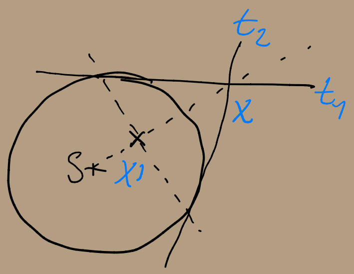
# KRUHOVÁ INVERZE



# KRUHOVÁ INVERZE

- nelineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (rozšířené o $\infty$)
- je dána pevnou KRUŽNICÍ INVERZE $ki(S, r)$
- jde o involutorní zobrazení $[\ (X')' = X\ ]$
- body se zobrazují následovně:
  - $S$ se zobrazí do $\infty$ (a $\infty$ do $S$)
  - pro $X \neq S$ jsou body $S, X$ a $X'$ kolineární (leží na jedné přímce), tedy platí, že $\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}$

→ protože k.i. není lineární, je $k$ proměnlivé (záleží na $|XS|^2$ a $r = \sqrt{|\varkappa|}$)

$$k = \frac{\varkappa}{|SX|^2}$$

- pro $|SX| = r$ (body na k. inverze) je $k = 1$ a $X = X'$ ⇒ body na kružnici inverze jsou samodružné

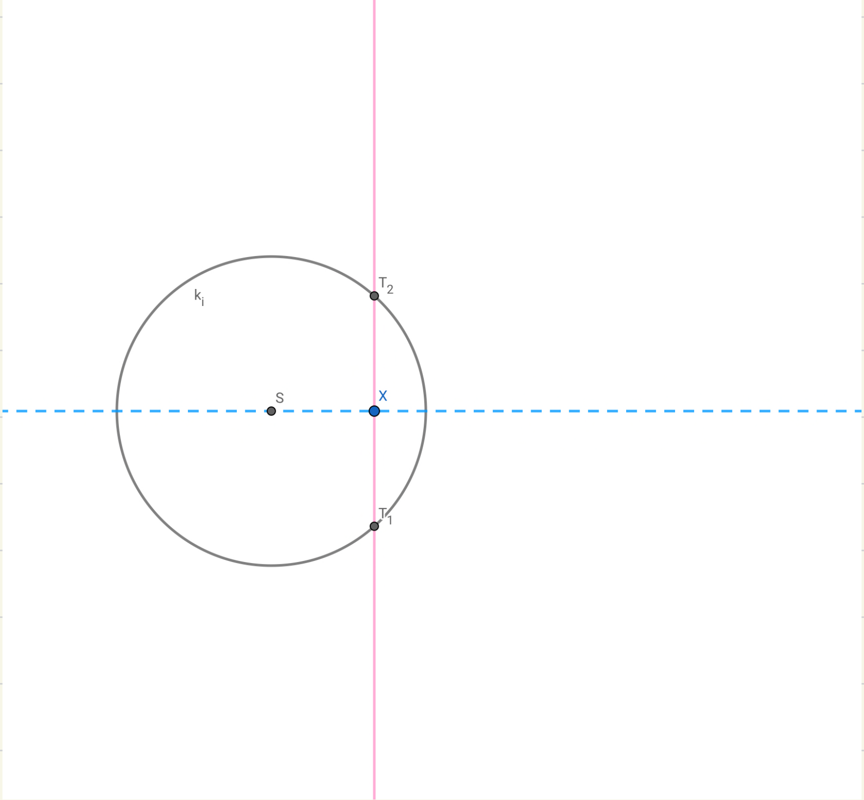
→ každou kruhovou křivku (bod = kružnice o $r = 0$, kružnici a přímku – kružnice o $r = \infty$)

– souvisí s mocností bodu ke kružnici inverze

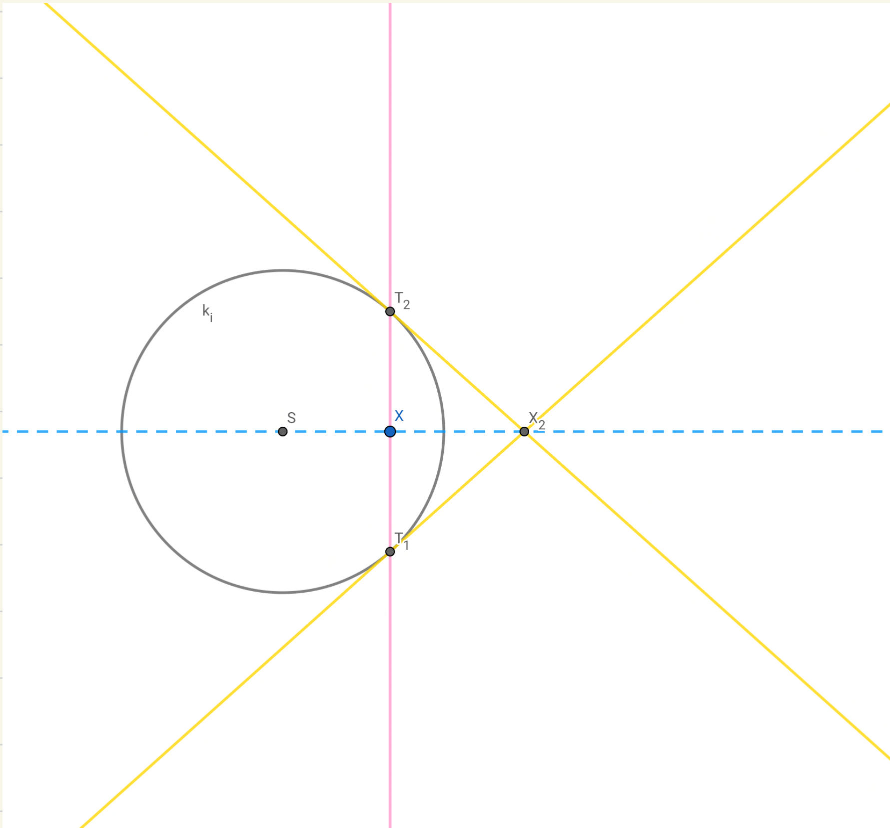
→ obraz bodu se sestrojuje pomocí tečen

# Geometrické sestrojení X' při $\mathcal{K}>0$

1) je-li X vnitřním bodem kružnice inverze
- protože jsou X, S a X' kolineární, spojíme X a S
- připravíme si body dotyku tečen ke k.i. z X'
  → sestrojíme kolmici z X k SX



• sestrojíme tečny ke $k_i$ v bodech $T_1$ a $T_2$




2) pro vnější bod X kružnice inverze
→ postup je obrácený - tj. z X sestrojíme tečny ke kružnici inverze včetně bodů dotyku
→ X' je střed bodů $T_1$ a $T_2$

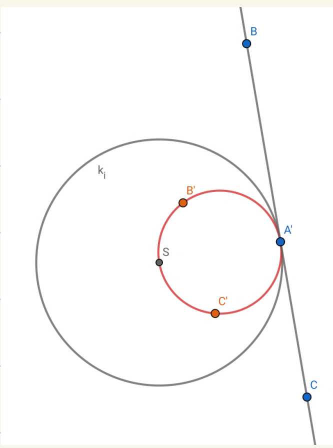
je-li $H < 0$

- bod $X'$ sestrojíme stejným způsobem, ale nakonec ho otočíme ještě o 180° kolem $S$ (musí být zachováno $\vec{SX'} = k\vec{SX}$, a $k < 0$)

JAK SE ZOBRAZUJE PŘÍMKA A KRUŽNICE

(pokud si to zapamatujete, usnadníte si velkou část práce)

1) TEČNA KE KRUŽNICI INVERZE

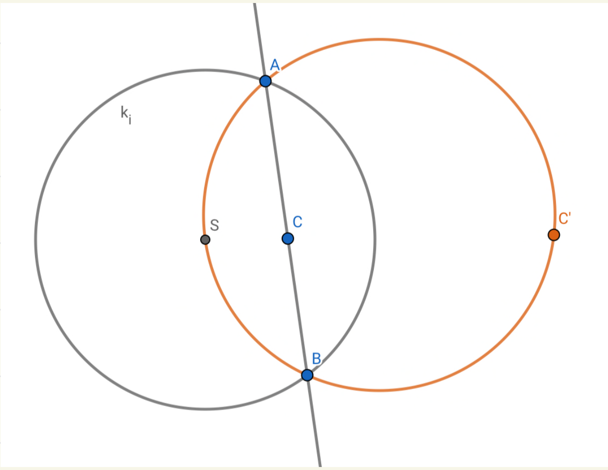



- tečna se zobrazí na kružnici procházející $S$ a bodem dotyku tečny

2) naopak: kružnice procházející $S$ a dotýkající se $k_i$ se zobrazí na tečnu

3) SEČNA KRUŽNICE INVERZE

- průsečíky sečny musí být samodružné

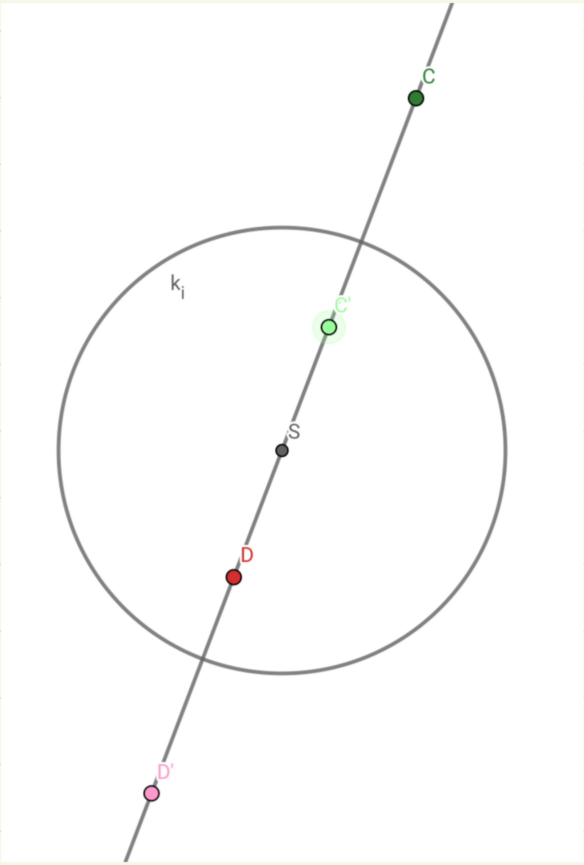



- přímka má nevlastní bod, který se zobrazuje na S
⇒ kružnici procházející S a A,B

4) kružnice, která prochází S a má s ki dva společné body se zobrazí na přímku, která neprochází středem (a je dána průsečíky kružnic)

5) PŘÍMKA PROCHÁZEJÍCÍ STŘEDEM S

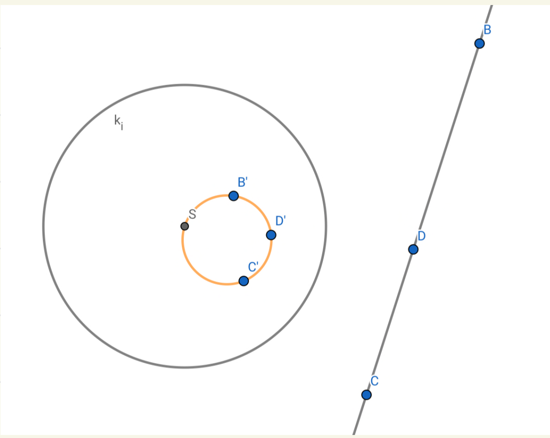
- protože S se zobrazí na nevlastní bod a naopak nevlastní bod se zobrazí na S + má přímka 2 samodružné body, je přímka procházející S (vlastně) samodružná



6) VNĚJŠÍ PŘÍMKA KRUŽNICE INVERZE

- přímka má nevlastní bod ⇒ její obraz musí procházet bodem S
- přímka nemá průsečíky s $k_i$, ani obraz nemůže mít průsečíky

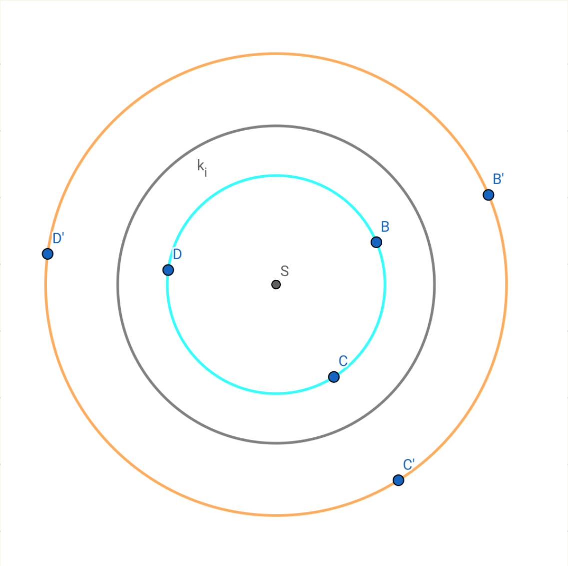
⇒ obrazem musí být kružnice uvnitř $k_i$ procházející S




7) kružnice uvnitř $k_i$ procházející S se zobrazí na vnější přímku $k_i$

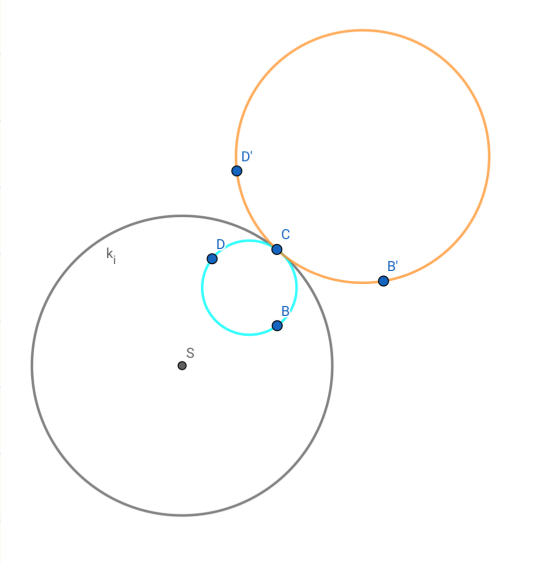
8) KRUŽNICE SOUSTŘEDNÁ S $k_i$

- neprochází S → obrazem nemůže být přímka (protože prochází nevlastním bodem)
- všechny body X na kružnici mají stejnou vzdálenost od S, takže i všechny jejich obrazy X' budou mít stejnou vzdálenost od S ⇒ obrazem musí být zase kružnice soustředná s $k_i$



9) KRUŽNICE NESOUSTŘEDNÁ S $k_i$, KTERÁ SE $k_i$ DOTÝKÁ

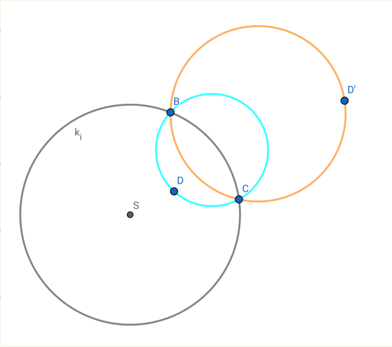
- protože neprochází bodem S, bude obrazem kružnice neprocházející S
- bod dotyku je samodružný, takže i výsledná kružnice se bude dotýkat $k_i$




- vnější dotyk se invertuje na vnitřní a naopak

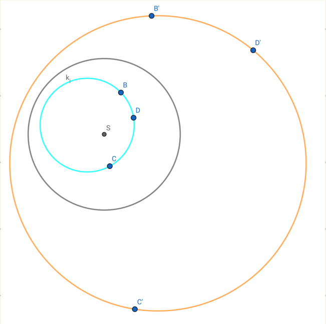
10) KRUŽNICE, KTERÁ PROTÍNÁ $k_i$ A NEPROCHÁZÍ S

- protože neprochází S, je jejím obrazem opět kružnice neprocházející S
- průsečíky s $k_i$ jsou samodružné body



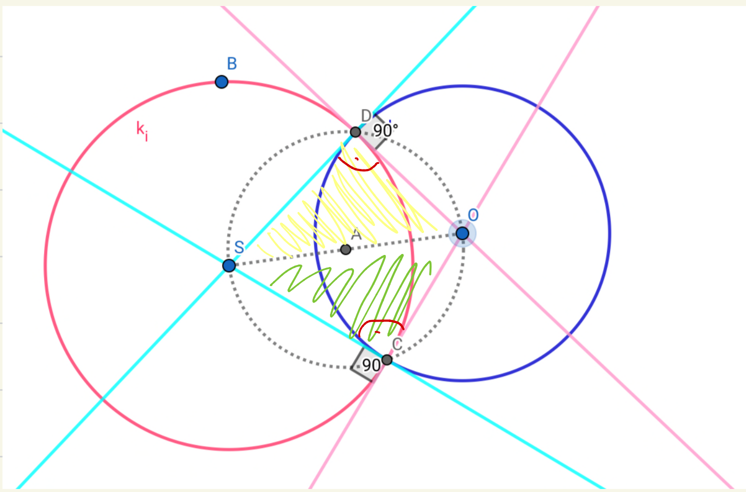

11) KRUŽNICE NEPROCHÁZEJÍCÍ S, NESOUSTŘEDNÁ S $k_i$, BEZ SPOLEČNÉHO BODU

- obrazem je opět kružnice bez společného bodu, $S \notin k$



## 12) SAMODRUŽNÉ KRUŽNICE

- v kruhové inverzi existují i kružnice, které jsou (slabě) samodružné
- jsou to kružnice, které protínají $k_i$ ortogonálně, to znamená, že tečny dané kružnice a tečny $k_i$ v průsečících jsou na sebe kolmé
- máme-li sestrojit $l$ o známém středu $O$, která je s $k_i$ ortogonální, využijeme Thaletovu kružnici nad $SO$




- tečny jedné kružnice procházejí středem druhé kružnice a ohraničují deltoid složený ze dvou pravoúhlých $\triangle$

POZOR! Protože kruhová inverze není lineární (afinní) zobrazení, nezachovává dělicí poměr. Kvůli tomu se střed kružnice nezobrazuje na střed kružnice.

POZNÁMKA KE GeoGebře:

V GeoGebře mezi zobrazeními najdete i kruhovou inverzi. Lze ji ale tvořit jen bod po bodu, proto i při použití Geogebry je nutné mít aspoň hrubou představu, co se na co zobrazí (nebo pokaždé zobrazit 3 body).
GeoGebra uvažuje inverzi s kladnou mocností ($\varkappa>0$). Pro zápornou mocnost je třeba vše ještě prohnat středovou symetrií.

Při analytickém přístupu není úplně nezbytné tyto vztahy znát, ale hodí se to, protože to může zjednodušit počítání.

→ pozornost věnujte příkladům označeným !

VZORCE PRO KRUHOVOU INVERZI PRO $k([0,0], r)$

- $|\varkappa| = r^2$; $x' = \frac{\varkappa x}{x^2+y^2}$, $y' = \frac{\varkappa y}{x^2+y^2}$ (pro $X \neq S$)

## ŘEŠENÉ PŘÍKLADY:

- Je dána $k_i(S, r)$: $S = [0,0]$, $\varkappa = r^2 = 2$

a) urči obraz přímky $p: X = [2,1] + s\cdot(-2,-1)$

- 1. způsob - uvědomím si, že $S \in p$ - to je přímka, která je slabě samodružná $p' = p$, není třeba nic počítat
- 2. způsob - vyjádřím si z rovnice $p$

$x = 2 - 2s$, $y = 1 - s$

- protože k.i. je involutorní, lze přepsat vzorce jako

$$x = \frac{\varkappa x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{\varkappa y'}{x'^2 + y'^2}$$

$$x = \frac{\varkappa x'}{x'^2 + y'^2} = 2 - 2s \qquad y = \frac{\varkappa y'}{x'^2 + y'^2} = 1 - s$$

- vyjádřením $x', y'$ dostaneme tu samou přímku

b) urči obraz přímky $g: 2x+y-1=0$

- jde o přímku neprocházející S, protínající $k_i$

$\rightarrow$ obrazem bude kružnice procházející S

- 1. způsob - zobrazím 2 body přímky g a určím rovnici kružnice procházející S a zjištěnými dvěma body

- 2. způsob - protože je $x = \frac{\varkappa x'}{x'^2+y'^2}$ a $y = \frac{\varkappa y'}{x'^2+y'^2}$, je $g: 2\frac{\varkappa x'}{x'^2+y'^2} + \frac{\varkappa y'}{x'^2+y'^2} - 1 = 0$ (dosadíme do původní rovnice)

$\varkappa = 2 +$ násobíme $x'^2+y'^2$:

$$4x' + 2y' = x'^2 + y'^2$$

$$x'^2 - 4x' + y'^2 - 2y' = 0$$

- dvojím doplněním na čtverec:

$$(x'-2)^2 - 4 + (y'-1)^2 - 1 = 0$$

$$(x'-2)^2 + (y'-1)^2 = 5$$

$\Rightarrow$ $g'$ je kružnice o $S[2,1]$ a $r = \sqrt{5}$

c) urči obraz kružnice $c: (x-2)^2+(y-1)^2=5$

- $c$ je kružnice procházející $S$ protínající se s $k_i$

$\rightarrow$ obrazem je přímka - spojnice průsečíku $k_i$ a $c$

- 1. způsob - zjistíme průsečíky $k_i \cap c$:

$$k: x^2+y^2=2$$
$$c: x^2-4x+y^2+2y=0$$
$$\overline{k-c: 4x-2y=2}$$
$$x^2+y^2=2$$

- vyřešíme dosazovací metodou, nebo si můžeme uvědomit, že $k-c$ už je rovnou rovnice přímky $c': 2x-y=1$

- 2. způsob - do $c: x^2+y^2-4x-2y=0$ dosadíme

$$x=\frac{\varkappa x'}{x'^2+y'^2}, \quad y=\frac{\varkappa y'}{x'^2+y'^2}, \quad \varkappa=2$$

$$\left(\frac{2x'}{x'^2+y'^2}\right)^2+\left(\frac{2y'}{x'^2+y'^2}\right)^2-\frac{8x'}{x'^2+y'^2}+\frac{4y'}{x'^2+y'^2}=0 \quad / \cdot (x'^2+y'^2)^2$$

$$4(x'^2+y'^2)-8x(x'^2+y'^2)+4y(x'^2+y'^2)=0$$
$$(x'^2+y'^2)\cdot(4-8x+4y)=0 \quad /:4$$
$$(x'^2+y'^2)\cdot(1-2x+2y)=0$$

- protože $x'^2+y'^2$ je nenulové číslo (pro $X \neq S$), zbývá nám

$$\underline{\underline{1-2x+2y=0}}$$

$\rightarrow$ rovnice přímky neprocházející $S$

d) urči obraz kružnice $l: x^2-2x+y^2-3=0$

- $l$ neprochází $S$, protíná $k_i$

$\rightarrow$ obrazem je opět kružnice protínající $k_i$, neprocházející $S$

- 1. způsob: zjistíme průsečíky $k_i \cap l$ a zobrazíme 1 další bod, vyjádříme $l'$ jako kružnici procházející 3 body
- 2. způsob: dosadíme:

$$\left(\frac{2x'^2}{x'^2+y'^2}\right)^2+\left(\frac{2y'^2}{x'^2+y'^2}\right)^2-\frac{4x}{x'^2+y'^2}=3$$

$$4 \quad - \quad 4x' = 3x'^2+3y'^2$$

$$3x^2+4x+3y^2-4=0$$

VZOREC PRO KRUHOVOU INVERZI S OBECNÝM $S[s_1,s_2]$

$$x'=s_1+\frac{\varkappa(x-s_1)}{(x-s_1)^2+(y-s_2)^2}$$

$$y'=s_2+\frac{\varkappa(y-s_2)}{(x-s_1)^2+(y-s_2)^2}$$

$(x\neq s_1,\ y\neq s_2)$

!

• určete střed k. i., znáte-li $\varkappa = 2$ a víte-li, že bod $[1,0]$ se zobrazí na $[2,0]$

– protože $X$, $X'$ a $S$ leží na jedné přímce, musí být $s_2 = 0$

– $$x' = s_1 + \frac{\varkappa(x - s_1)}{(x-s_1)^2 + (y-s_2)^2}$$ dosadíme $\varkappa$, $X$ a $X'$, $s_2 = 0$

$$2 = s_1 + \frac{2(1-s_1)}{(1-s_1)^2 + 0}$$

$$2 = s_1 + \frac{2}{1-s_1} \quad / \cdot (1-s_1)$$

$$2 - 2s_1 = s_1 - s_1^2 + 2$$

$$s_1^2 - 3s_1 = 0$$

$$s_1(s_1 - 3) = 0 \qquad s_1 = 0 \quad \bar{s}_1 = 3$$

$\Rightarrow$ existují dva možné středy:

$S[0,0]$ a $\bar{S}[3,0]$

• kruhová inverze má samodružné body [-1,0] a [1,0] a bod [0,0] se v ní zobrazí na [0,1].
Určete střed a poloměr kružnice inverze.

→ $S$ musí ležet na přímce $XX' = p: [0,0] + s\cdot(0,1)$, čili ose $y$ o rovnici $x=0$, a tedy $s_1 = 0$

→ samodružné body leží na kružnici inverze a určují tětivu $k_i$, $S$ musí ležet na ose této tětivy, $o: [0,0] + t\cdot(1,0)$

– $S$ je průsečíkem osy $o$ a přímky $p$
$o \cap p = [0,0]$

– ze zadání ale víme, že bod [0,0] se zobrazuje na bod [0,1], nikoliv na nevl. bod, jak by tomu bylo, kdyby byl [0,0] středem $k_i$

⇒ kruhová inverze zadaných parametrů neexistuje

• Najděte rovnici kružnice inverze, jejíž střed leží na přímce $p: x+2y+9=0$, když víte, že body $A[-1,-1]$ a $B[-2,-2]$ jsou v dané inverzi sdružený.

- jsou-li body A a B sdružený, pak je $A' = B$, tedy $A[-1,-1] \Rightarrow B[-2,-2]$ (a naopak)

$\Rightarrow$ střed S leží na přímce $q \equiv AB$

$$q: [-1,-1] + t\cdot(1,1) = [0,0] + t'\cdot(1,1)$$

$$x = t', y = t'$$

$q \cap p$ - dosazením $x = t', y = t'$ do rovnice p

$$x + 2y + 9 = 0$$

$$t' + 2t' + 9 = 0$$

$$3t' + 9 = 0$$

$$t' = -3 \Rightarrow S[-3,-3]$$

- rovnice $k_i: (x+3)^2 + (y+3)^2 = r^2$

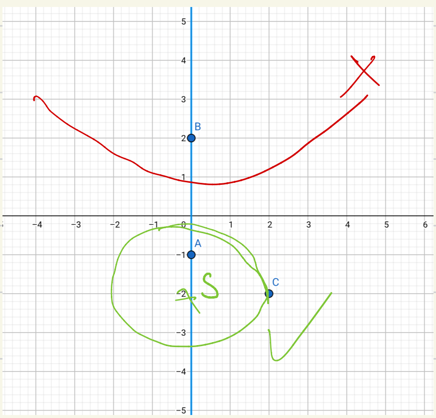
dosadíme A nebo B: $(-1+3)^2 + (-1+3)^2 = r^2$

$$8 = r^2$$

$$\Rightarrow k_i: (x+3)^2 + (y+3)^2 = 8$$

• Určete mocnost a střed kruhové inverze takové, že bod $A=[0,-1]$ se zobrazí na bod $B=[0,2]$ a bod $C=[2,-2]$ je samodružný.

- Střed leží na přímce $AB$ ($S$, $A$ a $B$ musí být kolineární), bod $S$ bude mít souřadnice $S[0,s_2]$ – ve všech příkladech, se kterými se setkáte, bude jedna ze souřadnic $S$ určena rovnou ze zadání (a obvykle to bude 0)




- když si body nakreslíme, je jasné, že střed $S$ musí ležet pod bodem $A$
- $$\boxed{\varkappa = |SC|^2 = \left(2^2+(-2-s_2)^2\right) = s_2^2+4s_2+8}$$
- rovnice inverze jsou

$$x' = 0 + \frac{\varkappa x}{(x-0)^2+(y-s_2)^2}, \quad y' = s_2 + \frac{\varkappa(y-s_2)}{(x-0)^2+(y-s_2)^2}$$

- dosazením $A$ a $B$ (do rovnice $y'$, pro $x'$ máme $0=0$)

$$-1 = s_2 + \frac{\varkappa(2-s_2)}{0+(2-s_2)^2}$$

$$-1 = s_2 + \frac{\varkappa}{2-s_2}$$

$$-2+s_2 = 2s_2 - s_2^2 + \varkappa$$

$$-2+s_2 = 2s_2 - \cancel{s_2^2} + \cancel{s_2^2} + 4s_2 + 8$$

$$-10 = 5s_2$$

$$s_2 = -2$$

$$S = [0,-2]$$

• Určete středy všech kruhových inverzí takových, že $|\varkappa|=1$ a převádí body $A[1,0]$ a $A'[3,0]$ na sebe
- střed musí ležet na přímce $AA'$, čili $S=[s_1,0]$

→ pro $\varkappa=1$ získáme střed z rovnic:

$$x'=s_1+\frac{1(x-s_1)}{(x-s_1)^2+y^2} \qquad \cancel{y'=0+\frac{1(y-0)}{(x-s_1)^2+y^2}}$$

↑ je nám k ničemu, protože vyjde $0=0$

$$1=s_1+\frac{(3-s_1)}{(3-s_1)^2+0}$$

$$1=s_1+\frac{1}{3-s_1}$$

$$3-s_1=3s_1-s_1^2+1$$

$$s_1^2-4s_1+2=0$$

$$s_1=2\pm\sqrt{2}$$

$S_1\,[2-\sqrt{2},0]$

$S_2\,[2+\sqrt{2},0]$

→ pro $\varkappa=-1$ získáme střed z rovnic

$$x'=s_1+\frac{-1(x-s_1)}{(x-s_1)^2+y^2} \qquad \cancel{y'=0+\frac{-1(y-0)}{(x-s_1)^2+y^2}}$$

$$1=s_1+\frac{s_1-3}{(3-s_1)^2}$$

$$1=s_1+\frac{1}{s_1-3}$$

$$s_1-3=s_1^2-3s_1+1$$

$$0=s_1^2-4s_1+4$$

$$s_1=2$$

$S_3=[2,0]=S_4$

⇒ když si kružnici o $i_3(S_3,1)$ nakreslíte, zjistíte, že $A$ a $A'$ jsou dva diametrální body na kružnici inverse

# KONSTRUKČNÍ ÚLOHY NA K. I

- dvě Apolloniovy úlohy (bpk, kkk)

- řešení s postupem najdete na
  is.muni.cz/th/zrczu/bakalarska-prace_is.pdf
  - jedná se o bakalářskou práci
  Jan Martiník: Kruhová inverze,
  úlohy najdete na str. 22-24

- všechny Apolloniovy úlohy i s rozborem,
  diskuzí a postupy konstrukcí najdete
  v BP doktora Lišky
  Petr Liška: Apolloniova úloha