$ a všechna $x \in I \setminus \{x_0\}$ platí $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy i $\lim\limits_{x\to x_0} |f_m(x) - f_n(x)| = |a_m - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ pro $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, takže číselná posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská, a proto také konvergentní. Označme $\lim a_n = a$ a ukažme, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

Buď opět $\varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \geq n_1$ a všechna $x \in I \setminus \{x_0\}$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Protože $\lim a_n = a$, existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \geq n_2$ platí $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}$. Položme $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ a zvolme libovolně, ale pevně $n \geq n_3$. Protože $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$, k číslu $\frac{\varepsilon}{3}$ existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \cap I$, $x \neq x_0$ platí $|f_n(x) - a_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. Tedy pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \cap I$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - a| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, což dokazuje vztah $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. □

Věta 5.7. *Buď $\{f_n(x)\}$ posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu I derivaci. Nechť $\{f_n(x)\}$ konverguje na I a $\{f_n'(x)\}$ konverguje stejnoměrně na I. Pak funkce $f(x) = \lim f_n(x)$ má na I derivaci a platí $f'(x) = \lim f_n'(x)$, tj.*

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

[1] stejnoměrnou konvergencí na množině $I \setminus \{x_0\}$ rozumíme stejnoměrnou konvergenci na intervalech určených touto množinou

Důkaz. Buď $x_0 \in I$ libovolný, ale pevný bod. Chceme dokázat, že $f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x_0)$, tj.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}.$$

Ukážeme, že posloupnost $\left\{\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}\right\}$ stejnoměrně konverguje na $I \setminus \{x_0\}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné; protože $\{f'_n(x)\}$ konverguje stejnoměrně na I, k číslu $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $m \geq n_0$, $n \geq n_0$ a všechna $x \in I$ platí $|f'_m(x) - f'_n(x)| < \varepsilon$. Volme pro okamžik $m \geq n_0$, $n \geq n_0$ pevně a $x \in I$, $x \neq x_0$. Podle Lagrangeovy věty existuje číslo c mezi x_0 a x tak, že platí $(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(x_0) - f_n(x_0)) = \left(f'_m(c) - f'_n(c)\right)(x - x_0)$. Odtud plyne

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}\right| = \\
&= \left|\frac{1}{x - x_0}\left((f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))\right)\right| = \left|f'_m(c) - f'_n(c)\right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Proto je posloupnost $\left\{\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}\right\}$ podle Cauchyova-Bolzanova kritéria (Lemma 5.1) stejnoměrně konvergentní na $I \setminus \{x_0\}$.

Nyní zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $\lim_{x\to x_0} \frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} = f'_n(x_0)$.

Podle Lemmatu 5.3 existuje $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ a platí

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f'_n(x_0) &= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).
\end{aligned}$$

Bod $x_0 \in I$ byl libovolný, tedy pro každé $x \in I$ platí $f'(x) = \lim f'_n(x)$. □

Nyní uvedeme věty o spojitosti, integraci a derivaci řady funkcí, které budeme později používat u mocninných řad. Tyto věty dávají velmi mocný nástroj pro práci s nekonečnými řadami tím, že umožňují integrovat, resp. derivovat, stejnoměrně konvergentní řady „člen po členu“.

Věta 5.8. *Nechť řada funkcí* $\sum f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na intervalu* I *a má součet* $s(x)$. *Jsou-li všechny funkce* $f_n(x)$ *spojité na* I, *pak je i* $s(x)$ *spojitá na* I.

Důkaz. Nechť $\{s_n\}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum f_n(x)$. Podle předpokladu je $s_n \rightrightarrows s$ na I. Avšak každá funkce s_n, jakožto součet konečného počtu funkcí spojitých na I, je spojitá na intervalu I. Tvrzení nyní plyne z Věty 5.4. $\square$

Věta 5.9. *Nechť řada funkcí* $\sum f_n(x)$ *stejnoměrně konverguje na intervalu* $[a, b]$ *a má součet* $s(x)$. *Jsou-li všechny funkce* $f_n(x)$ *integrovatelné na* $[a, b]$, *je i* $s(x)$ *integrovatelná na* $[a, b]$ *a platí*

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \textit{tj.} \qquad \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Je-li $\{s_n(x)\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum f_n(x)$, pak $s_n \rightrightarrows s$ na $[a, b]$. Každá funkce $s_n(x)$ však, jakožto součet konečného počtu integrovatelných funkcí, je integrovatelná na $[a, b]$. Podle Věty 5.6 je $s(x)$ integrovatelná na $[a, b]$. Dále podle téhož tvrzení je

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_1(x) + \cdots + f_n(x)]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

Příklad 5.8. Je dána řada funkcí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n \cos nx = s(x)$, kde $0 < r < 1$. Ukažte, že je funkce $s(x)$ spojitá na $\mathbb{R}$, a určete $\int_0^{2\pi} s(x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Ukažme nejprve, že je daná řada stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$. K tomu použijme Weierstrassovo kritérium: platí $|r^n \cos nx| \le r^n$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, přičemž řada $\sum r^n$ je geometrická řada s kvocientem $|r| < 1$, tj. je konvergentní na $\mathbb{R}$.

Protože daná řada je stejnoměrně konvergentní a funkce $r^n \cos nx$ jsou spojité na $\mathbb{R}$, je spojitá i funkce $s(x)$. K integraci použijeme Větu 5.9 a dostáváme

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos nx\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} r^n \cos nx\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} r^n \cos nx\,\mathrm{d}x = 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Věta 5.10. *Buď $\{f_n(x)\}$ posloupnost funkcí majících na otevřeném intervalu I derivaci. Nechť $\sum f_n(x)$ konverguje na I a $\sum f_n'(x)$ konverguje stejnoměrně na I. Pak funkce $s(x) = \sum f_n(x)$ má na I derivaci a platí*

$$s'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Důkaz. Nechť $\{s_n\}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum f_n(x)$. Pak $\{s_n\}$ konverguje na I a $\{s_n'\}$ stejnoměrně konverguje na I. Podle Věty 5.7 má funkce $s(x) = \sum f_n(x)$ derivaci na I a platí

$$s'(x) = \lim_{n\to\infty} s_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f_1'(x) + \cdots + f_n'(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

□

Poznámka 5.2. Za silnějšího předpokladu než je uveden ve Větě 5.10 – mají-li funkce $f_n(x)$ spojitou derivaci na otevřeném intervalu I – lze dokázat uvedené tvrzení bez použití Lemmatu 5.3 a Věty 5.7 takto:

Nechť $s(x) = \sum f_n(x)$, $S(x) = \sum f_n'(x)$. Pak funkce $S(x)$ je podle Věty 5.8 spojitá na I. Zvolme $x_0, x_1 \in I$, $x_1 > x_0$, libovolné. Podle Věty 5.9 je $S(x)$ integrovatelná na $[x_0, x_1]$ a platí

$$\int_{x_0}^{x_1} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} \sum f_n'(x)\,\mathrm{d}x = \sum \int_{x_0}^{x_1} f_n'(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \sum \left(f_n(x_1) - f_n(x_0)\right) = \sum f_n(x_1) - \sum f_n(x_0) = s(x_1) - s(x_0).$$

Jelikož je $S(x)$ spojitá, má funkce $\int_{x_0}^{x} S(t)\,\mathrm{d}t = s(x) - s(x_0)$ podle věty o integrálu jako funkci horní meze (viz [13]) derivaci na I a platí $S(x) = s'(x)$, tj. $\sum f_n'(x) = s'(x)$.

Cvičení

5.1. Určete limitu $f(x)$ následujících posloupností $\{f_n(x)\}$ a rozhodněte, zda se jedná o stejnoměrnou konvergenci na intervalu I:

a) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $I = [0, 1]$

b) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, $I = [1, \infty)$

c) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}$, $I = \mathbb{R}$.

5.2. Určete obor konvergence následujících řad $\sum f_n(x)$:

a) $f_n(x) = (\ln x)^n$

b) $f_n(x) = x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$

c) $f_n(x) = \frac{n}{n+1} \frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}$.

5.3. Pomocí Weierstrassova kritéria dokažte stejnoměrnou konvergenci následujících řad $\sum f_n(x)$:

a) $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$, $I = [-1, 1]$

b) $f_n(x) = \frac{x^n}{n^s}$, $s \in \mathbb{R}$, $I = [-1, 1]$

c) $f_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}$, $I = [-1, 1]$

d) $f_n(x) = \frac{e^{-x^2 n^2}}{n^2}$, $I = \mathbb{R}$

e) $f_n(x) = \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, $I = [0, \infty)$

f) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^2}$, $I = [0, \infty)$.

5.4. Dokažte stejnoměrnou konvergenci následujících řad $\sum f_n(x)$:

a) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $I = \mathbb{R}$

b) $f_n(x) = \ln\left(1+\frac{x^2}{n \ln^2 n}\right)$, $|x| < a$, $a \in \mathbb{R}$

c) $f_n(x) = \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$, $I = [0, \infty)$

d) $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}}$, $I = [0, \infty)$.

5.5. Určete součet řady funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos nx = s(x)$, kde $0 < r < 1$, a ověřte, že funkce $s(x)$ je spojitá na $\mathbb{R}$ (viz Příklad 5.8).
Návod: Sečtěte řadu $\sum_{n=0}^{\infty}(r^n \cos nx + ir^n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty}(re^{ix})^n$.

5.6. Je dána řada $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$. Rozhodněte, zda je tato řada stejnoměrně konvergentní na $[\delta, \infty)$, $\delta > 0$, a určete

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} \, dx .$$

Není nic praktičtějšího než dobrá teorie.

Kapitola 6

Mocninné řady

V předcházející kapitole jsme vyšetřovali řady funkcí $\sum f_n(x)$, jejíž členy jsou funkce $f_n(x)$ definované na intervalu I. Jestliže za funkce $f_n(x)$ zvolíme mocninné funkce $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, pak takto vzniklou řadu budeme nazývat *mocninnou řadou*. V této kapitole uvidíme, že obor konvergence mocninné řady je jednobodová množina nebo interval. Ukážeme, že mocninné řady jsou stejnoměrně konvergentní na každém kompaktním podintervalu tohoto intervalu. Jak plyne z předcházející kapitoly, tato vlastnost umožňuje integrovat a derivovat mocninné řady člen po členu. V oddíle 6.3 ukážeme, jak lze funkce vyjádřit pomocí mocninných řad.

6.1. Obor konvergence

Definice 6.1. Buď $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel, x_0 libovolné reálné číslo. *Mocninnou řadou* se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Poznámka 6.1. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že středem mocninné řady je číslo $x_0 = 0$. Jinak pomocí substituce $x - x_0 = y$ lze převést řadu o středu v bodě x_0 na mocninnou řadu o středu v počátku.

Věta 6.1. *Nechť* $\sum a_n x^n$ *je mocninná řada a nechť*

$$a = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}\ .$$

Je-li $a = 0$*, pak řada absolutně konverguje pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *– říkáme, že řada vždy konverguje.*

Je-li $a = \infty$*, pak řada diverguje pro všechna* $x \neq 0$ *– říkáme, že řada vždy diverguje.*

Je-li $0 < a < \infty$*, pak řada absolutně konverguje pro* $|x| < \frac{1}{a}$ *a diverguje pro* $|x| > \frac{1}{a}$.

Je-li $0 < a < \infty$, pak se číslo $r = \frac{1}{a}$ nazývá *poloměr konvergence* a interval $(-r, r)$ se nazývá *konvergenční interval*. Chování řady v krajních bodech konvergenčního intervalu je třeba vyšetřit zvlášť, protože závisí na tvaru mocninné řady. Oborem konvergence mocninné řady, která vždy nediverguje, je proto konvergenční interval s případnými jeho krajními body, pokud v nich řada konverguje.

Jestliže řada $\sum a_n x^n$ vždy konverguje, tj. $a = 0$, definujeme její poloměr konvergence jako $r = \infty$ a její konvergenční interval jako $(-\infty, \infty)$.

Jestliže řada $\sum a_n x^n$ vždy diverguje, tj. $a = \infty$, definujeme její poloměr konvergence jako $r = 0$.

Důkaz Věty 6.1. Nejprve poznamenejme, že každá mocninná řada $\sum a_n x^n$ konverguje ve svém středu, tj. v bodě $x = 0$. Pro lepší srozumitelnost provedeme důkaz za silnějšího předpokladu, kdy existuje $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$. Obecný případ lze dokázat obdobně; podrobný důkaz viz např. [8].

Nechť $x \neq 0$ je libovolné pevné číslo. Položme $c_n = a_n x^n$ a vyšetřujme absolutní konvergenci číselné řady $\sum c_n$. Podle odmocninového kritéria tato řada absolutně konverguje, jestliže platí

$$\lim \sqrt[n]{|c_n|} = \lim \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim \sqrt[n]{|a_n||x|^n} = |x| \lim \sqrt[n]{|a_n|} = |x| a < 1.$$

Rozlišme tři případy:

(i) Je-li $a = 0$, pak $\lim \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ a řada $\sum c_n = \sum a_n x^n$ konverguje absolutně v každém bodě $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Je-li $a = \infty$, je $\lim \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$ pro všechna $x \neq 0$, tj. řada diverguje pro všechna $x \neq 0$.

(iii) Nechť $0 < a < \infty$. Pak

$$\lim \sqrt[n]{|c_n|} = |x| a < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{a} = r,$$

odkud plyne, že řada $\sum c_n = \sum a_n x^n$ konverguje absolutně pro $|x| < r$ a diverguje pro $|x| > r$. □

Poznámka 6.2. Existuje-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = a$, pak má mocninná řada $\sum a_n x^n$ poloměr konvergence

$$r = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(přitom klademe $r = \infty$, je-li $a = 0$, a $r = 0$, je-li $a = \infty$).

Podle Poznámky 2.1 platí, že existuje-li $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$, pak existuje také $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ a obě jsou si rovny. Proto pokud existuje tato limita, lze poloměr konvergence určit jako

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

Příklad 6.1. Určete poloměr a obor konvergence následujících mocninných řad:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n+\sqrt{n}}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n}$.

Řešení. a) Platí $a_n = \frac{1}{n}$, a proto poloměr konvergence je

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

tj. pro $x \in (-1, 1)$ řada absolutně konverguje. Je-li $x = -1$, dosazením do dané řady dostaneme Leibnizovu řadu $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, která je konvergentní (viz Příklad 3.1). Je-li $x = 1$, pak dostaneme harmonickou řadu $\sum \frac{1}{n}$, která je divergentní (Příklad 1.4). Obor konvergence je interval $[-1, 1)$.

Řešme nyní tento příklad s využitím Maplu, nejdříve opět metodou „krok za krokem“.

```
> a:=n->1/n: rada:=Sum(a(n)*x^n, n=1..infinity);
```

$$rada := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Pro poloměr konvergence dostáváme:

```
> Limit(abs(a(n)/a(n+1)), n=infinity):%=value(%);
```

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1$$

Vyšetříme nyní krajní body intervalu $(-1, 1)$. Dosazením krajních bodů do dané řady dostáváme číselné řady – o jejich konvergenci, resp. divergenci rozhodneme pomocí procedury `csum`. Procedura vrací hodnotu `true` (řada konverguje) nebo `false` (řada divirguje).

```
> read 'csum4.txt':
```

```
> k1:=subs(x=-1, rada);csum(op(1,k1), n);
```

$$k1 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$true$$

```
> k2:=subs(x=1, rada);csum(op(1,k2), n);
```

$$k2 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$false$$

Tedy oborem konvergence je interval $[-1, 1)$.

Nyní se pokusíme výpočet poloměru konvergence zautomatizovat pomocí nových procedur. Uvádíme nejdříve procedury pomocné (používají se v případě, že střed mocninné řady není v bodě 0), vlastní výpočet pak provádí procedura `Polomer(rada)`. Parametr `rada` zadáváme ve tvaru $a_n x^n$, případně ve tvaru $a_n(x - x_0)^n$.

```
> NalezniStred := proc (rada)
> local pocet, i, poradi, stred;
> pocet := nops(rada);
> for i to pocet do if subs(x = 0,op(i,rada)) <>
> subs(x = 1,op(i,rada)) then
> poradi := i fi
> od;
> stred:= -op(1,subs(x = 0,op(poradi,rada)));
> stred
> end:
```

```
> PrevedNaStred := proc (rada)
> local stred, i, pocet, poradi,mocnina, vysledek;
> pocet := nops(rada); for i to pocet do if
> subs(x = 0,op(i,rada)) <> subs(x = 1,op(i,rada))
> then poradi := i
> fi od;
> stred := NalezniStred(rada);
> mocnina := op(2,op(poradi,rada));
> if type(rada,`^`)
> then vysledek := x^op(2,rada)
> else
> vysledek := rada/op(poradi,rada)*x^mocnina fi;
> vysledek
> end:
> Polomer := proc (a)
> local r, nrada, i, pocet, poradi,
> mocnina, y, f, g;
> nrada := PrevedNaStred(a); pocet := nops(nrada);
> for i to pocet do  if
> subs(x = 0,op(i,nrada))<>subs(x = 1,op(i,nrada))
> then poradi := i fi od;
> mocnina := op(poradi,nrada);
> if type(nrada,`^`) then r := 1 else
> nrada :=nrada/mocnina;
> f:= solve({y = op(2,mocnina)},{n});
> g := subs(y = n,op(2,op(f)));
> nrada := subs(n = g,nrada);
> r := limit(abs(nrada/subs(n = n+1,nrada)),
> n = infinity)
> fi;
> end:
```

Řešení příkladu 6.1. a) s využitím těchto procedur vypadá takto

```
> Polomer(op(1,rada));
```

$$1$$

tj. poloměr konvergence je $r = 1$. K určování poloměru konvergence je možno použít i proceduru `PSconv` z balíku `math` [19].

```
> with(math):#pouze, pokud je balík instalován
> PSconv(rada);
```

$$1$$

b) Pro poloměr konvergence platí

$$r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n (n+1)^2}{n^2 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

V krajních bodech intervalu $x = \pm\frac{1}{2}$ dostáváme řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

které konvergují. Proto je oborem konvergence interval $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

K řešení dále využíváme obě výše uvedené procedury.

```
> rada:=Sum(2^n*x^n/(n^2), n=1..infinity);
```

$$rada := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, x^n}{n^2}$$

```
> Polomer(op(1,rada));
```

$$\frac{1}{2}$$

```
> k1:=subs(x=-1/2,rada);csum(op(1,k1),n);
```

$$k1 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \left(\frac{-1}{2}\right)^n}{n^2}$$

$$true$$

```
> k2:=subs(x=1/2,rada);csum(op(1,k2),n);
```

$$k2 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^2}$$

$$true$$

Znamená to, že v krajních bodech $x = \pm\frac{1}{2}$ řada konverguje, tj. oborem konvergence je interval $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

c) Pro tuto řadu je $a_n = \frac{n}{n!}$, a proto

$$r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{n(n+1)!}{n!(n+1)} = \lim n = \infty.$$

Obor konvergence je interval $(-\infty, \infty)$ – řada vždy konverguje.

```
> rada:=Sum(n*x^n/(n!), x=1..infinity);
```

$$rada := \sum_{x=1}^{\infty} \frac{n\,x^n}{n!}$$

Použijeme-li proceduru `PSconv` autora A. F. Walze dostáváme chybný výsledek:

```
> PSconv(rada);
```

$$1$$

Námi uvedená procedura `Polomer` dává

```
> Polomer(op(1,rada));
```

$$\infty$$

což je správný výsledek.

d) Střed této řady je bod $x_0 = -2$ a poloměr konvergence

$$r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{n}} = 1.$$

Konvergenční interval je proto $x \in (-3,-1)$. V bodě $x = -3$ je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-3+2)^n}{n+\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

divergentní, např. použijeme-li srovnávacího kritéria s řadou $\sum \frac{1}{2n}$. V bodě $x = -1$ je řada $\sum \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$ konvergentní podle Leibnizova kritéria (Věta 3.1). Proto je oborem konvergence interval $(-3,-1]$.

Opět otestujeme obě procedury. V tomto případě procedura `PSconv` dává správný výsledek, naopak naše procedura vyžaduje asistenci:

```
> a:=n->1/(n+sqrt(n)):
> rada:=Sum((-1)^n*a(n)*(x+2)^n, n=1..infinity);
```

$$rada := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(x+2)^n}{n+\sqrt{n}}$$

```
> PSconv(rada);
```

$$1$$

```
> NalezniStred(op(1,rada));
```

$$-2$$

```
> Polomer(op(1,rada));
```

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\,(n+1+\sqrt{n+1})}{(n+\sqrt{n})\,(-1)^{(n+1)}}\right|$$

Zde Maple není schopen spočítat uvedenou limitu. Po úpravě (odstranění absolutní hodnoty) již dostáváme správný výsledek.

```
> limit(a(n)/a(n+1), n=infinity);
```

$$1$$

```
> k1:=simplify(subs(x=-3,rada));csum(op(1,k1),n);
```

$$k1 := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(2\,n)}}{n+\sqrt{n}}$$

$$false$$

```
> k2:=subs(x=-1,rada);csum(op(1,k2),n);
```

$$k2 := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+\sqrt{n}}$$

$$true$$

e) Pro poloměr konvergence platí

$$r = \lim\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\frac{1}{\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}} = \lim\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{\mathrm{e}}\,.$$

V krajním bodě $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ není splněna nutná podmínka konvergence (Věta 1.1), neboť užitím l'Hospitalova pravidla lze ukázat, že

$$\lim\frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{\mathrm{e}^n} = \lim\left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{\mathrm{e}}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\,.$$

Proto také v bodě $x=-\frac{1}{\mathrm{e}}$ není splněna nutná podmínka konvergence a oborem konvergence je interval $(-\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}})$.

f) Zde je

$$a_n = \begin{cases} 2^k & \text{pro } n=2k,\\ 0 & \text{pro } n=2k-1.\end{cases}$$

Pak pro $n=2k$ je $\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[2k]{2^k}=\sqrt{2}$ a pro $n=2k-1$ je $\sqrt[n]{|a_n|}=0$, tj.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{pro } n=2k,\\ 0 & \text{pro } n=2k-1.\end{cases}$$

Proto $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{2}$ a poloměr konvergence je $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. V krajních bodech $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ není splněna nutná podmínka konvergence, neboť $\lim 2^n(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2n} = 1$. Oborem konvergence je tedy interval $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

6.2. Vlastnosti a součet mocninné řady

Jak víme z Kapitoly 5, klíčovou roli u funkcionálních řad hraje stejnoměrná konvergence. Následující věta říká, na jakém intervalu je mocninná řada stejnoměrně konvergentní.

Věta 6.2. *Nechť $r > 0$ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum a_n x^n$. Pak tato řada stejnoměrně konverguje na každém uzavřeném podintervalu $[-\rho, \rho]$ intervalu $(-r, r)$.*

Důkaz. Nechť $x \in [-\rho, \rho]$, kde $0 < \rho < r$. Pak

$$|a_n x^n| = |a_n||x^n| \leq |a_n|\rho^n,$$

přičemž číselná řada $\sum |a_n|\rho^n$ konverguje podle Věty 6.1. Z Weierstrassova kritéria (Věta 5.1) plyne, že řada $\sum a_n x^n$ konverguje stejnoměrně na $[-\rho, \rho]$. □

Tato věta má následující tři důsledky o součtu, integraci a derivaci mocninných řad.

Důsledek 6.1. *Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $r > 0$. Pak součet této řady je spojitá funkce na intervalu $(-r, r)$.*

Důkaz. Buď $x_0 \in (-r, r)$ libovolný, ale pevný bod. Pak existuje ρ $(0 < \rho < r)$ tak, $x_0 \in [-\rho, \rho]$. Z Vět 5.8, 6.2 a ze skutečnosti, že všechny funkce $a_n x^n$ jsou spojité na $\mathbb{R}$, plyne, že součet mocninné řady je spojitá funkce na $[-\rho, \rho]$. Zejména je tato funkce spojitá v bodě x_0, a protože x_0 je libovolný bod z $(-r, r)$, je tato funkce spojitá na intervalu $(-r, r)$. □

Důsledek 6.2. *Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $r > 0$. Pak pro všechna $x \in (-r, r)$ platí*

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \tag{6.1}$$

přičemž mocninná řada na pravé straně má stejný poloměr konvergence r.

Důkaz. Vztah 6.1 plyne z Věty 6.2 a 5.10. Dokažme, že mocninná řada na pravé straně vztahu 6.1 má stejný poloměr konvergence. Důkaz provedeme za silnějšího předpokladu, kdy existuje $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$. Obecný případ lze nalézt v [8, 15].

Použijeme-li Větu 6.1 pro řadu na pravé straně rovnosti (6.1), dostaneme

$$\lim \sqrt[n+1]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \frac{\lim \sqrt[n+1]{|a_n|}}{\lim \sqrt[n+1]{n+1}} = \frac{1}{r},$$

neboť $\lim \sqrt[n+1]{|a_n|} = \lim |a_n|^{\frac{1}{n+1}} = \lim(\sqrt[n]{|a_n|})^{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{r}$ a užitím l'Hospitalova pravidla je $\lim \sqrt[n+1]{n+1} = 1$. □

Z Důsledku 6.2 okamžitě plyne tvrzení o integraci mocninné řady v konstantních mezích:

Důsledek 6.3. *Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $r > 0$. Pak pro libovolný interval $[a, b] \subset (-r, r)$ platí*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} b^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} a^{n+1} . \quad (6.2)$$

Příklad 6.2. Určete součet mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ a pomocí integrace této řady určete součet číselné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Řešení. Danou mocninnou řadu lze sečíst jako geometrickou řadu s kvocientem x, kde $|x| < 1$. Dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

Poznamenejme, že $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ a $\int x^{n-1} \, \mathrm{d}x = \frac{x^n}{n}$. Odtud plyne, že

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n2^n},$$

a podle Důsledku 6.3 je součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} \, \mathrm{d}x = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

Důsledek 6.4. *Nechť mocninná řada* $\sum a_n x^n$ *má poloměr konvergence* $r > 0$. *Pak pro všechna* $x \in (-r, r)$ *platí*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \tag{6.3}$$

přičemž mocninná řada na pravé straně má opět poloměr konvergence r.

Důkaz. Tvrzení o existenci derivace $s'(x)$ a rovnost ve vztahu (6.3) vyplynou ihned z Věty 6.2 a Věty 5.9, jakmile dokážeme tvrzení o rovnosti poloměrů konvergence řad v (6.3). Ukažme, že mocninná řada na pravé straně vztahu (6.3) má stejný poloměr konvergence. Důkaz opět provedeme za silnějšího předpokladu, kdy existuje $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$.

Použijeme-li Větu 6.1 pro řadu na pravé straně rovnosti (6.3), dostaneme

$$\lim \sqrt[n-1]{n|a_n|} = \lim \sqrt[n-1]{n} \, \lim \sqrt[n-1]{|a_n|} = \frac{1}{r},$$

neboť $\lim \sqrt[n-1]{|a_n|} = \lim |a_n|^{\frac{1}{n-1}} = \lim \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{r}$ a $\lim \sqrt[n-1]{n} = 1$. □

Příklad 6.3. Určete poloměr konvergence a součet mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$. Pomocí získaného výsledku sečtěte číselnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Řešení. Poznamenejme, že součet číselné řady $\sum \frac{n}{2^n}$ jsme určili v Příkladu 1.2 c), a to přímo z definice součtu řady. Ukažme nyní jiný postup sčítání číselných řad – pomocí mocninných řad.

Uvažujme mocninnou řadu $\sum n x^n$. Její poloměr konvergence je $r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{n}{n+1} = 1$. Součet řady určíme z rovnosti $(x^n)' = n x^{n-1}$ a z věty o derivaci řady (Důsledek 6.4). Dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

pro všechna $x \in (-1, 1)$. Odtud dosazením za $x = \frac{1}{2}$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$$

Známe-li součet mocninné řady, můžeme určovat součty číselných řad pro všechna x ležící uvnitř konvergenčního intervalu. Chceme-li určit součet číselné řady v krajním bodě konvergenčního intervalu, je třeba použít následující Abelovu větu:

Věta 6.3 (Abelova). *Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence r, kde $0 < r < \infty$ a nechť je v bodě $x = r$ tato řada konvergentní. Pak součet $s(x)$ této řady je funkce zleva spojitá v bodě r, tj. platí $\lim\limits_{x \to r_-} s(x) = \sum a_n r^n$.*

Důkaz. Stačí ukázat, že za uvedených předpokladů je konvergence řady $\sum a_n x^n$ stejnoměrná na intervalu $[0, r]$. Pro $x \in [0, r]$ je $a_n x^n = a_n r^n \left(\frac{x}{r}\right)^n$; protože $\sum a_n r^n$ je konvergentní číselná řada, konverguje stejnoměrně na $[0, r]$. Dále posloupnost $\left\{\left(\frac{x}{r}\right)^n\right\}$ je na $[0, r]$ nerostoucí a stejnoměrně ohraničená posloupnost funkcí. Tvrzení nyní plyne z Abelova kritéria (Věta 5.2). □

Příklad 6.4. Vyjádřete funkci $\ln(1 + x)$ mocninnou řadou a odtud určete součet Leibnizovy řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$.

Řešení. Pro $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad .$$

Odtud podle Důsledku 6.2 obdržíme pro $x \in (-1, 1)$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots)\,\mathrm{d}t = \\ = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \,.$$

Pro $x = 1$ dostaneme Leibnizovu řadu $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, což je konvergentní řada, a proto podle Abelovy věty (Věta 6.3) je její součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \to 1-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

Poznamenejme, že pro $x = -1$ řada diverguje, a proto získaný rozvoj funkce $\ln(1 + x)$ do mocninné řady platí na intervalu $(-1, 1]$.

Příklad 6.5. Určete poloměr konvergence a součet následujících řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$.

Řešení. a) Pro poloměr konvergence platí $r = \limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[4n-3]{\frac{1}{4n-3}} = 1$. Derivací řady člen po členu dostaneme

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-4} = \frac{1}{1-x^4}$$

pro $x \in (-1, 1)$. Odtud integrací a rozkladem na parciální zlomky plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3} = \int_0^x \frac{1}{1-t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} + \frac{1}{4}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\,,$$

odkud dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3} = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x, \qquad x \in (-1, 1).$$

b) Nejdříve upravíme n-tý člen řady tak, abychom jej vyjádřili pomocí derivace:

$$(x^{n+2})' = (n+2)x^{n+1}, \text{ pak } \quad (n+2)x^n = \frac{1}{x}\left(x^{n+2}\right)'.$$

Dalším derivováním dostáváme

$$n(n+2)x^{n-1} = \left(\frac{1}{x}\left(x^{n+2}\right)'\right)', \text{ pak } \quad n(n+2)x^n = x\left(\frac{1}{x}\left(x^{n+2}\right)'\right)'.$$

Nyní dosadíme do řady

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} x\left(\frac{1}{x}\left(x^{n+2}\right)'\right)' = x\left(\frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2}\right)'\right)' = \\ &= x\left(\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{1-x}\right)'\right)' = x\left(\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}\right)'.\end{aligned}$$

Po úpravě je součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n = x\,\frac{3-x}{(1-x)^3} \qquad \text{pro } |x| < 1.$$

Odtud např. pro $x = \frac{1}{3}$ dostaneme součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{3^n} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{3\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} = \frac{8}{9} \cdot \frac{27}{8} = 3.$$

Poznámka 6.3. Mají-li dvě mocninné řady $\sum a_n x^n$ a $\sum b_n x^n$ stejný poloměr konvergence a týž součet na konvergenčním intervalu, pak platí $a_n = b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Důkaz lze nalézt např. v [8, 18].

6.3. Taylorova a Maclaurinova řada

Na rozdíl od předcházejícího odstavce, kdy byla dána mocninná řada a určovali jsme její součet, budeme řešit opačnou úlohu: danou funkci budeme rozvíjet do mocninné řady, tzv. Taylorovy řady. Rozvoje funkcí do mocninných řad mají velké aplikace, kterým je věnována následující Kapitola 7.

Připomeňme Taylorovu větu z diferenciálního počtu, kdy je funkce vyjádřena ve tvaru polynomu a zbytku: Nechť f je funkce, která má derivace až do řádu $n+1$ v uzavřeném intervalu I, jehož krajní body jsou čísla x a x_0. Pak platí

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

kde $R_n(x)$ je Taylorův zbytek, pro který platí

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\vartheta), \quad \text{kde } \vartheta \in I, \vartheta \neq x, x_0. \tag{6.4}$$

Je proto přirozené zavést následující definici:

Definice 6.2. Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f v bodě x_0.

Je-li $x_0 = 0$, mluvíme o Maclaurinově řadě, která je tedy tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Obecně nemusí platit, že součet Taylorovy řady funkce; f je roven této funkci. Následující dvě věty udávají podmínky, kdy tato rovnost platí.

Věta 6.4. *Nechť funkce f má v nějakém bodě x_0 derivace všech řádů. Pak platí*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{6.5}$$

na intervalu I obsahujícím bod x_0 právě tehdy, když pro posloupnost $\{R_n(x)\}$ Taylorových zbytků platí $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pro všechna $x \in I$.

Důkaz. Rovnost (6.5) platí na I právě tehdy, když $\lim s_n(x) = f(x)$ pro $x \in I$. Avšak $s_n(x) = T_n(x) = f(x) - R_n(x)$, takže $\lim s_n(x) = f(x)$ právě tehdy, když $\lim R_n(x) = 0$ na I. □

Poznámka 6.4. Dá se ukázat, že lze-li funkci f na nějakém intervalu I, jehož vnitřním bodem je x_0, rozvést do mocninné řady o středu x_0, pak je takový rozvoj pouze jediný a je současně Taylorovým rozvojem funkce f. Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v [8].

Věta 6.5. *Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I derivace všech řádů a nechť posloupnost $\{f^{(n)}\}$ je stejnoměrně ohraničená na I. Pak Taylorova řada funkce f v libovolném bodě $x_0 \in I$ konverguje na I k f, tj. platí* (6.5).

Důkaz. Podle předpokladu existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ tak, že $|f^{(n)}(x)| \le k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in I$. Podle (6.4) je $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, odkud $|R_n(x)| \le \frac{k}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$. Protože řada $\sum \frac{k}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$ konverguje pro každé $x \in I$, jak se snadno přesvědčíme např. podílovým kritériem, platí podle Věty 1.1

$$\lim \frac{k}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} = 0, \quad \text{proto} \quad \lim R_n(x) = 0, \quad x \in I.$$

Tvrzení nyní plyne z Věty 6.4. □

Příklad 6.6 (Maclaurinovy řady elementárních funkcí).

(1) $$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(2) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(3) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

(4) $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

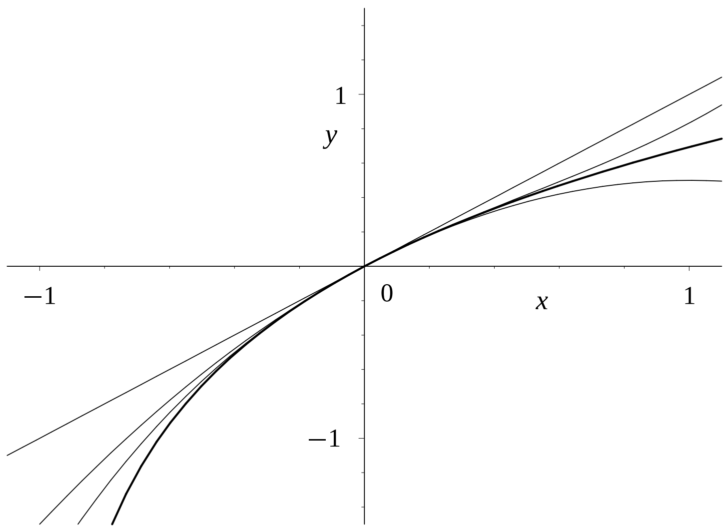
(5) $$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1} x + \dots + \binom{a}{n} x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a číslo

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}$$

je *binomický koeficient*.

Rozvoje (1), (2) a (3) platí pro $x \in \mathbb{R}$, (4) pro $x \in (-1, 1]$ a (5) pro $x \in (-1, 1)$.



Obr. 6.1: Funkce $\ln(1+x)$ a n-tý částečný součet Maclaurinovy řady této funkce pro $n = 1, 2, 3$

Řešení. Rozvoj (4) byl již odvozen v Příkladu 6.4 a je znázorněn na Obr. 6.1.

Ukažme nyní na rozvoji funkce $\ln(1+x)$ některé možnosti, které nám Maple poskytuje pro podporu tématu Taylorova řada.

```
> f:=x->ln(1+x);
```

$$f := x \to \ln(1+x)$$

Určíme Taylorův polynom 3. stupně se středem v bodě 0. Spočtěme potřebné derivace funkce f:

```
> derivace1:=(D)(f);
```

$$derivace1 := x \to \frac{1}{1+x}$$

```
> derivace2:=(D@@2)(f);
```

$$derivace2 := x \to -\frac{1}{(1+x)^2}$$

```
> derivace3:=(D@@3)(f);
```

$$derivace3 := x \to 2\,\frac{1}{(1+x)^3}$$

Podle věty 6.4 platí:

```
> TayloruvPolynom[3]:=f(0)+derivace1(0)*x+
> derivace2(0)*x^2/2+derivace3(0)*x^3/6;
```

$$TayloruvPolynom_3 := x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

Tento postup lze zobecnit pro libovolnou funkci (splňující předpoklady definice).

```
> TaylorPol:=
> (f,x0,n)->sum((D@@i)(f)(x0)/i!*(x-x0)^i,i=0..n);
```

$$TaylorPol := (f,\, x0,\, n) \to \sum_{i=0}^{n} \frac{(D^{(i)})(f)(x0)\,(x - x0)^i}{i!}$$

```
> TayloruvPolynom:=TaylorPol(f,0,3);
```

$$TayloruvPolynom := x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

Ke kontrole výpočtu můžeme použít předdefinovanou proceduru `taylor`. Proceduru voláme příkazem `taylor(f,eqn,n)`, kde `eqn` je rovnice tvaru $x = c$,

c je střed Taylorova polynomu. Zápis $x = c$ lze zkrátit pouhým c. Pro takto zadané n platí, že je-li $T(x)$ Taylorův polynom stupně $n - 1$ a $R(x) = |f(x) - T(x)|$, pak $\lim\limits_{x\to 0} \frac{R(x)}{x^n} < \infty$.

```
> taylor(f(x),x=0,4);
```

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{O}(x^4)$$

Výsledkem je datová struktura typu `series`. Převod na datový typ polynom provedeme příkazem:

```
> TayloruvPolynom:=convert(%,polynom);
```

$$\mathit{TayloruvPolynom} := x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

Nyní vytvoříme procedury pro animaci Taylorových polynomů:

```
> with(plots):
```

Význam parametrů procedury `TRada` je shodný s funkcí `TaylorPol`. Procedura `TPlots` vytvoří n-člennou posloupnost, kde i-tý člen je graf Taylorova polynomu i-tého stupně.

```
> TPlots := proc(f,x0,n,int_x,int_y,degree)
> local p,text,tplot,j,bar:
> option remember:
> p:=[]:
> bar:=1/n:
> for j from 1 to n do
> tplot:=plot(TRada(f,x0,j),x=int_x,y=int_y,
> thickness=2,color=COLOR(RGB,0+j*bar,0,1-j*bar));
> if degree then
> text:=textplot([op(1,int_x)+op(2,int_x)/10,
> op(2,int_y),cat(‘Stupen‘,j)],align=BELOW);
> p:=p,[display(tplot,text)] else
> p:=p,tplot;
> fi;
> od:
> end:
```

Příkazem `Tplots(f, x0, n, int_x, int_y, degree);` proceduru pro vykreslení voláme. `x0` je střed Taylorova polynomu, `n` jeho stupeň, `int_x` a `int_y` rozsahy zobrazovaných hodnot na osách x a y a konečně `degree` je proměnná, jež nabývá logických hodnot `true` nebo `false`. Pokud je její hodnota `true`, vypisuje se v grafu i stupeň Taylorova polynomu.

```
> TaylorAnimat := proc(f,x0,n,int_x,int_y)
> local p,fplot,tplots:
> p:=TPlots(f,x0,n,int_x,int_y,true):
> fplot:=display(plot(f(x),x=int_x,y=int_y,
> color=aquamarine,thickness=3)):
> tplots:=display(fplot,p):
> display(tplots,fplot);
> end:
> TaylorAnimat2 := proc(f,x0,n,int_x,int_y)
> local d,j,fplot,tplots:
> option remember:
> d:=[]:
> for j from 1 to n do
> d:=d,[display(TPlots(f,x0,j,int_x,int_y,false))]
> od:
> fplot:=plot(f(x), x=int_x, y=int_y,
> color=aquamarine, thickness=3):
> tplots:=display(fplot,d):
> display(fplot,tplots);
> end:
```

Význam parametrů u procedur `TaylorAnimat` a `TaylorAnimat2` je shodný s procedurou `Tplots`. Procedury se liší ve způsobu zobrazování animace, procedura `TaylorAnimat` zobrazuje spolu s původní funkcí vždy pouze jeden z Taylorových polynomů, procedura `TaylorAnimat2` do grafu Taylorovy polynomy postupně přidává. Animace si je možno prohlédnout na CD-ROMu v souboru pdf/nradanm6.pdf.

Ve všech ostatních případech byl tvar Maclaurinovy řady nalezen v diferenciálním počtu, viz např. [13]. Zbývá ověřit, že součet Maclaurinovy řady dané funkce f je právě tato funkce f.

(1) Je-li $f(x) = \mathrm{e}^x$, pak $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, takže je-li $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, je $|f^{(n)}(x)| \leq \mathrm{e}^r$ na $[-r, r]$. Podle Věty 6.5 konverguje řada (1) k e^x na $[-r, r]$. Protože $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ bylo libovolné, platí tvrzení.

(2) Protože $\sin^{(n)} x = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$, pro $f(x) = \sin x$ platí $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in \mathbb{R}$. Z Věty 6.5 pak plyne tvrzení.

(3) Důkaz tvrzení pro funkci $\cos x$ je analogické jako pro $\sin x$.

(4) Pro funkci $f(x) = (1 + x)^a$ vyjádříme Taylorův zbytek v Cauchyově tvaru (viz [13]):

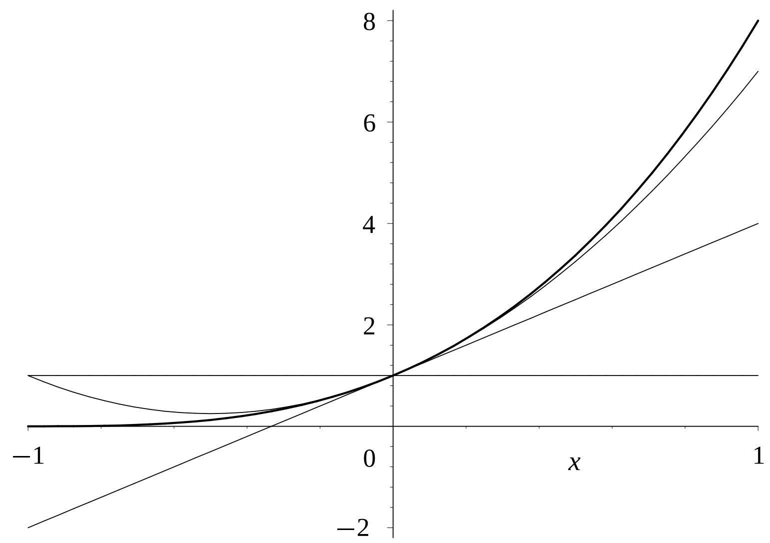
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{n!} x^{n+1}(1 - \Theta)^n, \qquad \text{kde } 0 < \Theta < 1.$$

Pak platí

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!}(1+\Theta x)^{a-n-1} x^{n+1}(1-\Theta)^n = \\ &= \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!} x^{n+1} \left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta x}\right)^n (1+\Theta x)^{a-1}. \end{aligned}$$

Je-li $x = 0$, je tvrzení věty zřejmé. Je-li $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$, pak řada $\sum \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!} x^{n+1}$ absolutně konverguje, jak se snadno přesvědčíme podílovým kritériem. Z Vety 1.1 dostáváme $\lim \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!} x^{n+1} = 0$. Dále platí $0 < \frac{1-\Theta}{1+\Theta x} < 1$, tedy;i $0 < \left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta x}\right)^n < 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Konečně je $(1-|x|)^{a-1} < (1+\Theta x)^{a-1} < (1+|x|)^{a-1}$. Odtud tedy $\lim R_n(x) = 0$ na intervalu $(-1, 1)$ a tvrzení plyne z Věty 6.4.



Obr. 6.2: Funkce $(1+x)^3$ a její Maclaurinovy polynomy 1, $1+3x$, $1+3x+3x^2$

Poznámka 6.5. Řada $\sum \binom{a}{n} x^n$ se nazývá *binomická řada*. Dva její speciální případy jsou dobře známé ze střední školy:

a) Nechť $a = n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pro $k \leq n$ je binomický koeficient $\binom{n}{k}$ známé *kombinační číslo*, pro $k \geq n+1$ je $\binom{n}{k} = 0$. Platí proto

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n,$$

což je *binomická věta*.

b) Nechť $a = -1$. Platí $\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-1-k+1)}{k!} = (-1)^k$, a proto

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \cdots,$$

což je *geometrická řada*.

Příklad 6.7. Rozviňte následující funkce do Maclaurinovy řady a určete jejich obor konvergence:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

c) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Řešení. a) Položíme-li $-x^2 = t$, dostaneme funkci $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-\frac{1}{2}}$. Její rozvoj do binomické řady je

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} t + \binom{-\frac{1}{2}}{2} t^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3} t^3 + \cdots \binom{-\frac{1}{2}}{n} t^n + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!} t + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} t^2 + \cdots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} t^n + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} t + \frac{3}{2^2 2!} t^2 - \frac{15}{2^3 3!} t^3 + \cdots + (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} t^n + \cdots$$

na intervalu $(-1, 1)$. Dosazením za $t = -x^2$ dostaneme požadovanou Maclaurinovu řadu

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2^2 2!} x^4 + \cdots + \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^{2n} + \cdots, \qquad |x| < 1.$$

b) Derivace dané funkce je $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, což je součet geometrické řady s kvocientem $-x^2$, tj. platí

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots \qquad \text{pro } |x| < 1.$$

Podle věty o integraci řady dostaneme pro $x \in (-1, 1)$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - \cdots)\, \mathrm{d}t = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

Vyšetřeme krajní body konvergenčního intervalu $x = \pm 1$. Protože řady $\sum(-1)^n \frac{1}{(2n+1)}$ a $\sum(-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)}$ konvergují a funkce $\operatorname{arctg} x$ je spojitá na $\mathbb{R}$, plyne z Abelovy věty (Věta 6.3), že uvedený Maclaurinův rozvoj funkce $\operatorname{arctg} x$ platí pro $x \in [-1, 1]$.

c) Platí $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1 + x) - \ln(1 - x)$. Podle Příkladu 6.6 je

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \qquad x \in (-1, 1],$$

$$\ln(1 - x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad x \in [-1, 1).$$

Proto

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots\right) =$$

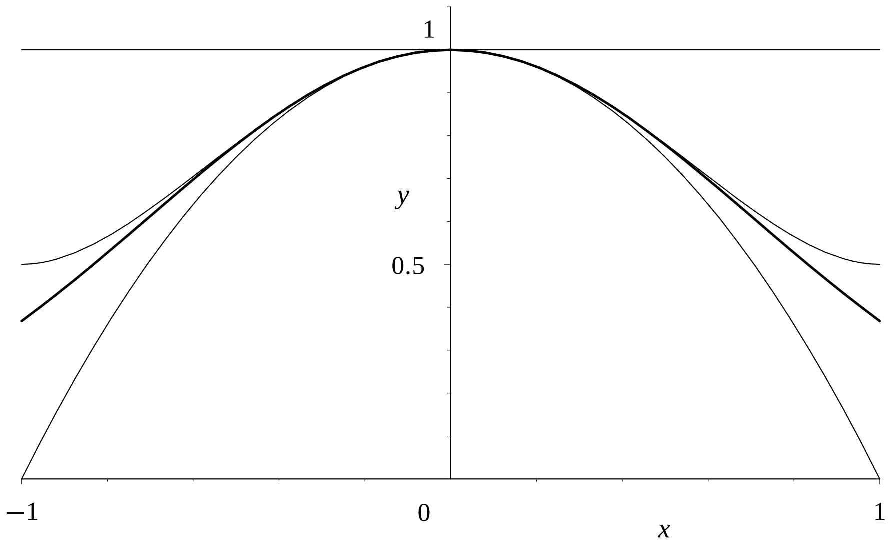
$$= 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \cdots = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\,, \quad |x| < 1.$$

d) Použijeme Maclaurinův rozvoj funkce $\mathrm{e}^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots$ pro $t \in \mathbb{R}$. Dosazením za $t = -x^2$ dostáváme (viz Obr. 6.3)

$$\mathrm{e}^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Příklad 6.8. Rozložte v Taylorovu řadu následující funkce:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ v bodě $x_0 = -2$ b) $f(x) = \sin \frac{x\pi}{4}$ v bodě $x_0 = 2$.



Obr. 6.3: Funkce e^{-x^2} a n-tý částečný součet Maclaurinovy řady této funkce pro $n = 0, 1, 2$

Řešení. a) Platí

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \cdots, \; f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Dosazením do Taylorovy řady dostaneme

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}(x+2) + \frac{1}{4}(x+2)^2 + \cdots + \frac{1}{2^n}(x+2)^n + \cdots\right)$$

na intervalu $(-4, 0)$.

b) Postupujeme obdobně jako v předcházejícím případě: pro derivace platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\pi}{4}\cos\frac{x\pi}{4}, \\ f''(x) &= -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin\frac{x\pi}{4}, \\ f'''(x) &= -\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \cos\frac{x\pi}{4}, \cdots \end{aligned}$$

a po dosazení do Taylorovy řady

$$f(x) = 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{1}{2!}(x-2)^2 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \frac{(x-2)^4}{4!} \cdots + (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n} \frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$.

Příklad 6.9. Určete Maclaurinovu řadu funkce $\operatorname{tg} x$.

Řešení. Řešme nejprve obecnou úlohu: Nechť $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ a předpokládejme, že známe Maclaurinovy rozvoje funkcí $f(x)$, $g(x)$ ve tvaru

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

a nechť $b_0 \neq 0$. Rozvoj funkce $h(x)$ hledáme ve tvaru mocninné řady s neurčitými koeficienty, tj. $h(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Ze vztahu $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pak plyne $g(x) \cdot h(x) = f(x)$ a tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Takto obdržíme rovnost mocninných řad a z Poznámky 6.3 plyne, že tyto řady musí mít stejné koeficienty.
Označme

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

a dosaďme do vztahu $\cos x \cdot \operatorname{tg} x = \sin x$ Maclaurinovy řady těchto funkcí.
Dostaneme

$$\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) \cdot (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Po roznásobení levé strany obdržíme rovnost dvou mocninných řad, které musí mít stejné koeficienty. Porovnejme koeficienty u odpovídajících si mocnin:

$$\begin{array}{ll}
x^0: & c_0 = 0 \\
x^1: & c_1 = 1 \\
x^2: & -\frac{1}{2!}c_0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\
x^3: & -\frac{1}{2!}c_1 + c_3 = -\frac{1}{3!} \Rightarrow c_3 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3} \\
x^4: & \frac{1}{4!}c_0 - \frac{1}{2!}c_2 + c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = 0 \\
x^5: & \frac{1}{4!}c_1 - \frac{1}{2!}c_3 + c_5 = \frac{1}{5!} \Rightarrow c_5 = \frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{2!3} = \frac{2}{15}.
\end{array}$$

Po dosazení koeficientů do výrazu $\operatorname{tg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ dostáváme hledaný rozvoj

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Příklad 6.10. Určete součet následujících mocninných řad:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$.

Řešení. a) S využitím věty o záměně derivace a sumace mocninné řady (Důsledek 6.4) můžeme danou řadu napsat ve tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(x^{2n+1}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}\right)' = \left(x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}\right)'.$$

Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} = \mathrm{e}^{x^2},$$

proto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!} = (x\mathrm{e}^{x^2})' = \mathrm{e}^{x^2}(1+2x^2) \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

b) Podle Maclaurinova rozvoje funkce e^x je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

Nyní určíme součet řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n n!}$. K tomu upravíme n-tý člen řady takto:

$$\frac{nx^n}{2^n n!} = x\left(\frac{x^n}{2^n n!}\right)', \qquad \frac{n^2 x^n}{2^n n!} = x\left(x\left(\frac{x^n}{2^n n!}\right)'\right)'.$$

Proto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x\left(x\left(\frac{x^n}{2^n n!}\right)'\right)' = x\left(x\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!}\right)'\right)' =$$

$$= x\left(x\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)'\right)' = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right).$$

Protože obě řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n n!} x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!}$ konvergují, je součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + 1\right) \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Historická poznámka. Nejjednodušším příkladem mocninné řady je geometrická řada

$$1 + x + x^2 + x^3 \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Historicky první mocninnou řadu, která není geometrická, objevili indičtí matematici již v 15. století, a to řadu

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

s jejím důležitým speciálním případem

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots .$$

Bohužel, tento objev nebyl dlouho znám, a tím neovlivnil rozvoj teorie mocninných řad. Teorie mocninných řad byla započata v době, kdy N. Mercator publikoval (1668) řadu

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots .$$

Racionální funkce, např. $1/(1+x^2)$, lze rozvést pomocí geometrické řady; rozhodující objev učinil I. Newton (1665), když objevil obecnou binomickou řadu. Poté Newton odvodil řadu

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots ,$$

odkud pomocí inverze odvodil mocninnou řadu pro $\sin x$. Podrobnosti z historie nekonečných řad lze nalézt např. v [4, 18].

Cvičení

6.1. Určete poloměr a obor konvergence následujících řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^{n-1}}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n}$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2\sqrt{n}}$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} x^n$ pro $0 < \alpha < 1$

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n$ pro $a > 1$

6.2. Určete součet mocninných řad a poloměr konvergence:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{2n}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$

6.3. Určete součet číselných řad pomocí součtu mocninné řady:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \left(\frac{1}{5}\right)^{2n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{8^n}$

6.4. Rozviňte následující funkce v Maclaurinovu řadu:

a) e^{-x}

b) $\cos x$

c) $\cos x^2$

d) $\sin x^2$

e) $\arcsin x$

f) $\frac{1}{(1+x)^2}$

g) $\frac{1}{3-2x}$

h) $\sqrt{1+x}$

i) $\ln(1+\mathrm{e}^x)$

j) $\mathrm{e}^{\cos x}$

k) $\cos^n x$

l) $x^2\mathrm{e}^x$

m) $\mathrm{e}^x \sin x$

n) $-\ln\cos x$

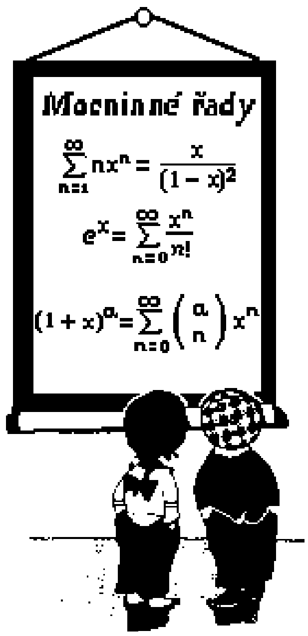
6.5. Rozložte v Taylorovu řadu následující funkce:

a) $\sqrt{x^3}$ v bodě $x_0 = 1$

b) $\frac{1}{x}$ v bodě $x_0 = 3$

c) e^x v bodě $x_0 = -2$

d) $\ln x$ v bodě $x_0 = 1$



Jestliže fakta neodpovídají teorii, je nutno je zavrhnout.

Kapitola 7

Užití mocninných řad

V této kapitole ukážeme některá použití mocninných řad. Kromě přibližných výpočtů funkčních hodnot elementárních funkcí se mocninné řady používají při výpočtu limit a integrálů a při řešení diferenciálních rovnic.

7.1. Přibližný výpočet funkčních hodnot

Při určování funkčních hodnot je většinou požadována velikost chyby, s jakou má být tato hodnota přibližně určena; pro její odhad použijeme Větu 4.4 a 4.5.

Poznamenejme, že v příkladech, ve kterých přibližnou hodnotu funkce $f(x)$ budeme určovat pomocí prvních n členů příslušného rozvoje dané funkce, budeme mít na mysli prvních n nenulových členů tohoto rozvoje.

Příklad 7.1. Pomocí prvních n členů určete přibližnou hodnotu výrazů:

a) $\sqrt{e}$ (n=5) b) $(1,1)^{1,2}$ (n=3) c) $\sqrt[5]{245}$ (n=2).

Řešení. a) Použijeme Maclaurinovu řadu funkce e^x (viz Příklad 6.6), kam dosadíme za $x = \frac{1}{2}$ a $n = 5$, a obdržíme

$$\sqrt{e} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \doteq 1,65.$$

b) Použijeme Maclaurinovu řadu mocninné funkce $(1+x)^a$ (viz Příklad 6.6), kam dosadíme $x = 0,1$, $a = 1,2$, $n = 3$, a dostaneme

$$(1,1)^{1,2} \doteq 1 + 1,2 \cdot 0,1 + \frac{1,2 \cdot 0,2}{2}(0,1)^2 \doteq 1,12.$$

c) Protože Maclaurinova řada mocninné funkce $(1+x)^a$ konverguje pouze na intervalu $(-1, 1)$, je třeba nejprve danou odmocninu upravit:

$$\sqrt[5]{245} = \sqrt[5]{243+2} = \sqrt[5]{3^5+2} = \sqrt[5]{3^5\left(1+\frac{2}{3^5}\right)} = 3\left(1+\frac{2}{243}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Nyní můžeme použít rozvoj mocninné funkce a po dosazení za $a = \frac{1}{5}$, $x = \frac{2}{243}$ a $n = 2$ dostáváme

$$\sqrt[5]{245} = 3\left(1+\frac{2}{243}\right)^{\frac{1}{5}} \doteq 3\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{243}\right) \doteq 3{,}005.$$

Poznámka 7.1. Výpočet odmocnin pomocí prvních dvou členů binomické řady není nic jiného než výpočet pomocí diferenciálu funkce $(1+x)^a$ a byl již používán ve staroindické matematice.

Příklad 7.2. Určete přibližnou funkční hodnotu:

a) $\sin 18°$ s chybou menší než 10^{-4} b) $\arcsin 0{,}45$ s chybou menší než 10^{-3}.

Řešení. a) Použijeme Maclaurinovu řadu funkce $\sin x$ (viz Příklad 6.6) a po dosazení $x = \frac{\pi}{10}$ dostaneme

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5 + \cdots, \tag{7.1}$$

což je alternující číselná řada. Podle Věty 4.4 je $|R_n| \le a_{n+1}$. Proto vezmeme-li v rozvoji (7.1) první dva nenulové členy, bude chyba menší než třetí (nenulový) člen rozvoje, tj.

$$|R_2| < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5 = \frac{\pi^5}{120\cdot 10^5} < 10^{-4}.$$

Hledaná hodnota je

$$\sin 18° \doteq \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \doteq 0{,}309.$$

b) Odvoďme nejprve Maclaurinovu řadu funkce $\arcsin x$. Její derivace je funkce $(\arcsin x)' = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, jejíž rozvoj jsme určili v Příkladu 6.7-a). Proto

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2^2 2!}x^4 + \cdots + \frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n} + \cdots$$

pro $|x| < 1$. Odtud integrací dostaneme

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{3}{2^2 2! 5}x^5 + \dots + = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

pro $|x| < 1$, kde $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$. Lze ověřit podle Raabeova kritéria (Věta 2.5), že v krajních bodech $x = \pm 1$ řada na pravé straně této rovnosti konverguje. Protože funkce $\arcsin x$ je spojitá na $[-1, 1]$, platí podle Abelovy věty (Věta 6.3) uvedený rozvoj i pro $x = \pm 1$. Proto platí

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{pro } x \in [-1, 1].$$

Pro odhad zbytku této řady použijeme Větu 4.5, podle které platí

$$|R_n| \le |a_n| \frac{q}{1-q}, \quad \text{kde} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1.$$

Určeme nejprve obecně q_x v závislosti na hodnotě x. Platí

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}\cdot (n+1)!} \cdot \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{2^n \cdot n!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{2n+1}{x^{2n+1}} = \\ &= x^2 \frac{(2n+1)^2}{2(n+1)(2n+3)} \le x^2 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Proto pro $x = 0{,}45$ dostáváme $q = (0{,}45)^2 = 0{,}2025$ a odhad chyby je

$$|R_n| \le |a_n| \frac{0{,}2025}{1 - 0{,}2025} < 10^{-3}.$$

Snadno se ověří, že tato nerovnost je splněna pro $n = 2$, tj.

$$\arcsin 0{,}45 \doteq 0{,}45 + \frac{1}{6}(0{,}45)^3 + \frac{3}{40}(0{,}45)^5 \doteq 0{,}466.$$

Příklad 7.3. Určete přibližnou hodnotu čísla π pomocí tří nenulových členů rozvoje funkce:

a) $\operatorname{arctg} x$ b) $\arcsin x$.

Řešení. a) V Příkladu 6.7-b) jsme odvodili Maclaurinův rozvoj funkce $\operatorname{arctg} x$:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad \text{pro } x \in [-1, 1].$$

Jedna možnost výpočtu čísla π je dosadit vnitřní bod konvergenčního intervalu, v němž jeho hodnotu známe

$$\frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5 + \cdots ,$$

odkud $\pi \doteq 6\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5\right) \doteq 3{,}156$. Dosadíme-li pravý krajní bod $x = 1$, dostaneme

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots ,$$

odkud plyne $\pi \doteq 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \doteq 3{,}4\bar{6}$.

Jiná možnost výpočtu je využít součtového vzorce pro $\operatorname{arctg} x$ (viz řešení Příkladu 1.2-d)), podle kterého je

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Z rozvoje $\operatorname{arctg} x$ určíme přibližnou hodnotu

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} \doteq \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5, \quad \operatorname{arctg}\frac{1}{3} \doteq \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5,$$

odkud dostaneme $\pi = 4\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) \doteq 1{,}858 + 1{,}287 \doteq 3{,}145$.

b) Postupujeme obdobně: dosadíme známé hodnoty do Maclaurinova rozvoje funkce $\arcsin x$ odvozeného v Příkladu 7.2-b), např. $x = 1$ nebo $x = \frac{1}{2}$ a dostaneme

$$\pi = 2\arcsin 1 \doteq 2\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40}\right) \doteq 2{,}48\bar{3},$$

$$\pi = 6\arcsin\frac{1}{2} \doteq 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{40}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right) \doteq 3{,}139.$$

Porovnáním s hodnotou na kalkulátoru $\pi \doteq 3{,}1415927\ldots$ vidíme, že výpočet pomocí obou cyklometrických funkcí $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$ je zhruba stejně přesný. Největší přesnosti v obou případech budeme dosahovat tehdy, jestliže bude hodnota argumentu blízko nuly. Pokud je hodnota argumentu na okraji konvergenčního intervalu $[-1, 1]$, je určená hodnota π velice nepřesná.

7.2. Určování funkčních hodnot logaritmů

K výpočtu logaritmů je někdy výhodné použít rozvoj funkce $\ln \frac{1+x}{1-x}$, který jsme odvodili v Příkladu 6.7-c)

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right), \quad |x| < 1. \tag{7.2}$$

Srovnáme-li tento rozvoj s rozvojem funkce $\ln(1+x)$, liší se oba rozvoje nejen rychlostí konvergence, ale i oborem hodnot vnitřních složek obou logaritmických funkcí. Označme

$$g_1(x) = 1 + x, \quad g_2(x) = \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Oborem hodnot funkce $g_1(x)$ je interval $(0, 2)$, zatímco oborem hodnot druhé funkce interval $(0, \infty)$. Např. $\ln 3, \ln 5$ nelze vypočítat pomocí rozvoje funkce $\ln(1+x)$. Rozdíl v rychlosti konvergence, tj. v počtu členů rozvoje při dané chybě, bude dobře vidět v následujících příkladech.

Příklad 7.4. Kolik členů rozvoje následujících funkcí je třeba vzít, abychom určili číslo $\ln 2$ s chybou menší než 10^{-5}:

$$a)\ \ln(1+x) \qquad b)\ \ln \frac{1+x}{1-x}\,.$$

Řešení. a) Podle Příkladu 6.4 je

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

a podle Věty 4.4 je chyba $|R_n| < \frac{1}{n+1}$. Máme-li proto určit číslo $\ln 2$ s chybou menší než 10^{-5}, musí být $|R_n| < \frac{1}{n+1} < 10^{-5}$, tj. je třeba sečíst 100 000 členů této řady.

b) Nejprve určíme hodnotu x, pro kterou je $\frac{1+x}{1-x} = 2$. Přímým výpočtem dostaneme $x = \frac{1}{3}$ a po dosazení do (7.2) dostaneme

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \cdots\right).$$

Pro odhad chyby R_n v řadě na pravé straně rovnosti použijeme Větu 4.5, podle níž

$$|R_n| \le |a_n| \frac{q}{1-q} < 10^{-5}, \quad \text{kde} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1.$$

Určeme q_x v závislosti na hodnotě x:

$$q_x = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{2x^{2n+1}} = x^2 \frac{2n+1}{2n+3} \leq x^2 \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Pro $x = \frac{1}{3}$ dostáváme $q = \left(\frac{1}{3}\right)^2$. Numerickým výpočtem ověříme, že pro $n = 4$ je splněno

$$|R_5| \leq \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^9 \frac{1}{9} \frac{9}{8} \doteq 1{,}41 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}.$$

Proto v tomto případě stačí vzít k výpočtu $\ln 2$ prvních pět nenulových členů, tj.

$$\ln 2 \doteq 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9\right) \doteq 0{,}6931.$$

Z uvedeného příkladu je vidět, že v případě, kdy se hodnota x v rozvoji funkce $\ln(1+x)$ blíží k hranici konvergenčního intervalu $(-1, 1]$, je mnohem výhodnější použít rozvoje funkce $\ln \frac{1+x}{1-x}$, u kterého dostaneme stejně přesný výsledek při součtu mnohem méně členů. Tento rozvoj je třeba použít také tehdy, kdy hodnota x přesáhne konvergenční interval, např. $x = 4$.

7.3. Výpočet limit

Při určování limit jsme zatím používali elementární způsoby výpočtu (úprava limitní funkce) nebo l'Hospitalovo pravidlo. K výpočtu některých limit lze někdy velmi výhodně použít mocninných řad.

Příklad 7.5. Určete následující limity:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$

Řešení. a) K vyjádření odmocnin použijeme binomický rozvoj funkcí $\sqrt{1+x}$ a $\sqrt[3]{1-x}$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots\right)-\left(1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\cdots\right)\right]=\\
&\qquad=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{5}{6}x-\frac{1}{72}x^2+\cdots\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{72}x+\cdots\right)=\frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

b) Použijeme Maclaurinův rozvoj $\ln(1+x)$ a dostaneme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\\
&\quad=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+\cdots\right)\right]=\\
&\qquad=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}+\frac{1}{4x^2}+\cdots\right)=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

c) Použijeme Maclaurinovy rozvoje funkcí $\operatorname{tg} x$, $\sin x$ (viz Příklad 6.9 a 6.6) a dostaneme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{2(\operatorname{tg} x-\sin x)-x^3}{x^5}=\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{2\left[\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{272}{7!}x^7+\cdots\right)-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots\right)\right]-x^3}{x^5}=\\
&\qquad=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\left(\frac{1}{4}x^5+\frac{542}{7!}x^7+\cdots\right)=\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

d) Nejprve určíme Maclaurinův rozvoj funkce $e^x\sin x$. Protože Maclaurinovy řady obou funkcí e^x, $\sin x$ jsou absolutně konvergentní pro všechna $x\in\mathbb{R}$, platí podle Věty 4.1

$$\begin{aligned}
e^x\sin x &= \left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\right)\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots\right)=\\
&= \left(x+x^2+\frac{1}{2!}x^3-\frac{1}{3!}x^3+\cdots\right).
\end{aligned}$$

Odtud dostaneme

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x \sin x - x(1+x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots) - x(1+x)}{x^3} = \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{30}x^2 + \cdots \right) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

7.4. Přibližný výpočet integrálů

Dosud umíme integrovat funkce, jejichž primitivní funkce jsou tzv. elementární funkce neboli konečného tvaru, tj. lze je vyjádřit pomocí základních elementárních funkcí (např. racionální, exponenciální, goniometrické nebo cyklometrické), pomocí algebraických operací a skládaní v konečném počtu.

V tomto odstavci ukážeme, jak lze integrovat některé funkce, jejichž primitivní funkce nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí; takové funkce se nazývají *vyšší transcendentní funkce* a lze je vyjádřit právě mocninnými řadami.

Uveďme příklad: chceme určit primitivní funkci k funkci $\frac{\sin x}{x}$ a e^{-x^2}. Obě funkce

$$
f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 1 & \text{pro } x = 0, \end{cases}
$$

jsou spojité na $\mathbb{R}$, tudíž k nim existují funkce primitivní. Avšak tyto primitivní funkce nelze nalézt žádnou známou integrační metodou, neboť jde o vyšší transcendentní funkce. Uvedené funkce f, g lze vyjádřit mocninnou řadou a její integrací pak určit jejich primitivní funkce ve tvaru mocninných řad.

Příklad 7.6. a) Pomocí prvních tří nenulových členů přibližně vypočtěte $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ a odhadněte chybu.

b) S chybou menší než 10^{-4} přibližně vypočtěte $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

c) Pomocí prvních čtyř členů přibližně vyjádřete $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x$ a odhadněte chybu.

d) Vyjádřete mocninnou řadou funkci $\int_0^x \frac{\sqrt[4]{1+t^4}-1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Řešení. a) Maclaurinův rozvoj funkce e^{-x^2} jsme určili v Příkladu 6.7-d)

$$
\mathrm{e}^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.
$$

Odtud integrací, přičemž řadu na pravé straně integrujeme člen po členu, dostaneme

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!} + \cdots\,,$$

kde $x \in \mathbb{R}$. Určitý integrál lze pak vyjádřit řadou

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\cdot n!} + \cdots\,,$$

což je alternující číselná řada s klesajícími členy. Pro ni platí, že velikost chyby při součtu prvních tří členů je menší než absolutní hodnota čtvrtého členu (viz Věta 4.4), tj.

$$|R_3| < \frac{1}{7\cdot 3!} = \frac{1}{42} < 0{,}024\,.$$

Přibližná hodnota integrálu $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \doteq 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \doteq 0{,}77$ je určena s chybou menší než $0{,}03$.

b) Integrovanou funkci $\frac{1}{1+x^4}$ vyjádříme mocninnou řadou

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 + \cdots + (-1)^n \cdot x^{4n} + \cdots\,,\quad |x| < 1,$$

odkud integrací plyne

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \cdots\right)\mathrm{d}x = \\
&= \left[x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{13}}{13} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + \cdots\right]_0^{\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9 - \frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{13} + \cdots\,.
\end{aligned}$$

Jedná se o alternující číselnou řadu a podle zadání má být chyba menší než 10^{-4}. Pro $n = 3$ platí $|R_3| < \frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{13} \doteq 9{,}39 \cdot 10^{-6} < 10^{-4}$, proto stačí sečíst první tři členy. Hledaná hodnota je

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} \doteq \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9 \doteq 0{,}4940.$$

c) Nejprve poznamenejme, že integrovaná funkce $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ je spojitá na $(0, \frac{1}{2})$ a ohraničená na $[0, \frac{1}{2}]$, neboť $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$. Proto je určovaný integrál vlastní Riemannův integrál. Užitím rozvoje funkce $\operatorname{arctg} x$, který jsme odvodili v Příkladu 6.7, je

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + \cdots, \ |x| < 1.$$

Dosazením do integrálu dostáváme

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x &= \left[x - \tfrac{x^3}{3^2} + \tfrac{x^5}{5^2} + \cdots + (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} + \cdots \right]_0^{\frac{1}{2}} \doteq \\ &\doteq \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{9}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \tfrac{1}{25}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 - \tfrac{1}{49}\left(\tfrac{1}{2}\right)^7 \doteq 0{,}4872. \end{aligned}$$

Jedná se o alternující číselnou řadu, a proto pro odhad chyby platí $|R_4| < a_5 = \frac{1}{81}\left(\frac{1}{2}\right)^9 \doteq 2{,}4 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$. Hledaná hodnota integrálu je určena s chybou menší než 10^{-4}.

d) Užitím binomického rozvoje funkce $(1+t)^a$, kde $a = \frac{1}{4}$, $t = x^4$ dostaneme pro všechna $x \neq 0$, $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{1+x^4} - 1}{x^2} &= \frac{1}{x^2}\left[\left(1 + \binom{\frac{1}{4}}{1} x^4 + \binom{\frac{1}{4}}{2} x^8 + \binom{\frac{1}{4}}{3} x^{12} + \cdots \right) - 1\right] = \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{32}x^8 + \frac{21}{384}x^{12} - \cdots \right) = \\ &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{32}x^6 + \frac{21}{384}x^{10} - \cdots . \end{aligned}$$

Odtud plyne $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{x^2} = 0$, a proto lze integrovanou funkci spojitě dodefinovat na celé $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

K této funkci existuje primitivní funkce, kterou lze pro $x \in (-1, 1)$ vyjádřit Maclaurinovou řadou tvaru

$$\int_0^x \frac{\sqrt[4]{1+t^4} - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{4 \cdot 3} - \frac{3x^7}{32 \cdot 7} + \frac{21x^{11}}{384 \cdot 11} - \cdots .$$

7.5. Řešení diferenciálních rovnic pomocí mocninných řad

V tomto odstavci ukážeme, jak lze řešit diferenciální rovnice pomocí mocninných řad. Tato metoda spočívá v tom, že řešení definované v okolí bodu $x = x_0$ hledáme ve tvaru mocninné řady $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Otázkami konvergence mocninných řad, které jsou řešeními diferenciálních rovnic, se zabývat nebudeme. Rovněž zde nebudeme řešit obecnější úlohu, kdy rovnice má v bodě $x = x_0$ tzv. singulární bod a řešení je třeba hledat ve tvaru *zobecněné mocninné řady* $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^{k+n}$, $k \in \mathbb{R}$ (např. Besselova rovnice a její řešení Besselovy funkce). Podrobnosti lze nalézt např. v [9].

Příklad 7.7. Řešte diferenciální rovnice pomocí mocninné řady:

a) $y'' + y = 0$ b) $y'' + kxy = 0$.

Řešení. Obecné řešení obou rovnic hledáme ve tvaru $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots$. Pak pro derivace této funkce platí

$$\begin{aligned} y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \\ y'' &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots \ . \end{aligned}$$

a) Dosazením za y, y'' do diferenciální rovnice dostáváme

$$2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots + a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots = 0,$$

tj. sečtením koeficientů u stejných členů

$$(2a_2 + a_0) + (3 \cdot 2a_3 + a_1)x + \cdots + (n(n-1)a_n + a_{n-2})x^{n-2} + \cdots = 0.$$

Odtud plyne $n(n-1)a_n + a_{n-2} = 0$, tj. $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}$, kde a_{n-2} je rekurentně určeno z předchozích kroků. Z uvedených vztahů je vidět, že přesné určení koeficientů a_n závisí na volbě a_0, a_1. Uvažujme dva případy:
1. Je-li $a_0 = 0$, pak $a_{2n} = 0$, tj. v řadě se vyskytují pouze liché členy. Pro $a_1 \in \mathbb{R}$ libovolné dostaneme

$$a_{2n+1} = -\frac{a_{2n-1}}{2n(2n+1)} = \cdots = (-1)^n \frac{a_1}{(2n+1)!}$$

a řešení rovnice je

$$y = a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right) = a_1 \sin x.$$

2. Je-li $a_1 = 0$, pak $a_{2n+1} = 0$, tj. v řadě se vyskytují pouze sudé členy. Pro $a_0 \in \mathbb{R}$ libovolné je

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2n(2n-1)} = \cdots = (-1)^n \frac{a_0}{(2n)!},$$

tj.

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \right) = a_0 \cos x.$$

Poznamenejme, že je-li $a_0 = a_1 = 0$, tj. $a_n = 0$ pro všechna n, pak řešení $y \equiv 0$, což je obsaženo v předchozích případech. Dohromady je obecné řešení $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$, $a_0, a_1 \in R$.

b) Postupujeme obdobně. Po dosazení do rovnice za y, y'' dostáváme

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + kx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

po úpravě

$$2a_2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots + k(a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_{n-3}x^{n-2} + \cdots) = 0.$$

Odtud $a_2 = 0$ a porovnáním koeficientů u mocniny x^{n-2} můžeme určit rekurentní vztah pro a_n:

$$n(n-1)a_n + ka_{n-3} = 0 \Rightarrow a_n = -\frac{k}{n(n-1)} a_{n-3} \quad \text{pro} \quad n = 3, 4, \cdots .$$

Proto $a_2 = a_5 = \cdots = 0$ a a_0, a_1 volíme libovolně. Dostaneme tyto případy:
Je-li $a_0 \in \mathbb{R}$ libovolné, pak $a_3 = -\frac{k}{6}a_0$, $a_6 = -\frac{k}{5\cdot 6}a_3 = \frac{k}{180}a_0$ atd.
Je-li $a_1 \in \mathbb{R}$ libovolné, pak $a_4 = -\frac{k}{12}a_1$, $a_7 = -\frac{k}{7\cdot 6}a_4 = \frac{k}{12\cdot 42}a_1$ atd.

Dohromady obecné řešení lze vyjádřit ve tvaru

$$y = a_0 \left(1 - \frac{k}{6}x^3 + \frac{k}{180}x^6 + \cdots \right) + a_1 \left(x - \frac{k}{12}x^4 + \frac{k}{12\cdot 42}x^7 + \cdots \right).$$

Příklad 7.8. Určete řešení rovnic při počátečních podmínkách:

a) $y' = 1 + x - y^2, \qquad y(0) = 1;$

b) $xy^{(4)} + 4y''' - xy - 1 = 0, \qquad y(1) = -1, y'(1) = 1, y''(1) = -2, y'''(1) = 6.$

Řešení. Nejprve poznamenejme, že podle věty o existenci a jednoznačnosti Cauchyovy počáteční úlohy platí, že hledaná řešení obou úloh existují a jsou jednoznačně určena.

a) Partikulární řešení hledáme ve tvaru Maclaurinovy řady, kde hodnoty $y^{(n)}(0)$ určíme takto:

Dosadíme-li počáteční podmínku do rovnice, dostaneme $y'(0) = 0$. Postupně pro derivace vyšších řádů platí

$$\begin{aligned} y'' &= 1 - 2yy', & y''(0) &= 1, \\ y''' &= -2y'y' - 2yy'', & y'''(0) &= -2, \\ y^{(4)} &= -6y'y'' - 2yy''', & y^{(4)}(0) &= 4. \end{aligned}$$

Partikulární řešení splňující předepsanou počáteční podmínku je

$$y = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots \,.$$

b) Řešení nyní hledáme ve tvaru Taylorovy řady se středem v bodě $x = 1$

$$y = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \cdots \,.$$

Při dosazování do Taylorovy řady je třeba určit $y^{(4)}(1)$ a případně vyšší derivace. Pro určení $y^{(4)}(1)$ vyjádříme $y^{(4)}$ a dosadíme počáteční podmínky, tj.

$$y^{(4)} = \frac{-4y''' + xy + 1}{x}, \qquad y^{(4)}(1) = -24\,.$$

Hledané partikulární řešení je tvaru $y = -1 + (x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^3 + \cdots$.

Cvičení

7.1. Určete přibližnou hodnotu výrazu s chybou menší než je uvedeno:

a) $\cos 1°$ $[10^{-6}]$ c) $\sin 10°$ $[10^{-6}]$ e) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$ $[10^{-5}]$

b) $\sin 1°$ $[10^{-8}]$ d) $\cos 10°$ $[10^{-5}]$

7.2. Určete přibližnou hodnotu výrazu pomocí prvních n členů:

a) $\operatorname{tg} 5°$ $[n = 2]$
b) $\operatorname{tg} 1°$ $[n = 2]$
c) $\operatorname{cotg} 36°$ $[n = 3]$
d) $\operatorname{cotg} 20°$ $[n = 3]$

7.3. Určete přibližnou hodnotu π s chybou menší než:

a) 10^{-5} ze vztahu $\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$

b) 10^{-10} ze vztahu $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$

7.4. Určete přibližnou hodnotu výrazu pomocí prvních n členů:

a) $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ $[n = 4]$
b) $\sqrt[3]{e}$ $[n = 3]$
c) e $[n = 9]$
d) e^2 $[n = 10]$
e) $\frac{1}{e}$ $[n = 8]$
f) $(1,2)^{0,8}$ $[n = 4]$
g) $(1,5)^2$ $[n = 3]$
h) $\sqrt[7]{129}$ $[n = 2]$
i) $\sqrt[3]{70}$ $[n = 2]$
j) $\sqrt[5]{40}$ $[n = 3]$
k) $\sqrt[3]{1{,}015}$ $[n = 3]$
l) $\sqrt[5]{250}$ $[n = 2]$
m) $\sqrt[3]{128}$ $[n = 3]$

7.5. Určete přibližnou hodnotu výrazu pomocí prvních n členů:

a) $\ln 2$ $[n = 3]$
b) $\ln 3$ $[n = 6]$
c) $\ln 5$ $[n = 9]$
d) $\ln 11$ $[n = 10]$
e) $\log 5$ $[n = 10]$
f) $\log 11$ $[n = 10]$
g) $\log_5 2$ $[n = 3]$
h) $\log_2 3$ $[n = 3]$
i) $\ln \frac{1}{2}$ $[n = 3]$
j) $\ln \frac{5}{6}$ $[n = 5]$
k) $\log \frac{1}{\mathrm{e}}$ $[n = 10]$

7.6. Určete následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^5}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{1+x^2}}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^4}}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1-x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x\cos x}{x^3}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right)$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{cotg}^2 x\right)$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\frac{3}{x^4}\right)$

7.7. Vyjádřete mocninnou řadou:

a) $\int_0^x \frac{e^t}{t^2}\,dt$

b) $\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$

c) $\int_0^x \sqrt{1+t^3}\,dt$

d) $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$

e) $\int_0^x \frac{dt}{1-t^9}$

f) $\int_0^x \sin t^2\,dt$

7.8. Určete přibližnou hodnotu výrazu pomocí prvních n členů nebo se zadanou přesností:

a) $\int_{0,1}^1 \frac{e^x}{x}\,dx \quad [n=6]$

b) $\int_0^1 \frac{\sinh x}{x}\,dx \quad [n=5]$

c) $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx \quad [n=4]$

d) $\int_1^{1,5} \frac{1}{x}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{4}\,dx$ [na setiny]

e) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ [na tisíciny]

f) $\int_0^1 \cos x^2\,dx$ [na tisíciny]

7.9. Určete partikulární řešení diferenciálních rovnic:

a) $y' - y^2 - x(x+1) = 0,\ y(0) = 1$

b) $y' + xy^2 - 2\cos x = 0,\ y(0) = 1$

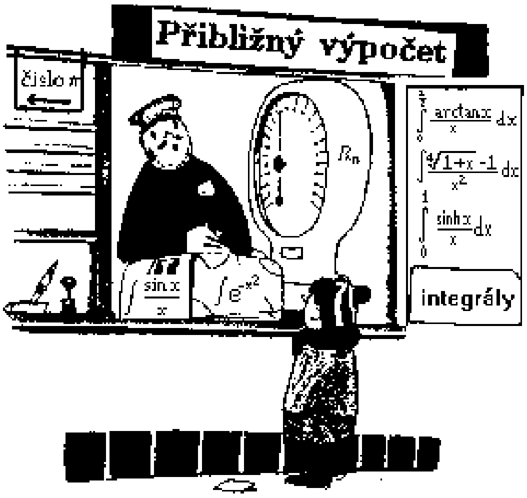
c) $y'' - e^x y = 0,\ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 1$

d) $y'' - y\cos x - x = 0,\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$

7.10. Vyjádřete řadou obecné řešení diferenciálních rovnic:

a) $y'' + xy' + y = 0$

b) $y'' + ax^2 y = 0,\quad$ kde $a \in \mathbb{R}$.



Hezké chvíle utečou jako nic. Ošklivé trvají věčnost.

Kapitola 8

Fourierovy řady

Předmětem této kapitoly je vybudování teorie pro aproximaci periodických funkcí. Nejjednodušším netriviálním příkladem periodických funkcí jsou trigonometrické funkce $\cos nx$, $\sin nx$ ($n \in \mathbb{N}$). Nabízí se proto myšlenka obecnou 2π-periodickou funkci aproximovat buď lineární kombinací konečného počtu těchto funkcí

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}, \tag{8.1}$$

nebo nekonečnou řadou

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{8.2}$$

Funkce tvaru (8.1) se nazývá *trigonometrický polynom* (název polynom je odůvodněn tím, že užitím elementárních vztahů z trigonometrie lze $T_n(x)$ vyjádřit jako polynom v proměnných $\cos x$, $\sin x$), řada tvaru (8.2) se nazývá *trigonometrickou řadou*.

Ukazuje se, že při úvahách o aproximaci trigonometrickými řadami je podstatnou vlastností *ortogonalita* systému funkcí $\{\cos nx, \sin nx;\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Kromě systému $\{\cos nx, \sin nx\}$ existují další systémy funkcí $\{\varphi_n(x)\}$, které splňují obdobné vlastnosti, např. ortogonální polynomy a Besselovy funkce. Všechny tyto systémy mají velké aplikace při řešení parciálních diferenciálních rovnic, podrobnosti lze nalézt např. v [12, 17].

Tato kapitola je rozdělena na tři odstavce: v prvním vybudujeme obecnou teorii Fourierových řad vzhledem k libovolnému ortogonálnímu systému funkcí $\{\varphi_n(x)\}$. V druhém odstavci budeme obecné výsledky o Fourierových řadách aplikovat na trigonometrické funkce $\{\cos nx, \sin nx\}$ a v třetím odstavci uvedeme podmínky pro konvergenci těchto Fourierových řad.

8.1. Fourierovy řady vzhledem k systému $\{\varphi_n(x)\}$

Jak jsme naznačili v úvodu, při budování teorie Fourierových řad hraje podstatnou vlastnost ortogonalita (kolmost) systému funkcí $\{\varphi_n(x)\}$. Zaveďme následující definice:

Definice 8.1. Buďte f, g integrovatelné funkce na intervalu $[a, b]$. Číslo

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

nazýváme *skalárním součinem* funkcí f, g. Funkce f, g se nazývají *ortogonální* (na intervalu $[a, b]$), právě když $(f, g) = 0$.

Snadno ověříme tyto vlastnosti skalárního součinu:

(1) $(f, g) = (g, f)$

(2) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$

(3) $(cf, g) = c(f, g)$ pro $c \in \mathbb{R}$

(4) $(f, f) \geq 0$.

Z (2) a (3) plyne indukcí obecněji:

$$(c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n, g) = c_1 (f_1, g) + \cdots + c_n (f_n, g)$$

Definice 8.2. Buď f integrovatelná funkce na intervalu $[a, b]$. *Normou funkce* f rozumíme číslo $\| f \| = \sqrt{(f, f)}$. Funkce f se nazývá *normovaná*, právě když $\| f \| = 1$.

Je tedy $\| f \|^2 = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. Všimněme si ještě, že je-li f funkce s vlastností $\| f \| > 0$, pak funkce $\frac{1}{\| f \|} \cdot f$ je normovaná.

Definice 8.3. Buď $\{\varphi_n\}$ konečná nebo spočetná posloupnost integrovatelných funkcí na intervalu $[a, b]$. Tato posloupnost se nazývá *ortogonální*, právě když každé dvě funkce φ_m, φ_n $(m \neq n)$ jsou ortogonální a každá funkce φ_n má kladnou normu.
Posloupnost $\{\varphi_n\}$ se nazývá se *ortonormální*, právě když je ortogonální a každá funkce φ_n je normovaná.

Posloupnost $\{\varphi_n\}$ je tedy ortonormální, právě když platí:

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \begin{cases} 0 & \text{pro } m \neq n \\ 1 & \text{pro } m = n \end{cases}$$

Poznamenejme ještě, že je-li $\{\varphi_n\}$ ortogonální posloupnost, pak $\left\{\frac{1}{\|\varphi_n\|} \cdot \varphi_n\right\}$ je posloupnost ortonormální.

Věta 8.1. *Bud'* $\{\varphi_n\}$ *ortogonální posloupnost funkcí na intervalu* $[a, b]$, $\{c_n\}$ *posloupnost reálných čísel. Necht'řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

stejnoměrně konverguje k funkci f *na intervalu* $[a, b]$. *Pak pro konstanty* c_n *(*$n \in \in \mathbf{N}$*) platí:*

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2} \tag{8.3}$$

Důkaz. Násobme rovnost

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

funkcí $\varphi_k(x)$, kde $k \in \mathbb{N}$ je libovolné:

$$f(x)\varphi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)\varphi_k(x);$$

řada na pravé straně rovnice je opět stejnoměrně konvergentní, proto ji lze integrovat člen po členu

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)\varphi_k(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_k(x)\,dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\varphi_n, \varphi_k). \end{aligned}$$

Protože $(\varphi_n, \varphi_k) = 0$ pro $n \neq k$, plyne odtud $(f, \varphi_k) = c_k \|\varphi_k\|^2$, tj. (8.3). □

Definice 8.4. Buď $\{\varphi_n\}$ ortogonální posloupnost funkcí na intervalu $[a, b]$, f integrovatelná funkce na $[a, b]$. Pak čísla c_n vyjádřená vzorcem (8.3) nazýváme *Fourierovy koeficienty funkce* f vzhledem k ortogonální posloupnosti $\{\varphi_n\}$ a řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n,$$

kde c_n jsou Fourierovy koeficienty, *Fourierovou řadou funkce* f vzhledem k ortogonální posloupnosti $\{\varphi_n\}$.

Poznámka 8.1. V případě, kdy posloupnost $\{\varphi_n\}$ je ortonormální, platí pro Fourierovy koeficienty funkce f jednodušší vztah $c_n = (f, \varphi_n)$.

Přiřazení Fourierovy řady k dané funkci f je ovšem zatím pouze formální, neboť nevíme, zda tato řada vůbec konverguje, a v případě její konvergence, zda její součet je f. Z Věty 8.1 pouze plyne, že k libovolné integrovatelné funkci f existuje nejvýše jedna řada tvaru $\sum c_n \varphi_n$, která stejnoměrně konverguje na $[a, b]$ k f. Částečné součty Fourierovy řady funkce f však aproximují v jistém smyslu nejlépe tuto funkci mezi všemi lineárními kombinacemi funkcí φ_n. Nazvěme číslo

$$\|f - g\| = \left\{ \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, dx \right\}^{1/2}$$

kvadratickou odchylkou funkcí f, g. Pak platí:

Věta 8.2. *Buď $\{\varphi_n\}$ ortogonální posloupnost funkcí na intervalu $[a, b]$, f integrovatelná funkce na $[a, b]$, buď $n \in \mathbb{N}$. Mezi všemi lineárními kombinacemi funkcí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ má od funkce f nejmenší kvadratickou odchylku ta, jejíž koeficienty jsou Fourierovy koeficienty funkce f vzhledem k posloupnosti $\{\varphi_n\}$.*

Důkaz. Buďte c_k $(k = 1, \dots, n)$ Fourierovy koeficienty funkce f, d_k $(k = 1, \dots, n)$ libovolná reálná čísla. Pak je

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{k=1}^{n} d_k\varphi_k \right\|^2 &= \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} d_k\varphi_k(x) \right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\sum_{k=1}^{n} d_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x + \\
&+ \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} d_k\varphi_k(x) \right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} d_k(f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} d_k^2 \int_a^b \varphi_k^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_k d_k \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} d_k^2 \|\varphi_k\|^2 \\
&= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \|\varphi_k\|^2 (d_k^2 - 2c_k d_k) \\
&= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \|\varphi_k\|^2 [(c_k - d_k)^2 - c_k^2].
\end{aligned}$$

Poslední výraz však zřejmě nabývá nejmenší hodnoty právě tehdy, když $d_k = c_k$ pro $k = 1, \dots, n$, tj. když d_k jsou Fourierovy koeficienty funkce f. □

Poznámka 8.2. Z předchozího důkazu plyne, volíme-li $d_k = c_k$ pro $k = 1, \dots, n$, tzv. *Besselova identita*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2.$$

Protože $\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \|^2 \geq 0$, plyne odtud

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2 \tag{8.4}$$

pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ (tzv. *Besselova nerovnost*).

Důsledek 8.1. *Nechť* $\{\varphi_n\}$ *je ortogonální posloupnost funkcí na intervalu* $[a, b]$, f *integrovatelná funkce na* $[a, b]$ *a nechť* c_n $(n \in \mathbb{N})$ *jsou Fourierovy koeficienty* *funkce* f *vzhledem k posloupnosti* $\{\varphi_n\}$. *Pak řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2 \tag{8.5}$$

konverguje a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2 \leq \|f\|^2. \tag{8.6}$$

Zejména platí $\lim c_n \|\varphi_n\| = 0$.

Důkaz. Z Besselovy nerovnosti (8.4) plyne, že posloupnost částečných součtů číselné řady (8.5) je shora ohraničená. Protože jde o řadu s nezápornými členy, je tato řada konvergentní (viz Kapitola 3).

Z Besselovy nerovnosti (8.4) také plyne, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2 = \lim \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Podle Věty 1.1 je pak $\lim c_n^2 \|\varphi_n\|^2 = 0$ a tedy i $\lim c_n \|\varphi_n\| = 0$. □

Jestliže v nerovnosti (8.6) nastane rovnost, říkáme, že pro funkci f platí *Parsevalova rovnost*. Řekneme, že Fourierova řada $\sum c_n \varphi_n$ funkce f *konverguje podle středu* k funkci f, právě když platí

$$\Big\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \Big\| \to 0 \text{ pro } n \to \infty. \tag{8.7}$$

Pak platí:

Důsledek 8.2. *Buď* $\{\varphi_n\}$ *ortogonální posloupnost funkcí na intervalu* $[a, b]$, f *integrovatelná funkce na* $[a, b]$. *Fourierova řada funkce* f *vzhledem k posloupnosti* $\{\varphi_n\}$ *konverguje podle středu k* f *právě tehdy, když pro funkci* f *platí Parsevalova rovnost, tj.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2 = \|f\|^2. \tag{8.8}$$

Důkaz. Jelikož

$$\Big\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \Big\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2,$$

je vztah (8.7) ekvivalentní se vztahem

$$\| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 \to 0,$$

tj. platí (8.8). □

Poznámka 8.3. Předchozí vztahy se poněkud formálně zjednoduší, je-li posloupnost $\{\varphi_n\}$ ortonormální. Besselova identita má pak tvar

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi x \right\|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2,$$

Parsevalova rovnost má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \| f \|^2$$

a podle (8.6) platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \| f \|^2, \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

8.2. Fourierovy řady vzhledem k systému $\{\cos nx, \sin nx\}$

V tomto odstavci se budeme zabývat výlučně Fourierovými řadami vzhledem k systému

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}. \tag{8.9}$$

Protože jsou tyto funkce 2π-periodické, půjde v tomto případě o aproximaci 2π--periodických funkcí.

Lemma 8.1. *Buď* f *periodická funkce s periodou* 2π*, jež je integrovatelná na intervalu* $[0, 2\pi]$*. Pak pro libovolné* $a \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Platí

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Substitucí $x = t + 2\pi$ ve druhém integrálu vyjde

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(t+2\pi)\,\mathrm{d}t = \\ = \int_a^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Lemma 8.2 (Ortogonalita trigonometrického systému). *Posloupnost* (8.9) *je ortogonální na libovolném intervalu* $[c, c+2\pi]$ *délky* 2π.

Důkaz. Podle předcházejícího lemmatu stačí ukázat ortogonalitu na intervalu $[-\pi, \pi]$. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je

$$(1, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \qquad (1, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x = 0;$$

pro libovolné $m, n \in \mathbb{N}$ je

$$(\sin mx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]\,\mathrm{d}x = 0$$

a pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ je

$$(\cos mx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$(\sin mx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\,\mathrm{d}x = 0.$$

Konečně je $\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2\pi$, a

$$\|\cos nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx)\,\mathrm{d}x = \pi,$$

$$\|\sin nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx)\, \mathrm{d}x = \pi.$$

□

Příslušná ortonormální posloupnost je

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots \right.$$
$$\left. \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \dots \right\}.$$

Pojmy „Fourierovy koeficienty funkce f“ a „Fourierova řada funkce f“ budou tedy v dalším zásadně znamenat „Fourierovy koeficienty funkce f vzhledem k posloupnosti (8.9)“ a „Fourierova řada funkce f vzhledem k této posloupnosti“. Úvahy provedeme pro interval $[-\pi, \pi]$, lze je však beze zbytku přenést na libovolný interval $[c, c + 2\pi]$, $c \in \mathbb{R}$.

Věta 8.3. *Fourierova řada libovolné integrovatelné funkce f na intervalu* $[-\pi, \pi]$ *má vzhledem k systému* (8.9) *tvar*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{8.10}$$

kde a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f, pro něž platí

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. Podle Věty 8.1 je Fourierova řada funkce f tvaru

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

a pro její Fourierovy koeficienty platí

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aby byla odstraněna jistá nesymetrie v těchto vztazích, je obvyklé „nultý“ koeficient psát ve tvaru $\frac{a_0}{2}$; tedy Fourierova řada funkce f má uvedený tvar (8.10). □

Důsledek 8.3. *Buď f integrovatelná funkce na intervalu* $[-\pi, \pi]$.

Je-li f sudá funkce, má její Fourierova řada tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad \textit{kde } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x \ \ (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Je-li f lichá, má její Fourierova řada tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad \textit{kde } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

Důkaz. Poznamenejme, že obecně platí: Je-li g integrovatelná funkce na intervalu $[-h, h]$, která je sudá, resp. lichá, pak

$$\int_{-h}^{h} g(x) \,\mathrm{d}x = 2 \int_0^{h} g(x) \,\mathrm{d}x, \qquad \text{resp.} \quad \int_{-h}^{h} g(x) \,\mathrm{d}x = 0$$

(toto tvrzení snadno dokážeme, vyjádříme-li integrál přes interval $[-h, h]$ na součet dvou integrálů přes intervaly $[-h, 0]$ a $[0, h]$ a zavedeme-li v prvním z nich substituci $x = -t$).

Tvrzení věty nyní plyne z toho, že je-li f sudá, je $f(x) \cos nx$ sudá, $f(x) \sin nx$ lichá a je-li f lichá, je $f(x) \cos nx$ lichá, $f(x) \sin nx$ sudá. □

Nechť f je integrovatelná funkce na intervalu $[0, \pi]$. Položíme-li pro $x \in [-\pi, 0)$ $f(x) = f(-x)$, zkonstruujeme *sudé rozšíření funkce* f na interval $[-\pi, \pi]$; Fourierově řadě sudého rozšíření funkce f říkáme rozvoj funkce f v *kosinovou řadu* na intervalu $[0, \pi]$.

Podobně, je-li f integrovatelná na $(0, \pi]$ a položíme-li $f(0) = 0$, $f(x) = -f(-x)$ pro $x \in [-\pi, 0)$, sestrojíme *liché rozšíření funkce* f na interval $[-\pi, \pi]$. Fourierova řada lichého rozšíření funkce f se nazývá rozvoj funkce f v *sinovou řadu* na intervalu $[0, \pi]$.

Poznámka 8.4. Nechť f je integrovatelná funkce na intervalu $[-\pi, \pi]$ a a_n $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, b_n $(n \in \mathbb{N})$ jsou její Fourierovy koeficienty. Podle Důsledku 8.1 řada

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

konverguje a platí

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \,\mathrm{d}x.$$

Zejména platí, že $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$.

Poznámka 8.5. Fourierovu řadu (8.10) lze vyjádřit v oboru $\mathbb{C}$ užitím vztahů (viz např. [8])

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

takto:

$$\frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(e^{inx} + e^{-inx}) - b_n i(e^{inx} - e^{-inx})\big) =$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - b_n i}{2}e^{inx} + \frac{a_n + b_n i}{2}e^{-inx}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

kde Fourierovy koeficienty c_n jsou tvaru

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

Vskutku, $c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ a pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

a podobně $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx$.

8.3. Konvergence Fourierovy řady

V tomto odstavci uvedeme postačující podmínky pro bodovou a stejnoměrnou konvergenci Fourierovy řady (8.10).

Všimněme si úvodem, že pokud Fourierova řada funkce f konverguje na intervalu $[-\pi, \pi]$, pak konverguje na intervalu $(-\infty, \infty)$ a její součet je periodická funkce s periodou 2π. Proto lze rozumné výsledky o aproximacích Fourierovými řadami očekávat pouze pro periodické funkce s periodou 2π a na takové se v dalším zásadně omezíme. Poznamenejme, že pro takovou funkci stačí, aby byla definována na intervalu $(-\pi, \pi]$ (nebo $[-\pi, \pi)$); pak je totiž jednoznačně určeno její 2π-periodické rozšíření na interval $(-\infty, \infty)$.

Zavedeme následující označení: Symbolem $f(x_0+)$ budeme rozumět číslo $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, pokud tato jednostranná limita existuje. Analogicky je $f(x_0-) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$.

Nazvěme funkci f *po částech spojitou* na intervalu $[a, b]$, právě když má na tomto intervalu pouze končený počet bodů nespojitosti, přičemž tyto body jsou body nespojitosti prvního druhu (tj. v těchto bodech existují obě jednostranné limity a jsou vlastní). Nazvěme funkci f *po částech monotonní* na intervalu $[a, b]$, právě když existuje dělení tohoto intervalu (s konečným počtem bodů) tak, že uvnitř každého dělícího intervalu je daná funkce monotonní.

Věta 8.4 (Dirichletova). *Nechť funkce f je po částech spojitá a po částech monotonní na intervalu $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada konverguje na $[-\pi, \pi]$ a její součet je roven:*

(1) $f(x_0)$ *v každém bodě* $x_0 \in (-\pi, \pi)$*, v němž je f spojitá,*

(2) $\frac{1}{2}[f(x_0-) + f(x_0+)]$ *v každém bodě* $x_0 \in (-\pi, \pi)$*, v němž je f nespojitá,*

(3) $\frac{1}{2}[f(-\pi+) + f(\pi-)]$ *v krajních bodech intervalu* $[-\pi, \pi]$.

Důkaz. Důkaz spočívá na řadě důležitých lemmat; jeho provedení překračuje rámec těchto skript. Přesný důkaz lze nalézt např. v [15]. Naznačme pouze některé klíčové kroky důkazu:

▹ Označme symbolem $S_n(f)$ n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce f. Funkci f lze na intervalu $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ vyjádřit jako $f = g - h$, kde g, h jsou neklesající na tomto intervalu. Z vlastnosti skalárního součinu plyne

$$S_n(f) = S_n(g) - S_n(h);$$

můžeme proto předpokládat přímo, že f je neklesající na $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.

▹ Buď f integrovatelná funkce na intervalu $[-\pi, \pi]$, $x_0 \in [-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$. Pak platí

$$S_n(f)(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t)] \cdot \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

Označme

$$D_n(t) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$$

pro $n \in \mathbb{N}$; tato funkce bývá někdy nazývána n-tým Dirichletovým jádrem.

▹ Tzv. princip lokalizace: Buď f integrovatelná funkce na intervalu $[-\pi, \pi]$, $x_0 \in [-\pi, \pi]$, $\delta \in \mathbb{R}$, $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$. Pak platí

$$\lim \left[S_n(f)(x_0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t)] D_n(t) \, \mathrm{d}t \right] = 0.$$

Princip lokalizace ukazuje, že o tom, zda Fourierova řada funkce f konverguje v bodě $x_0 \in [-\pi, \pi]$ a k jakému součtu, rozhodují pouze vlastnosti funkce f v (libovolně malém) okolí bodu x_0.

▹ Buď $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$ a nechť f je monotonní funkce na intervalu $[0, h]$. Pak platí

$$\lim \int_0^h f(t) \frac{\sin nt}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} f(0+).$$

▹ Píšeme $D_n(t)$ ve tvaru

$$D_n(t) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} = \frac{\sin(2n+1)t}{t} + \sin(2n+1)t \cdot \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right)$$

a dokážeme, že

$$\lim \int_0^{\delta} [f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t)] \cdot \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) \cdot \sin(2n+1)t \, \mathrm{d}t = 0.$$

▹ Dokážeme platnost vztahu

$$\lim \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t)] D_n(t) \, \mathrm{d}t = \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2},$$

odkud již $\lim S_n(f)(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)]$. □

Poznámka 8.6. Nechť funkce f je po částech spojitá na intervalu $[-\pi, \pi]$. Funkci f^* nazveme 2π-*periodickým rozšířením* funkce f, jestliže

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi), \\ f(x - 2k\pi), & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), \ k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2}\left[f(-\pi+) + f(\pi-) \right], & x = (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Jestliže Fourierova řada funkce f konverguje na intervalu $[-\pi, \pi]$ k funkci určené v Dirichletově větě (Věta 8.4), pak konverguje na $(-\infty, \infty)$ k 2π-periodickému rozšíření této funkce.

Zejména, je-li funkce f spojitá na intervalu $[-\pi, \pi]$, Fourierova řada konverguje na $(-\infty, \infty)$ k 2π-periodickému rozšíření f^* funkce f.

Poznámka 8.7. Ukažme, jak lze odvozených výsledků využít k nalezení Fourierových řad periodických funkcí s periodou $p \neq 2\pi$. Označme kvůli jednoduchosti $p = 2h$ a předpokládejme, že f je integrovatelná funkce na intervalu $[-h, h]$. Pak funkce

$$g(t) = f\left(\frac{h}{\pi}t\right)$$

je periodická s periodou 2π; je-li přitom f po částech spojitá a po částech monotonní na $[-h, h]$, zřejmě je také funkce g po částech spojitá a po částech monotonní na $[-\pi, \pi]$. Proto lze funkci g rozvinout do Fourierovy řady (8.10) na $[-\pi, \pi]$, odkud zpětnou transformací $t = \frac{\pi}{h}x$ obdržíme Fourierovu řadu funkce f na $[-h, h]$ ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{h}x + b_n \sin\frac{n\pi}{h}x\right),$$

kde Fourierovy koeficienty jsou dány vzorci

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} f(x)\cos\frac{n\pi}{h}x\,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}), \\ b_n &= \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} f(x)\sin\frac{n\pi}{h}x\,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Příklad 8.1. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Řešení. Protože f je po částech monotonní a spojitá na $[-\pi, \pi]$, přičemž $f(-\pi) = f(\pi)$, konverguje její Fourierova řada na $[-\pi, \pi]$ k f. Dále je f sudá, takže $b_n = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$ a

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3}\pi^2, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

Dvojí aplikací metody per partes dostaneme

$$a_n = \frac{4}{n^2}\cos n\pi = \frac{4}{n^2}\cdot(-1)^n.$$

Tedy pro $x \in [-\pi, \pi]$ platí:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

Položíme-li zde $x = \pi$, obdržíme

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \quad \text{odkud} \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Položíme-li $x = 0$, obdržíme

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{odkud} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Poznamenejme ještě, že nalezená Fourierova řada konverguje na $(-\infty, \infty)$ a její součet je funkce, jež je 2π-periodickým rozšířením funkce f; její graf je na Obr. 8.2.

Řešme příklad 8.1 nejprve metodou „krok za krokem“. Spočítáme koeficienty a_0, a_n a b_n, kde $n \in \mathbb{N}$.

```
> a[0]:=1/Pi*int(x^2, x=-Pi..Pi);
```

$$a_0 := \frac{2}{3}\pi^2$$

```
> assume(n, integer);
> a[n]:=1/Pi*int(x^2*cos(n*x), x=-Pi..Pi);
```

$$a_{n\sim} := 4\,\frac{(-1)^{n\sim}}{n\sim^2}$$

Protože funkce je sudá, bude koeficient b_n roven nule. Tuto skutečnost ověříme výpočtem.

```
> b[n]:=1/Pi*int(x^2*sin(n*x), x=-Pi..Pi);
```

$$b_{n\sim} := 0$$

Fourierova řada funkce $f(x) = x^2$ má tedy tvar:

```
> x^2=a[0]/2+sum(a[n]*cos(n*x)+b[n]*sin(n*x),
> n=1..infinity);
```

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \left(\sum_{n\sim=1}^{\infty}\left(4\,\frac{(-1)^{n\sim}\cos(n\sim x)}{n\sim^2}\right)\right)$$

Nyní znázorněme Fourierovy polynomy grafem. Nejdříve vytvoříme funkci `four`, která pro zadané m vytvoří funkci proměnné x z prvních m členů Fourierovy řady.

```
> four:=m->a[0]/2+sum(a[n]*cos(n*x)+b[n]*sin(n*x),
> n=1..m):
```

Například Fourierův polynom $F_3(x)$ má tvar:

```
> F[3](x)=four(3);
```

$$F_3(x) = \frac{1}{3}\pi^2 - 4\cos(x) + \cos(2x) - \frac{4}{9}\cos(3x)$$

Načteme knihovnu `plots` obsahující funkce pro kreslení grafů.

```
> with(plots):
```

Do proměnné `graf1` uložíme graf funkce x^2.

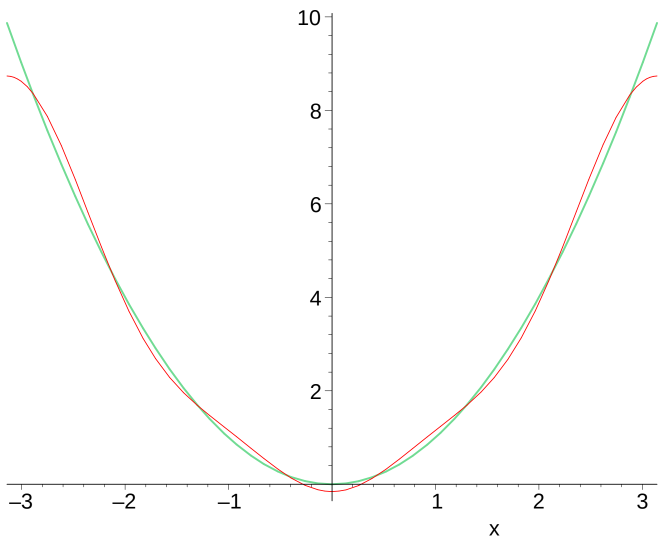
```
> graf1:=plot(x^2, x=-Pi..Pi, color=aquamarine,
> thickness=3):
```

Do proměnné `graf2` graf polynomu $F_3(x)$.

```
> graf2:=plot(four(3), x=-Pi..Pi,color=red):
```

Grafy zobrazíme společně pomocí příkazu `display` (Obr. 8.1).

```
> display(graf2, graf1);
```



Obr. 8.1: Funkce x^2, $x \in (-\pi, \pi)$ a její Fourierův polynom pro $n = 3$

Nyní vytvořme animaci znázorňující aproximaci funkce x^2 Fourierovou řadou. Pro animaci použijeme prvních 10 členů Fourierovy řady.

```
> clenu:=10:
```

Do proměnné `anim` uložme animaci polynomu $F_m(x)$ při rostoucí hodnotě m.

```
> anim:=animate(four(m), x=-3*Pi..3*Pi,
> m=0..clenu, frames=clenu+1, color=red,
> numpoints=150):
```

Pro společné zobrazení spolu s grafem funkce x^2 opět použijeme příkaz `display`.

```
> display(anim, graf1);
```

Jak je vidět, řada konverguje k periodickému rozšíření funkce x^2. Nyní se pokusíme tento postup zautomatizovat pomocí vhodných procedur:

```
> restart:
> with(plots):
```

Funkce `Period(f,a,b)` vytvoří periodické rozšíření funkce f zadané na intervalu $\langle a,\ b\rangle$.

```
> Period:=proc(f, a::realcons, b::realcons)
> local f2, modL, L;
> L:=abs(b-a):
> modL := x->x-floor((x-a)/L)*L:
> f2:=x->f(modL(x)):
> eval(f2):
> end:
```

Funkce `ClenyFourierRady(f, a, b, m)` vytvoří seznam prvních m členů Fourierovy řady funkce f na intervalu $\langle a,\ b\rangle$.

```
> ClenyFourierRady:=proc(f, a::realcons,
> b::realcons, m::integer)
> local a0, L, N, i, rozvoj, pom;
> rozvoj:=[]:
```

Zjistíme délku intervalu.

```
> L:=abs(b-a):
```

Spočítáme koeficient a_0, koeficienty a_n a b_n budeme počítat až pro konkrétní hodnoty n.

```
> a0:=eval(1/L*int(f(x), x=a..b)):
```

Počítáme postupně všechny členy a přidáváme je do seznamu.

```
> for i from 0 to (m-1) do
> if i=0 then rozvoj:=a0:
> else
> pom:=2/L*int(f(x)*cos(2*Pi/L*i*x),
> x=a..b)*cos(2*Pi/L*i*x)+ 2/L*int(f(x)
> *sin(2*Pi/L*i*x),x=a..b)*sin(2*Pi/L*i*x):
> rozvoj:=rozvoj,pom:
> fi:
> od:
> eval([rozvoj]):
> end:
```

Funkce `VytvorPol(sezclenu,m)` vytvoří pomocí seznamu členů Fourierovy řady `sezclenu` Fourierův polynom $F_m(x)$.

```
> VytvorPol:=proc(sezclenu::list, m::integer)
> local i, f, rada;
```

Sečteme prvních $m + 1$ členů rozvoje a ze součtu vytvoříme funkci proměnné x.

```
> rada:=sum(sezclenu[i+1], i=0..m):
> f:=unapply(rada, x):
> f:
> end:
```

Animaci znázorňující konvergenci Fourierovy řady vytvoří funkce `AnimGrafFourierFce(f,rada,int1,int2,limit,pocclen,inc)`.

1. parametr – funkce.

2. parametr – seznam členů Fourierovy řady (získaný výstupem procedury `ClenyFourierRady`).

3. parametr – horizontální rozsah grafu.

4. parametr – vertikální rozsah grafu.

5. parametr – celkový počet Fourierových polynomů použitých k animaci.

6. parametr – udává, kterým polynomem se začne.

7. parametr – udává rozdíl indexů dvou po sobě následujících polynomů. Například, budeme-li chtít pouze polynomy $F_1(x)$, $F_3(x)$ a $F_5(x)$, bude roven dvěma.

8. parametr – souřadnice referenčního bodu pro výpis indexu Fourierova polynomu. Údaj je vypisován napravo od zadaného referenčního bodu. Parametr je volitelný.

```
> AnimGrafFourierFce:=proc() local fce, rada,
int1, int2, pocclen, inc, limit, i, g1, g2, g3, f,
anim, barva2, bod;
> fce:=args[1]:
> rada:=args[2]:
> int1:=args[3]:
> int2:=args[4]:
> limit:=args[5]:
> pocclen:=args[6]:
> inc:=args[7]:
```

```
> if (nargs>7) then bod:=args[8]: fi:
> anim:=[]:
```

Zkontrolujeme, zda má seznam členů dostatečný počet položek.

```
> if ((nops(rada))<(pocclen+(limit-1)*inc)) then
> ERROR(cat(‘Seznam clenu obsahuje pouze ‘,
> nops(rada), ‘ polozek, je pozadovano alespon ‘,
> ((limit-1)*inc+1), ‘ polozek.‘), NULL);
> fi:
```

Do `g1` uložíme graf původní funkce nakreslený zelenomodře.

```
> g1:=plot(fce, int1, int2, color=aquamarine,
> discont=true, thickness=3, numpoints=100);
```

V cyklu budeme vytvářet grafy funkcí odpovídající Fourierovým polynomům.

```
> for i from 0 to (limit-1) do
> f:=VytvorPol(rada, pocclen+i*inc):
```

Vytvoříme barevný přechod pro lepší rozlišení jednotlivých polynomů.

```
> barva2:=COLOR(RGB, i/limit, 0, 0.9-i/limit):
> g2:=plot(f, int1, int2, color=barva2,
> thickness=1, numpoints=200):
```

Pokud jsme zadali více než sedm argumentů, budeme vypisovat i údaj o hodnotě indexu m polynomu $F_m(x)$.

```
> if (nargs>7) then
> g3:=textplot([bod[1], bod[2],
> convert(‘m‘=pocclen+i*inc, string)],
> color=barva2, align=RIGHT):
> anim:=anim, display(g3, g2, g1):
```

V opačném případě vykreslíme pouze proložené grafy polynomiálních funkcí.

```
> else
> anim:=anim, display(g2, g1):
> fi:
> od:
> end:
```

Řešme nyní příklad 8.1 s pomocí těchto nových procedur. Spočítáme prvních dvacet členů Fourierovy řady funkce x^2 na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

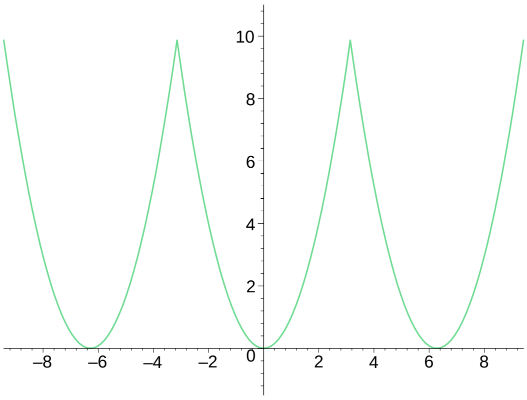
```
> rada:=ClenyFourierRady(x->x^2, -Pi, Pi, 20):
```

Vytvoříme periodické rozšířeni funkce x^2.

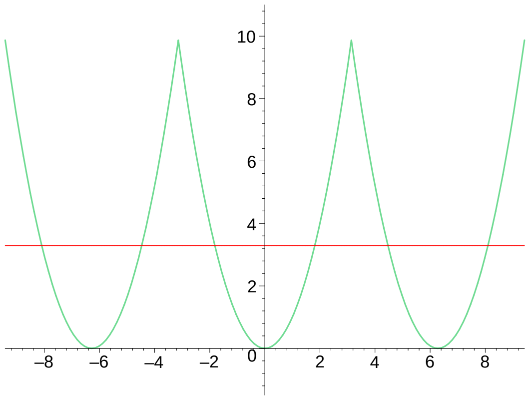
```
> fce:=Period(x->x^2, -Pi, Pi):
```

Do proměnné `graf1` uložíme graf periodického rozšíření (Obr. 8.2).

```
> graf1:=plot(fce, -3*Pi..3*Pi, -1.5..11,
> color=aquamarine, thickness=3, discont=true):
> display(graf1);
```



Obr. 8.2: Period. rozšíření funkce x^2



Obr. 8.3: Fourierův pol. pro $n = 0$

Nyní spočítáme polynom $F_0(x)$ a vykreslíme jeho graf společně s periodickým rozšířením (Obr. 8.3).

```
> pol:=VytvorPol(rada, 0):
> pol(x);
```

$$\frac{1}{3}\pi^2$$

```
> graf2:=plot(pol, -3*Pi..3*Pi, -1.5..11,
> color=red, numpoints=200):
> display(graf2, graf1);
```

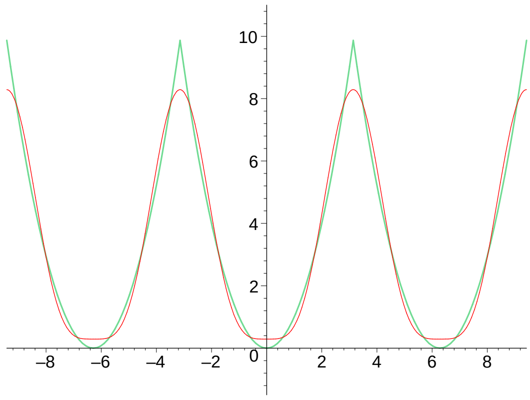
Totéž pro Fourierův polynom $F_2(x)$ (Obr. 8.4).

```
> pol:=VytvorPol(rada, 2):
> pol(x);
```

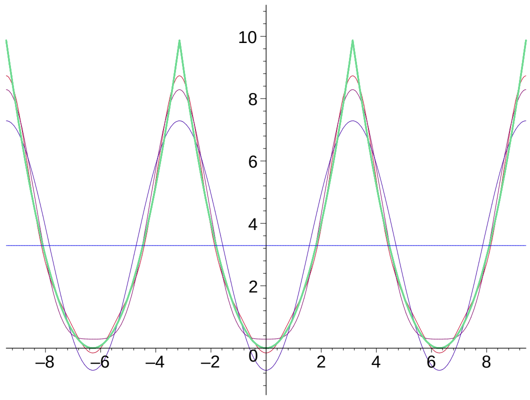
$$\frac{1}{3}\pi^2 - 4\cos(x) + \cos(2\,x)$$

```
> graf2:=plot(pol, -3*Pi..3*Pi, -1.5..11,
> color=red, numpoints=200):
> display(graf2, graf1);
```

Pomocí funkce `AnimGrafFourierFce` znázorníme první čtyři Fourierovy polynomy do jednoho obrázku (8.5).



Obr. 8.4: Fourierův polynom pro $n = 2$



Obr. 8.5: Fourierovy polynomy pro $n = 0, 1, 2, 3$

```
> anim:=AnimGrafFourierFce(fce, rada,
> -3*Pi..3*Pi, -1.5..11, 4, 0, 1):
> display(anim, insequence=false);
```

Použijeme-li v příkazu `display` volbu `insequence=true`, místo prokládaného grafu vytvoříme animaci.

```
> anim:=AnimGrafFourierFce(fce, rada,
> -3*Pi..3*Pi, -1.5..11, 10, 0, 1, [-7, 10]):
> display(anim, insequence=true);
```

Příklad 8.2. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

Řešení. Platí

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}[\mathrm{e}^x]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1).$$

Dále metodou per partes nalezneme primitivní funkci k funkci $\mathrm{e}^x \cos nx$ ve tvaru

$$\frac{\mathrm{e}^x(\cos nx + n\sin nx)}{n^2 + 1}$$

a primitivní funkci k funkci $\mathrm{e}^x \sin nx$ ve tvaru

$$\frac{\mathrm{e}^x(\sin nx - n\cos nx)}{n^2 + 1};$$

je tedy

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x(\cos nx + n\sin nx)}{n^2+1}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{e^{2\pi}-1}{n^2+1},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x(\sin nx - n\cos nx)}{n^2+1}\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{\pi}(e^{2\pi}-1)\frac{n}{n^2+1}.$$

Protože f je monotonní a spojitá na $[0, 2\pi]$, je součet její Fourierovy řady na $(0, 2\pi)$ roven přímo f. V krajních bodech tohoto intervalu je součet roven $(e^{2\pi} + 1)/2$, viz Obr. 8.6.

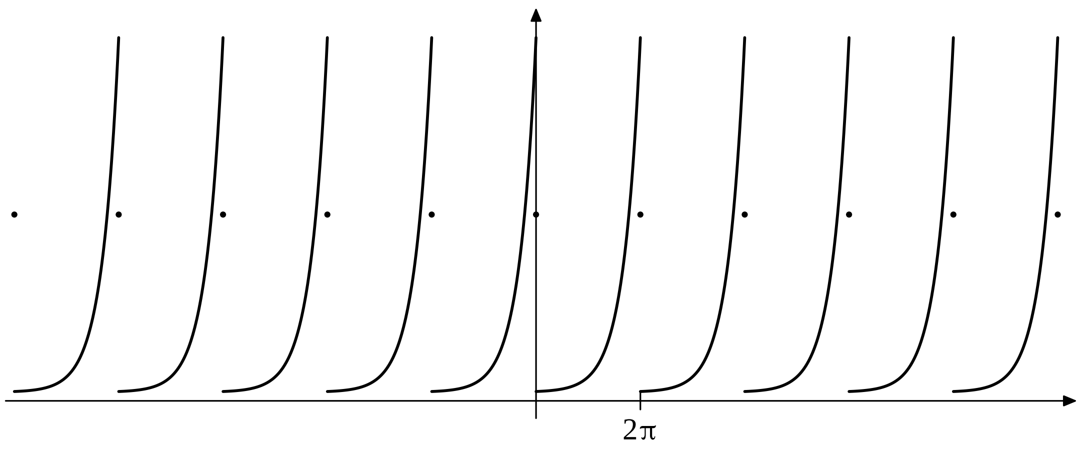
Pro $x \in (0, 2\pi)$ tedy platí:

$$e^x = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\cos nx - \frac{n}{n^2+1}\sin nx\right)\right]$$

a pro $x = 0$, $x = 2\pi$ je součet řady na pravé straně roven $(e^{2\pi} + 1)/2$.

Odtud obdržíme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi(e^{2\pi}+1) - (e^{2\pi}-1)}{2(e^{2\pi}-1)}\,.$$



Obr. 8.6: Periodické rozšíření funkce e^x, $x \in (0, 2\pi)$

Příklad 8.3. Funkci $f(x) = x$ rozviňte na intervalu $[0, \pi]$ do kosinové řady.

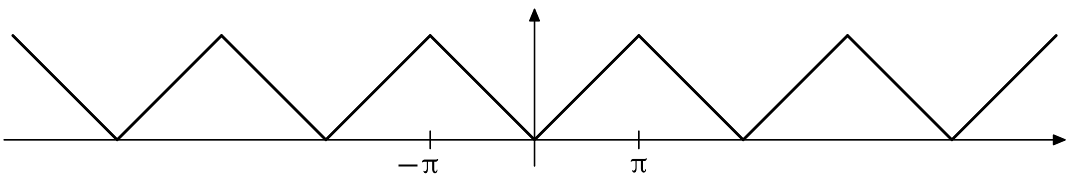
Řešení. Sudé periodické rozšíření této funkce je znázorněno na Obr. 8.7. Přitom platí

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}[x\sin nx]_0^\pi - \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1].$$

Tedy pro $x \in [0, \pi]$ platí

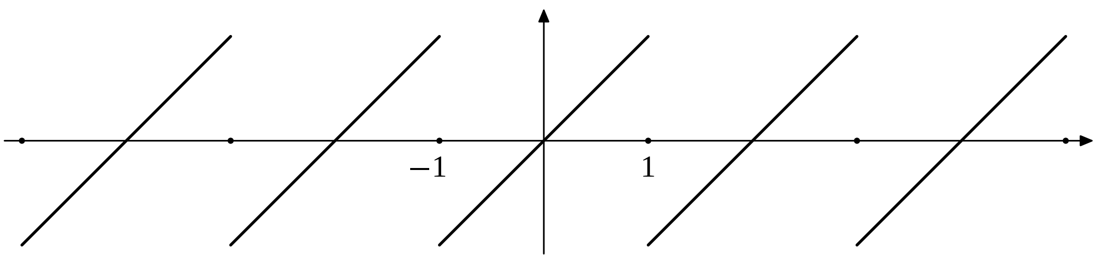
$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum \frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$



Obr. 8.7: Sudé periodické rozšíření funkce x, $x \in (0, \pi)$

Příklad 8.4. Najděte Fourierův rozvoj funkce $f(x) = x$ na intervalu $[-1, 1]$.

Řešení. Periodické rozšíření této funkce je uvedeno na Obr. 8.8.



Obr. 8.8: Periodické rozšíření funkce x, $x \in (-1, 1)$

V tomto případě je $h = 1$; dále je f lichá, a proto $a_n = 0$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 x\sin n\pi x\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{2}{n\pi}[x\cos n\pi x]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi^2}[\sin n\pi x]_0^1 = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Tedy

$$x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin n\pi x \qquad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

Na závěr se budeme zabývat otázkou, kdy Fourierova řada dané funkce f konverguje stejnoměrně na $[-\pi, \pi]$. V této souvislosti je vhodné si všimnout, že pokud f je nespojité v alespoň jednom bodě $x_0 \in [-\pi, \pi]$, pak její Fourierova řada nemůže konvergovat stejnoměrně, neboť součet stejnoměrně konvergentní trigonometrické řady je podle Věty 5.8 spojitá funkce na $[-\pi, \pi]$. Stejnoměrnou konvergenci lze proto očekávat pouze u Fourierových řad spojitých funkcí. Důkaz následujícího tvrzení neuvádíme, lze jej nalézt např. v [8].

Věta 8.5. *Nechť* 2π*-periodická funkce* $f(x)$ *je spojitá na intervalu* $[-\pi, \pi]$ *a její derivace* $f'(x)$ *je na témže intervalu po částech spojitá. Pak její Fourierova řada konverguje k funkci* $f(x)$ *stejnoměrně na intervalu* $(-\infty, \infty)$.

Poznámka 8.8. Lze dokázat (viz např. [8]) větu o jednoznačnosti pro součet trigonometrické řady (tzv. Heineho-Cantorova věta): Jestliže trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

a trigonometrická řada

$$\frac{a_0^*}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^* \cos nx + b_n^* \sin nx \right)$$

mají stejný součet pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus M$, kde M je nejvýše spočetná množina, pak platí $a_n = a_n^*$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $b_n = b_n^*$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Cvičení

8.1. Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Postup je stejný jako v příkladě 8.1. Nejprve ukážeme řešení metodou „krok za krokem“.

```
> assume(n, integer);
```

Všimněme si, že funkce $\operatorname{sgn}(x)$ je lichá, proto budou členy a_0 a a_n rovny nule. Ověříme výpočtem:

```
> a[0]:=1/Pi*(int(signum(x), x=-Pi..Pi));
```

$$a_0 := 0$$

```
> a[n]:=1/Pi*(int(signum(x)*cos(n*x),
> x=-Pi..Pi));
```

$$a_{n\sim} := 0$$

```
> b[n]:=1/Pi*(int(signum(x)*sin(n*x),
> x=-Pi..Pi));
```

$$b_{n\sim} := -2\,\frac{(-1)^{n\sim} - 1}{\pi\, n\sim}$$

Je vidět, že pro n sudé je $b_n = 0$; proto další úpravy provádíme pro n liché, tj. $n = 2k - 1$.

```
> assume(k, integer);
> b[n]:=simplify(subs(n=2*k-1,b[n]));
```

$$b_{n\sim} := 4\,\frac{1}{\pi\,(2\,k\sim - 1)}$$

Fourierova řada funkce $\operatorname{sgn}(x)$:

```
> ‘sgn(x)‘=Sum(b[n]*sin((2*k-1)*x),
> k=1..infinity);
```

$$sgn(x) = \sum_{k\sim=1}^{\infty} \left(4\,\frac{\sin((2\,k\sim - 1)\,x)}{\pi\,(2\,k\sim - 1)}\right)$$

Fourierovy polynomy opět znázorníme grafem (Obr. 8.9) a animací.

```
> four:=m->sum(b[n]*sin((2*k-1)*x), k=1..m):
```

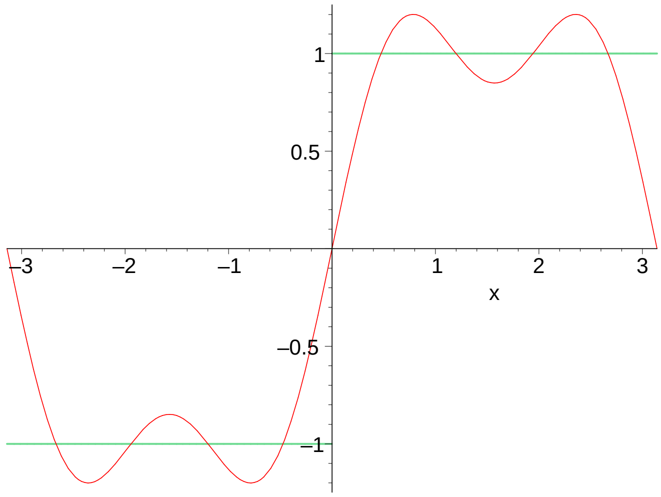
Pro $k = 2$ ($n = 3$) dostáváme:

```
> F[2](x)=four(2);
```

$$F_2(x) = 4\,\frac{\sin(x)}{\pi} + \frac{4}{3}\,\frac{\sin(3\,x)}{\pi}$$

```
> with(plots):
> graf1:=plot(signum(x), x=-Pi..Pi,
> color=aquamarine, discont=true, thickness=3):
```

```
> graf2:=plot(four(2), x=-Pi..Pi,
> color=red):
> display(graf2, graf1);
```



Obr. 8.9: Funkce $\operatorname{sgn}(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$ a její Fourierův polynom pro $n = 3$

```
> anim:=animate(four(m), x=-6..6, m=1..10,
> frames=10, numpoints=250, color=red):
> display(anim, graf1);
```

Nyní ukážeme řešení s využitím Mapleovských procedur. Do proměnných `a` a `b` uložíme krajní body intervalu.

```
> a:=-Pi:b:=Pi:
```

Definujeme funkci.

```
> fce1:=x->signum(x):
```

Spočítáme prvních dvacet členů Fourierovy řady.

```
> rada:=ClenyFourierRady(fce1, a, b, 20):
```

Vytvoříme periodické rozšíření funkce $\operatorname{sgn}(x)$.

```
> fce:=Period(fce1, a, b):
```

Graf periodického rozšíření uložíme do proměnné `graf1`.

```
> graf1:=plot(fce, -8..8, -1.5..1.5,
> color=aquamarine, thickness=3, discont=true):
```

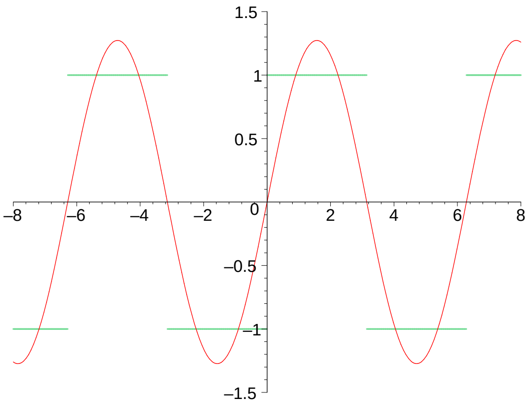
Spočítáme hodnotu polynomu $F_1(x)$ a vykreslíme jeho graf spolu s periodickým rozšířením funkce $\operatorname{sgn}(x)$ (Obr. 8.10).

```
> pol:=VytvorPol(rada, 1):
```

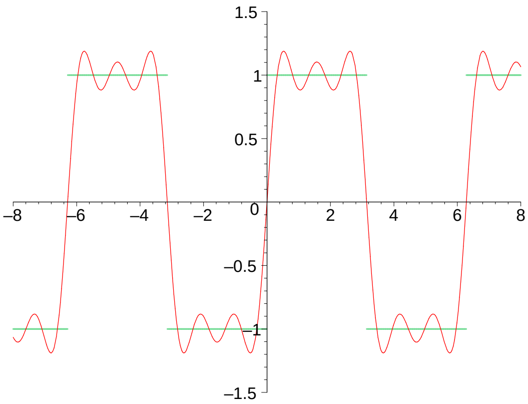
```
> pol(x);
```

$$4\,\frac{\sin(x)}{\pi}$$

```
> graf2:=plot(pol, -8..8, -1.5..1.5,
> color=red, numpoints=200):
> display(graf1, graf2);
```



Obr. 8.10: Fourierův pol. pro $n = 1$



Obr. 8.11: Fourierův pol. pro $n = 5$

Podobně Fourierův polynom $F_5(x)$ je tvaru (Obr. 8.11):

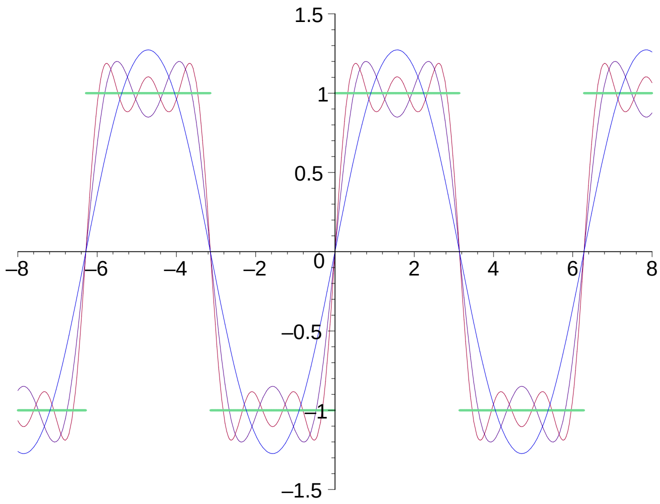
```
> pol:=VytvorPol(rada, 5):
> pol(x);
```

$$4\,\frac{\sin(x)}{\pi}+\frac{4}{3}\,\frac{\sin(3\,x)}{\pi}+\frac{4}{5}\,\frac{\sin(5\,x)}{\pi}$$

```
> graf2:=plot(pol, -8..8, -1.5..1.5,
> color=red, numpoints=200):
> display(graf2, graf1);
```

Podobně jako v předcházejícím příkladě použijeme pro vytvoření prokládaného grafu funkci `AnimGrafFourierFce` (Obr. 8.12) a animace.

```
> anim:=AnimGrafFourierFce(fce, rada, -8..8,
> -1.5..1.5, 3, 2, 2):
> display(anim, insequence=false);
> anim:=AnimGrafFourierFce(fce, rada, -8..8,
> -1.5..1.5, 10, 1, 2, [-7.8, 1.3]):
> display(anim, insequence=true);
```



Obr. 8.12: Fourierovy polynomy pro $n = 1, 3, 5$

8.2. Rozložte ve Fourierovu řadu funkci

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0], \\ \sin x, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

8.3. Mějme zadánu funkci

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ -\cos x, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Rozložte tuto funkci v kosinovou Fourierovu řadu.

8.4. Určete rozvoj periodické funkce s periodou 2π, která je v základním intervalu periodicity definována:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0], \\ x, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

8.5. Rozviňte ve Fourierovu řadu na intervalu $[-\pi, \pi]$ funkci

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x), & x \in (-\pi, 0], \\ \frac{1}{2}(\pi - x), & x \in [0, \pi). \end{cases}$$

8.6. Rozviňte ve Fourierovu řadu funkci $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.

8.7. Rozviňte ve Fourierovu řadu funkci $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

8.8. Rozložte funkci $f(x) = x(\pi - x)$ v sinovou Fourierovu řadu na intervalu $(0, \pi)$. Najděte součet řady

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} + \ldots .$$

8.9. Funkci $f(x) = \pi^2 - x^2$ rozložte ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi, \pi)$. Najděte součty řad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

8.10. Určete Fourierův rozvoj periodické funkce $f(x) = x$ se základním intervalem periodicity $(0, 2\pi)$. Určete součet řady

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots .$$

8.11. Rozložte ve Fourierovu řadu funkci $f(x) = |x|$ na intervalu $(-l, l)$.

8.12. Nakreslete liché periodické rozšíření funkce $\frac{1}{2}(\pi - x)$, $x \in [0, \pi]$ a srovnejte s Obr. 5.2, 5.3. Z Fourierovy řady této funkce

$$\frac{1}{2}(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

integrací dokažte vztah

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}$$

pro každé $x \in [0, 2\pi]$.

8.13. Pomocí Parsevalovy rovnosti dokažte, že pro sudou funkci $f(x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$ platí vztah $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ a odtud pro $f(x) = x^2$ odvoďte vzorec

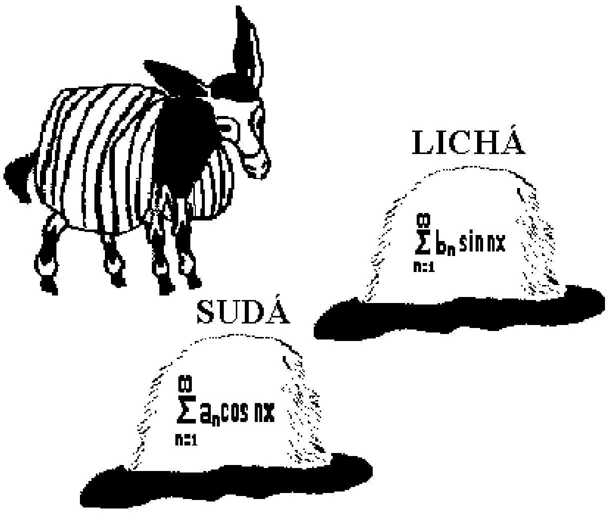
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} .$$

8.14. Udejte příklad trigonometrické řady, jež není Fourierovou řadou žádné funkce.
Návod: Uvažte Poznámku 8.4.

8.15. Udejte příklad trigonometrické řady, jež bodově konverguje na $[-\pi, \pi]$, ale není Fourierovou řadou žádné integrovatelné funkce.
Návod: Podle Dirichletova kritéria řada $\sum \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ konverguje pro každé $x \in \in [-\pi, \pi]$. Kdyby tato řada byla Fourierovou řadou funkce f, pak podle Poznámky 8.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$, což je spor.

8.16. Dokažte: Jestliže na intervalu $[-\pi, \pi]$ trigonometrická řada stejnoměrně konverguje, pak je Fourierovou řadou svého součtu.

Další příklady rozvojů funkcí do Fourierových řad zpracované pomocí Maplu najdete na CD-ROMu v souboru `pdf/nradanm8.pdf`.



Člověk občas narazí na pravdu, ale většinou se otřepe a jde zase dál.

Kapitola 9

Videoukázky

Tato kapitola obsahuje pomocné texty pro sledování videonahrávek. Doporučujeme v jednom okně sledovat videonahrávku, a v druhém mít otevřené tyto texty.

9.1. Klip1: přednáška – nekonečné číselné řady

Video spusťte otevřením tohoto odkazu (předpokladem je instalace webového prohlížeče a software pro přehrávání videa ve formátu MPEG 1 a jeho asociace s koncovkou .mpg).

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{s_n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (a_n \in \mathbb{R})$$

Součet řady:

Určíme jako limitu posloupnosti n-tých částečných součtů

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

1. $\exists \lim s_n = s \in \mathbb{R} \ \ldots \ \sum a_n$ konverguje. Platí: $\sum_1^\infty a_n = s \Rightarrow \lim a_n = 0$ (nutná podmínka konvergence řady)
2. $\exists \lim s_n = \pm\infty \ \ldots \ \sum a_n$ diverguje
3. $\nexists \lim s_n \ \ldots \ \sum a_n$ diverguje

Kritéria konvergence

Na konvergenci či divergenci řady nemá vliv chování konečně mnoha členů, nemusíme tedy striktně psát $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, budeme psát zkráceně $\sum a_n$.

Podle typu nekonečné řady rozlišujeme kritéria

1. řada s nezápornými členy $\sum a_n,\ a_n > 0$
   - Srovnávací kritérium – jestliže pro dostatečně velká n je $a_n \leq b_n$, pak platí
     $\sum b_n$ konverguje $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konverguje
     $\sum a_n$ diverguje $\Rightarrow$ $\sum b_n$ diverguje
   - Podílové a odmocninové kritérium
     $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ nebo $\lim \sqrt[n]{a_n} = q$
     $$q \begin{cases} < 1 & \text{konverguje} \\ > 1 & \text{diverguje} \\ = 1 & \text{nelze nic říci} \end{cases}$$
   - Limitní srovnávací kritérium
     $$\lim \frac{a_n}{b_n} = L \quad \begin{array}{lll} L < \infty,\ \sum b_n \text{ konv.} & \Rightarrow & \sum a_n \text{ konverguje} \\ L > 0,\ \sum b_n \text{ div.} & \Rightarrow & \sum a_n \text{ diverguje} \end{array}$$
   - Integrální kritérium $\sum a_n$ konv. $\Leftrightarrow$ $\int\limits_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, kde f je klesající a platí $f(n) = a_n$.
2. Alternující řady $\sum\limits_1^\infty (-1)^{n+1} a_n,\ a_n > 0$
   Leibnizovo kritérium: řada konverguje, jestliže je posloupnost a_n klesající a $\lim a_n = 0$.
3. Řady s libovolnými členy $\sum a_n,\ a_n \in \mathbb{R}$
   - absolutní konvergence ($\sum |a_n|$ konverguje)
     $\sum a_n$ absolutně konverguje $\Rightarrow \sum a_n$ konverguje
   - neabsolutní konvergence pro řady typu $\sum a_n b_n$
     – Dirichletovo kritérium: $\sum a_n b_n$ konverguje, jestliže $\lim a_n = 0$, $|b_1 + \cdots + b_n| \leq c$ (řada $\sum b_n$ má omezené částečné součty)
     – Abelovo kritérium: $\sum a_n b_n$ konverguje, jestliže $|b_n| \leq c$ a $\sum a_n$ konverguje.

Operace s nekonečnými řadami

1. Algebraické operace

   (a) součet

   $\sum a_n + \sum b_n = \sum(a_n + b_n)$ za předpokladu konvergence obou řad

   (b) součin – situace je mnohem komplikovanější, existuje nekonečně mnoho způsobů, jak definovat součin řad – viz Kapitola 4.

2. Základní zákony pro součet nekonečných řad

   (a) Distributivní zákon $k(\sum_{1}^{\infty} a_n) = \sum_{1}^{\infty} ka_n$ za předp. konvergence $\sum a_n$

   (b) Asociativní zákon $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots = a_1 + (a_2 + a_3) \ldots$ za předp. konvergence $\sum a_n$

   (c) Komutativní zákon $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = a_3 + a_1 + a_2 + \ldots$ platí pouze za předp. absolutní konvergence $\sum a_n$

9.2. Klip2: cvičení – řešené příklady na konvergenci řad

Video spusťte otevřením tohoto odkazu (předpokladem je instalace webového prohlížeče a software pro přehrávání videa ve formátu MPEG 1 a jeho asociace s koncovkou .mpg).

Zjistěte konvergenci řad:

1. $\sum \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$
   Jedná se o řadu s nezápornými členy, použijeme odmocninové kritérium:
   $$\lim \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$
   Výsledek: řada konverguje.

2. $\sum \frac{1}{n \ln n}$
   Opět se jedná o řadu s nezápornými členy, nyní ale použijeme integrální kritérium
   $$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \infty.$$
   Použili jsme substituci $\ln x = t$. Jelikož integrál diverguje, i daná řada diverguje.

3. $\sum \arccos \frac{n}{n+1}$
   Jedná se opět o řadu s nezápornými členy, nevíme, co čekat – porovnáme tuto řadu s harmonickou řadou $\sum \frac{1}{n}$. Limitní srovnávací kritérium:
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\arccos \frac{n}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{0}{0} \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\arccos \frac{n}{n+1}}{\frac{1}{n}} =$$
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{n}{n+1})^2}} \cdot \frac{n+1-n}{(n+1)^2}}{-\frac{1}{n^2}} =$$
   $$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{\frac{2n+1}{(n+1)^2}} \cdot (n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{2n+1} \cdot |n+1|} = \infty > 0$$
   Řada $\sum \frac{1}{n}$ diverguje $\Rightarrow$ daná řada diverguje.

4. $\sum \dfrac{\sin n}{6^n}$
Nyní máme řadu s libovolnými členy, zkusíme absolutní konvergenci:

$$\left|\frac{\sin n}{6^n}\right| \leq \frac{1}{6^n}.$$

Řada $\sum \frac{1}{6^n}$ konverguje (např. odmocninové kritérium: $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{6^n}} = \frac{1}{6} < 1$) $\Rightarrow$ podle srovnávacího kritéria daná řada konverguje absolutně.

5. $\sum (-1)^n \dfrac{\sin^2 n}{n}$
Jedná se o řadu alternující, ale nelze použít Leibnizovo kritérium, protože $\left\{\frac{\sin^2 n}{n}\right\}$ není klesající. Musíme tedy použít nějaký jiný způsob – upravíme dle vzorce pro poloviční úhel výraz $\sin^2 n = \frac{1-\cos 2n}{2}$ a rozdělíme původní řadu na dvě řady:

(a) $\sum (-1)^n \frac{1}{2n}$ – konverguje podle Leibnizova kritéria.

(b) $\sum (-1)^n \frac{\cos 2n}{2n}$ – řada s libovolnými členy. Upravíme:

$$(-1)^n \cos 2n = \cos n\pi \cos 2n = \frac{1}{2}(\cos n(\pi + 2) + \cos(\pi - 2)).$$

Řada $\sum \cos nx$ má omezené částečné součty pro $x \neq 2k\pi$, $\lim \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ podle Dirichletova kritéria konvergují řady

$$\sum \frac{\cos n(\pi + 2)}{n}, \sum \frac{\cos n(\pi - 2)}{n},$$

a proto konverguje i řada $\sum (-1)^n \dfrac{\cos 2n}{2n}$.

Jelikož obě tyto řady konvergují, konverguje i řada původní.

9.3. Klip3: přednáška – nekonečné řady funkcí

Video spusťte otevřením tohoto odkazu (předpokladem je instalace webového prohlížeče a software pro přehrávání videa ve formátu MPEG 1 a jeho asociace s koncovkou .mpg).

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x \in I$$

Stejnoměrná konvergence

- Posloupnost $\{s_n(x)\},\ x \in I$ konverguje k funkci $s(x)$:

$$\forall_{x\in I} \lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x),$$
$$\forall_{x\in I}\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0}\forall_{n>n_0} : |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$$

- Posloupnost $\{s_n(x)\},\ x \in I$ stejnoměrně konverguje k $s(x)$:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0}\forall_{n>n_0}\forall_{x\in I} : |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$$

- Řada $\sum f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na intervalu I, jestliže stejnoměrně konverguje posloupnost n-tých částečných součtů.

  Weierstrassovo kritérium: $\sum f_n(x)$ stejnoměrně konverguje, jestliže

$$|f_n(x)| \le a_n\ \forall x \in I \text{ a } \sum a_n \text{ konverguje}.$$

Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností a řad

- $\{s_n(x)\}$ stejnoměrně konverguje k $s(x)$ a funkce s_n jsou spojité na $I \Rightarrow s$ je spojitá na I.

  Př. $\{e^{-nx}\},\ I = [0, \infty)$

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-nx} = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

  Proto posloupnost není stejnoměrně konvergentní.

- Derivace řady. Platí

$$\left(\sum f_n(x)\right)' = \sum f_n'(x) \qquad \text{na } I$$

  za předpokladu, že $\sum f_n(x)$ konverguje na I a $\sum f_n'(x)$ konverguje stejnoměrně na I.

- Integrace řady. Platí

$$\int_a^b \sum f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

  za předpokladu, že jsou funkce f_n integrace schopné na $[a, b]$ a jestliže je $\sum f_n$ na $[a, b]$ stejnoměrně spojitá.

Mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,\ a_n \in \mathbb{R}$$

Existuje číslo $0 \le r \le \infty$ s vlastností

$(-\infty, -r) \cup (r, \infty)$	diverguje
$(-r, r)$	konverguje

O krajních bodech intervalu $(-r, r)$ nelze obecně nic říci, je třeba je vyšetřit zvlášť. Číslo r se nazývá *poloměr konvergence.*

Každá mocninná řada je stejnoměrně konvergentní na každém uzavřeném podintervalu $[-\rho, \rho]$ intervalu $(-r, r)$, kde $\rho < r$. Použití: rozvoj funkcí do mocninných řad.

Příklad 9.1. Rozviňte do mocninné řady funkci $\operatorname{arctg} x$.

Řešení. Nejprve danou funkci zderivujeme a tuto derivaci snadno rozvineme do mocninné řady:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots \qquad \text{platí pro } |x| < 1.$$

Nyní pravou stranu zintegrujeme člen po členu a dostáváme požadovaný výsledek

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \qquad \text{pro } |x| < 1\,.$$

Výsledky cvičení

Kapitola 1

1.1. a) 1 b) $\frac{11}{18}$ c) $\frac{23}{90}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{2}$ f) 3 g) 5 h) $\frac{14}{15}$ **1.2.** a) $-\frac{4}{33}$ b) $\frac{27}{50}$ **1.3.** a)–c) divergují **1.4.** a) $x = 10$ b) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$. **1.5.** Součet obvodů $8(2+\sqrt{2})$, součet obsahů 8. **1.6.** Úloha vede k určení součtu nekonečné geometrické řady: $48 + 24 + 12 + 6 + \cdots$, jejíž součet je $s = 96$ **1.7.** Obsah Sierpińského koberce je $P = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{9^{n+1}} = 0$.

Kapitola 2

2.1. a) konverguje b) konverguje c) konverguje d) diverguje e) konverguje pro $0 < a < 1$, diverguje pro $a \geq 1$ f) diverguje g) konverguje pro $a > 1$, diverguje pro $a \in (0, 1]$ h) konverguje i) konverguje j) konverguje k) konverguje l) diverguje m) konverguje n) diverguje o) diverguje pro $a \geq \frac{\pi}{2}$, konverguje pro $0 < a < \frac{\pi}{2}$ p) diverguje q) diverguje. **2.2.** $a_{2n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}}$, $a_{2n} = \frac{1}{3^{2n}}$. **2.3.** Neexistuje [Návod: je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak existuje $\{n_k\}$, $n_k \to \infty$ tak, že $\lim \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$. Označíme-li $b_k = a_{n_k}$, je řada $\sum b_k$ divergentní. Protože $a_n \geq 0$, je divergentní i řada $\sum a_n$. **2.4.** viz [5].

Kapitola 3

3.1. a) konverguje b) konverguje c) diverguje d) diverguje e) konverguje f) konverguje. **3.2.** a) konverguje neabsolutně b) konverguje absolutně c) konverguje neabsolutně d) diverguje e) konverguje absolutně f) konverguje absolutně g) konverguje absolutně h) konverguje neabsolutně. **3.3.** a) Pro $x > 0$ řada konverguje absolutně, pro $x \leq 0$ řada diverguje. b) Pro $x \in (\frac{1}{e}, e)$ řada konverguje absolutně, pro ostatní x řada diverguje. c) Pro $|x| < 2$ řada konverguje absolutně, pro $|x| > 2$ a $x = 2$ diverguje, pro $x = -2$ konverguje neabsolutně. d) Pro $x \geq 0$ řada konverguje absolutně, pro $x < 0$ řada diverguje.

Kapitola 4

4.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \mathrm{e}^{x+y}$ **4.2.** Cauchyův součin je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^{n+1}} = \frac{1}{(q-1)^2}$, odkud plyne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^n} = \frac{q}{(q-1)^2}$ **4.3.** a) $n = 5$ [Využijte Větu 4.5] b) $n = 7$ [Využijte Větu 4.6] c) $n = 5$ [Využijte Větu 4.4] **4.4.** a) $3(n+1)(n+2)(n+3) > 10^4$ b) $\ln n > 10^4$ c) $\frac{5^n \ln^2 5}{n \ln 5 + 1} > 10^4$.

Kapitola 5

5.1. a) ne (neboť $\lim f_n(x) = 0$ a $f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) = \frac{1}{4}$) b) ano (podle definice) **5.2.** a) $x \in (\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e})$ b) $x \in (-2, 2)$ c) $x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{3}, \infty)$. **5.3.** Majorantní řady: a) $\frac{1}{n^2}$ b) $\frac{1}{n^s}$ c) $\frac{1}{2^n}$ d) $\frac{1}{n^2}$ e) $\frac{1}{n(n+1)}$. f) $\frac{2}{n^2}$ **5.4.** a) – Weierstrassovo kritérium ($\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$) b) – Weierstrassovo kritérium ($\frac{a^2}{n \ln^2 n}$) c) – Dirichletovo kritérium ($|\sum_{k=1}^{n} \sin x \sin kx| \leq 2$, $\{\frac{1}{\sqrt{n+x}}\}] \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$). **5.5.** $\frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2}$ **5.6.** $\frac{1}{2}$.

Kapitola 6

6.1. a) $r = 1$, $(-1, 1)$ b) $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ c) $r = 1$, $(-1, 1]$ d) $r = 3$, $[-3, 3)$ e) $r = \infty$ f) $r = 1$, $(-1, 1)$ g) $r = 1$, $(-1, 1)$ h) $r = 1$, $[-1, 1]$ i) $r = 4$, $(-4, 4)$ j) $r = \infty$ k) $r = \infty$ **6.2.** a) $\frac{2x}{(1-x)^3}$, $|x| < 1$ b) $(x+1)\ln(1+x) - x$, $x \in (-1, 1]$ c) $\operatorname{arctg} x$, $|x| \leq 1$ d) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $|x| < 1$ e) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$ f) $\operatorname{arctg} x$, $|x| \leq 1$ g) $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$ h) $2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$, $|x| \leq 1$ i) $\ln\frac{1}{1-x}$, $x \in [-1, 1)$ j) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$, $|x| < 1$. **6.3.** a) $\ln\frac{3}{2}$ b) $\frac{80}{27}$ c) $\frac{128}{343}$. **6.4.** a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!}$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}$ e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n x^{n-1}$ g) $\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} x^n$ h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$ i) $\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \cdots$ j) $e \cdot (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \cdots)$ k) $1 - \frac{n}{2}x^2 + \frac{3n^2 - 2n}{24}x^4 + \cdots$ l) $x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n-1)!} + \cdots$ m) $x + x^2 + \frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^5}{5!} + \cdots$ n) $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \cdots$. **6.5.** a) $1 + \frac{3}{2}((x-1) + \frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{(x-1)^3}{2^2 \cdot 3!} + \cdots)$ b) $\frac{1}{3} - \frac{x-3}{9} + \frac{(x-3)^2}{27} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(x-3)^{n-1}}{3^n} + \cdots$ c) $e^{-2}\left(1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}\right)$ d) $(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} + \cdots$.

Kapitola 7

7.1. a) 0,99984 b) 0,0174524 c) 0,17364 d) 0,9848 e) 0,5235. **7.2.** a) 0,0874 b) 0,017455 c) 1,37 d) 2,74. **7.3.** a) 3,1415 b) 3,141592654. **7.4.** a) 0,778 b) 1,39 c) 2,71828 d) 7,389 e) 0,3678 f) 1,157 g) 2,25 h) 2,0022 i) 4,12 j) 2,09 k) 1,004975 l) 3,017 m) 5,03968. **7.5.** a) 0,693 b) 1,0986 c) 1,6094 d) 2,39 e) 0,7 f) 1,04 g) 0,43 h) 1,58 i) −0,693 j) −0,2 k) −0,435. **7.6.** a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{7}{12}$ e) -1 f) $\frac{5}{6}$ g) $-\frac{1}{12}$ h) $\frac{1}{3}$ i) $\frac{2}{3}$ j) $-\frac{1}{3}$ k) 0 l) $\frac{1}{60}$. **7.7.** a) $-\frac{1}{x}+\ln|x|+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{2\cdot 3!}+\cdots+\frac{x^n}{n\cdot(n+1)!}+\cdots\quad x\in\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ b) $x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)^2}+\cdots\quad x\in(-\infty,\infty)$ c) $x+\frac{x^4}{2\cdot 4}-\frac{x^7}{8\cdot 7}+\frac{x^{10}}{16\cdot 10}+\cdots\quad x\in[-1,1]$ d) $1+\frac{x^5}{2\cdot 5}+\frac{x^9}{8\cdot 3}+\frac{5x^{13}}{16\cdot 13}+\cdots\quad x\in(-1,1)$ e) $x+\frac{x^{10}}{10}+\frac{x^{19}}{19}+\cdots+\frac{x^{9n-8}}{9n-8}+\cdots\quad x\in[-1,1)$ f) $\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}++\cdots\quad x\in(-\infty,\infty)$. **7.8.** a) 3,518 b) 1,0573 c) 2,834 d) 0,12 e) 0,497 f) 0,905. **7.9.** a) $y=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{3}x^3+\frac{19}{12}x^4+\cdots$ b) $y=1+2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4++\cdots$ c) $y=2+x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots$ d) $y=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$ **7.10.** a) $y=a_0\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{48}x^6+\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{15}x^5-\frac{1}{100}x^7+\cdots\right)$ b) $y=a_0\left(1-\frac{a}{12}x^4+\frac{a^2}{672}x^8+\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{a}{20}x^5+\frac{a^2}{800}x^9+\cdots\right)$.

Kapitola 8

8.1. $\operatorname{sgn}(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ **8.2.** $f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$ **8.3.** $f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$ **8.4.** $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}(--1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k}$ **8.5.** $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ **8.6.** $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$.
8.7. $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. **8.8.** $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$, $\frac{\pi^3}{32}$ **8.9.** $\pi^2--x^2=\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos kx}{k^2}$, $\frac{\pi^2}{12}$, $\frac{\pi^2}{6}$ **8.10.** $x=\pi-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$, $\frac{\pi}{4}$ **8.11.** $|x|=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}$.

Použitá literatura

[1] Berman G. N.: *Sbornik zadač po kursu matematičeskogo analyza*, Nauka, Moskva, 1971.

[2] Děmidovič B. P.: *Sbornik zadač i upražněnij po matematičeskomu analyzu*, Nauka, Moskva, 1964.

[3] Došlá Z. – Došlý O.: *Metrické prostory, teorie a příklady*, Masarykova univerzita, Brno, 1996.

[4] Edwards, C. H.: *The Historical Development of the Calculus*, Springer--Verlag, 1979.

[5] Fichtengolc G. M. : *Kurs differencialnogo i integralnogo isčislenija II, III*, Nauka, Moskva, 1966.

[6] Heck A.: *Introduction to Maple*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[7] Israel R.: *Maple Advisor Database*, http://www.math.ubc.ca/˜israel/advisor/, 1998.

[8] Jarník V.: *Diferenciální počet II*, Academia, Praha, 1974.

[9] Jarník V.: *Diferenciální rovnice*, Academia, Praha, 1956.

[10] Kroutil P.: *Absolutní konvergence číselných řad a řady funkcí*, diplomová práce MU Brno, 1998.

[11] Kuběna P.: *Nekonečné řady s programem Maple*, diplomová práce MU Brno, 2001.

[12] Kufner A. – Kadlec J.: *Fourierovy řady*, Academia, Praha, 1969.

[13] Novák V.: *Diferenciální počet v* $\mathbb{R}$, skriptum Masarykovy Univerzity, Brno, 1996.

[14] Novák V.: *Integrální počet v* $\mathbb{R}$, skriptum Masarykovy Univerzity, Brno, 1996.

[15] Novák V.: *Nekonečné řady*, skriptum UJEP, Brno, 1981.

[16] Rovenski V.: *Geometry of Curves and Surfaces with Maple*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[17] Tichonov A. N. – Samarskij A. A.: *Rovnice matematické fyziky*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1955 (překlad z ruštiny).

[18] Veselý J.: *Matematická analýza pro učitele*, Matfyzpres Praha, 1997.

[19] Walz A. F.: *The math package*, http://sunsite.informatik.rwth-aachen.de/maple/mplmath.htm, 2001.

[20] Westermann T.: *Mathematishe Begriffe visualisiert mit Maple V*, Springer, Heidelberg, 2000.

[21] Wright F.: *Computing with Maple*, CRC Press, Boca Raton, 2002.

Rejstřík