DEVÁTÉ CVIČENÍ - KLASIFIKACE SHODNOSTÍ

- klasifikace probíhá určením samodružných bodů a určením vlastních čísel

SHODNOSTI V $\mathcal{E}_3$

- IDENTITA
  - všechny body samodružné
  - všechny směry vlastní ($\lambda_{123} = 1$)

- POSUNUTÍ O NENULOVÝ VEKTOR
  - žádný SB
  - všechny směry vlastní ($\lambda_{123} = 1$)

- STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST
  - 1 SB
  - všechny směry vlastní ($\lambda_{123} = -1$)

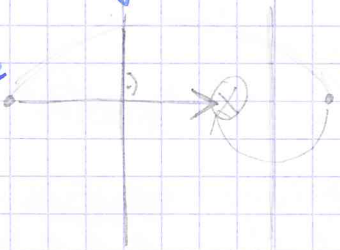
- SOUMĚRNOST PODLE PŘÍMKY
  - přímka SB = osa symetrie
    - ⇒ směrový vektor osy je vlastní s $\lambda_1 = 1$
  - všechny roviny kolmé na osu jsou slabě samodružné a jejich vektory jsou vlastní příslušné $\lambda_{23} = -1$

- SOUMĚRNOST PODLE ROVINY
  - rovina SB = rovina symetrie
  - rovina SB = rovina symetrie
    - ⇒ všechny vektory zaměření jsou vlastní, $\lambda_{12} = 1$
  - vektor kolmý na ρ_{SB} je vlastní, příslušný $\lambda_3 = -1$

- ~~osa~~ OTOČENÍ KOLEM PŘÍMKY
  - přímka SB, směrový vektor příslušný $\lambda_1 = 1$
  - roviny kolmé na osu otáčení jsou slabě samodružné a přísluší jim komplexní vl. čísla $\lambda_{23} = A \pm Bi$ (musí být kompl. jedničkami)
  - úhel určíme z toho že víme $\cos\alpha = A$, $\sin\alpha = B$

Př. 2 Rozložte posunutí o vektor $(2,2,2)$ na co nejmenší počet rovinových symetrií, jestliže první z uvažovaných rovin souměrnosti prochází počátkem souř. systému. Určete rovnice souměrností

– kolik jich bude potřeba?



– posunutí – přímá shodnost
– r. s. – nepřímá – potřebuji jich složit sudý počet, tj. 2/4
→ 4 pro nějaké obecné roviny
2 pro roviny kolmé na směr posunutí

$\Rightarrow \tau_1 \equiv x + y + z = 0$

→ rovnice: $A[0,0,0]$, $B[0,1,-1]$, $C[1,0,-1]$ jsou samodružné

→ zobrazím 1 bod D mimo $[1,1,1]$:

$\tau_1 \cap [1,1,1] + t\cdot(1,1,1)$

$3 + 3t = 0 \qquad S_{DD'} = [0,0,0] \qquad D'$ pro $t = -2$ $[-1,-1,-1]$

$t = -1$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

$\Rightarrow \tau_2$ $A = A'[0,0,0] \Rightarrow [2,2,2]\ A''$ $\qquad D'[-1,-1,-1] \Rightarrow D''[3,3,3]$

$B = B'[0,1,-1] \Rightarrow [2,3,1]\ B''$

$C' = C[1,0,-1] \Rightarrow [3,2,1]\ C''$

→ nebo víme, že $\tau_2 = x + y + z + d = 0 \ \wedge\ S_{XX'} \in \tau$

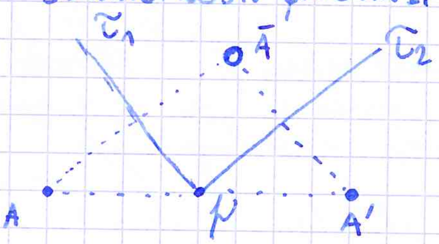
$S_{A'A''} = [1,1,1] \in \tau \ \rightarrow\ x + y + z - 3 = 0$

a počítáme se SB τ_2

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Rozložte souměrnost podle přímky $p: X = [0,0,-2] + t\cdot(-1,1,-2)$ na co nejmenší počet rovinných symetrií, jestliže první z uvažovaných rovin souměrnosti prochází počátkem souř. systému.



– souměrnost podle přímky – přímá
2|4 symetrie

– 2 roviny procházející p

• f_1: $\tau_1 \equiv ([0,0,0], p) \equiv [0,0,0] + t\cdot(-1,1,-2) + s\cdot(0,0,1)$

$(-1,1,-2) \times (0,0,1)$ $(1,1,0)$

– vlastní vektory $(0,0,1)$, $(-1,1,-2)$ $\quad \lambda_{1,2} = 1$

kolmý $(1,1,0)$ $\quad \lambda_3 = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$f: \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \tau_1 \equiv x + y = 0$$

• ~~zobrazení bodu v symetrii podle p~~

~~$P\,[0,0,0]$: $\quad x - y + 2z = 0 \cap [0,0,-2] + t\cdot(-1,1,-2)$~~

~~$-t - t - 4 - 4t = 0$~~

~~$-4 = 6t \qquad P_0: [2/3, -2/3, -2/3]$~~

~~$t = -2/3 \qquad P': [4/3, -4/3, -4/3]$~~

$\rightarrow$ PP' jsou na kolmici k τ_2

τ_2: normálový vektor $\vec{PP'}$ $(4/3, -4/3, -4/3) \sim (1,-1,-1)$

- bod ležící v τ_2 $[0,0,-2]$ nap!: $\tau_2 \equiv x - y - z - 2 = 0$

→ zobrazení f_2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left|\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 4/3 & -4/3 & -4/3 \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left|\begin{matrix} 2/3 & 4/3 & 4/3 \\ -4/3 & -2/3 & 4/3 \\ -4/3 & +4/3 & -2/3 \\ 4/3 & -4/3 & -4/3 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/3 \\ -4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

Př. 4 Klasifikujte shodnost f, rozložte na co nejmenší počet rovinných symetrií, z nichž první prochází $P[0,0,0]$

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

SB:
$$\left(\begin{matrix} -2/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -4/3 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 6 \\ -6 \\ -2 \end{matrix}\right.\right) \sim \left(\begin{matrix} -1 & +1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 9 \\ -3 \end{matrix}\right.\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{matrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 9 \\ 6 \end{matrix}\right.\right) \qquad z = -2 \qquad \begin{aligned} -x+y+z &= 9 \\ -x+y &= 7 \end{aligned} \Rightarrow \text{přímka SB}$$

$y = t \quad x = -7 + t \qquad p: X = [-7,0,-2] + t\cdot(1,1,0)$

vlastní čísla:

$$\begin{vmatrix} 1/3-\lambda & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3-\lambda & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3-\lambda \end{vmatrix} = -(1/3-\lambda)^2(1/3+\lambda) + 8/27 + 8/27 + 8/9\cdot(1/3-\lambda) + 4/9(1/3+\lambda) =$$

$$= -(1/9 - 2/3\lambda + \lambda^2)(1/3+\lambda) + 16/27 + 8/27 - 8/9\lambda + 4/27 + 4/9\lambda =$$

$$= -(1/27 - 2/9\lambda + 1/3\lambda^2 + 1/9\lambda - 2/3\lambda^2 + \lambda^3) + 28/27 - 4/9\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 1/3\lambda^2 - 1/3\lambda + 1$$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_{2,3} = \frac{-1}{3} \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} i$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= -\frac{1}{3} \\ \sin\alpha &= \frac{2}{3}\sqrt{2} \end{aligned}\right\} 109{,}5^\circ$$

→ otočení kolem $p \equiv X \equiv [-7,0,-2] + t\cdot(1,1,0)$ o $109{,}5°$

→ $P[0,0,2]$ se celkově otočí na $[-6,6,2]$

f_1: symetrie podle $\tau_1 \equiv [0,0,0] + t\cdot(1,1,0) + s\cdot(7,0,2)$ $\qquad \begin{matrix}(1,1,0)\\(7,0,2)\end{matrix} \times (2,-2,-7)$

$$\tau_1 \equiv 2x - 2y - 7z = 0$$

→ $(1,1,0), (7,0,2)$ $\quad \lambda_{12} = 1$

$(2,-2,-7)$ $\quad \lambda_3 = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -7 & -2 & 2 & +7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & +4 & +7 & +4 & 0 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 57 & 28 & -28 & -41 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 57 & 0 & 0 & 49 & 8 & 28 \\ 0 & 57 & 0 & 8 & 49 & -28 \\ 0 & 0 & 57 & 28 & -28 & -41 \end{array}\right)$$

$$f_1: \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \frac{1}{57} \begin{pmatrix} 49 & 8 & 28 \\ 8 & 49 & -28 \\ 28 & -28 & -41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

f_2: symetrie podle τ_2 - zobrazí $[0,0,0]$ na $[-6,6,2]$

→ norm. vektor: $(3,-3,-1)$, $[-7,0,-2] \in \tau_2$

$$\tau_2 \equiv 3x - 3y - z + 19 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 6 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 19 & 6 & -6 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 19 & 0 & 0 & 1 & 18 & 6 \\ 0 & 19 & 0 & 18 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 19 & 6 & -6 & 17 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & 18 & 6 \\ 18 & 1 & -6 \\ 6 & -6 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$