Domácí úkol z 8. 3. 2016

Příklad 2. *Určete invariantní podprostory vzhledem k lineární transformaci charakterizované ortogonální maticí A:*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Přechodem k bázi tvořené generátory invariantních podprostorů se dále přesvědčte o správnosti celého výpočtu.

Řešení. Nejprve vypočítáme vlastní čísla matice A:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+\lambda^2-\lambda+1 = -(\lambda-1)(\lambda^2+1) = 0$$

Tedy $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm\,\mathrm{i}$.

Vlastní směr $\mathbf{u}_1$ příslušný **reálnému** vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ je řešením soustavy, která vznikne odečtením λ_1 od prvků hlavní diagonály matice A (nebo jinými slovy dosazením λ_1 do matice, ze které jsme počítali determinant).

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustavě vyhovuje vektor $\mathbf{u}_1 = (1,1,0)$ a první z hledaných invariantních podprostorů je proto $L((1,1,0))$.

Komplexně sdružený kořen $\lambda_{2,3} = \pm\,\mathrm{i}$ charakteristické rovnice ukazuje na existenci invariantního podprostoru dimenze 2. Jeho generátory zjistíme odečtením i od prvků hlavní diagonály matice A a nalezením (komplexního) vektoru $\mathbf{w}$, který je řešením vzniklé soustavy.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\mathrm{i} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\mathrm{i} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\mathrm{i} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 2-6\,\mathrm{i} & -\sqrt{2}(3+\mathrm{i}) \end{pmatrix}$$

Soustavě vyhovuje vektor $\mathbf{w} = (-3\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}, 3\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}, 2-6\,\mathrm{i})$ (přehozením koeficientů druhé rovnice a dopočítáním první souřadnice). Rozdělením na reálnou a imaginární složku pak zjistíme oba generátory $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ hledaného invariantního podprostoru:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}_2 + \mathrm{i}\mathbf{u}_3 = (-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 2) + \mathrm{i}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -6)$$

Druhý (a poslední) z hledaných invariantních podprostorů je proto lineární obal vektorů $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 2)$ a $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -6)$.

Nyní ověřme správnost celého výpočtu. Označme $\mathcal{E}$ „klasickou“ bázi a $\mathcal{U}$ bázi složenou po řadě z vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ a $\mathbf{u}_3$. Označme dále B matici přechodu mezi oběma bázemi takovou, že $(\mathbf{x})_{\mathcal{E}} = B(\mathbf{x})_{\mathcal{U}}$. Z prvního domácího úkolu víme, že sloupce matice B tvoří po řadě souřadnice vektorů báze $\mathcal{U}$, tedy:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Z téhož úkolu rovněž víme, že hledaná matice lineární transformace v bázi $\mathcal{U}$ je matice $B^{-1}AB$. Výpočtem pak zjistíme, že:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

To ovšem odpovídá očekávání, neboť získaná matice je v diagonálním tvaru.

Hlavní účel domácího úkolu byl procvičit si práci s ortogonálními maticemi a trochu odbourat ostych z čísel, která při počítání vychází. Upozornil bych hlavně na dvě skutečnosti (obecně jsou popsané ve skriptech na straně 26).

- *Vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ jsou ortogonální.*
- *Výsledná matice $B^{-1}AB$ mohla na diagonále obsahovat jen 1, -1 a bloky 2×2 tvaru*

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

pro jisté α (tady zřejmě $\alpha = \frac{\pi}{2}$) – to je dáno tím, že vlastní čísla ortogonálních transformací mohou být jen 1, -1 nebo dvojice komplexně sdružených čísel. Trochu předběhneme: komplexně sdružená dvojice čísel je spjatá s otočením roviny právě o úhel α. Z vlastních čísel se proto dá dobře zobrazení určit – vektor $\mathbf{u}_1$ je zobrazením zachován, dvojice na něj kolmých vektorů ($\mathbf{u}_2$ a $\mathbf{u}_3$) je otočena o $\frac{\pi}{2}$. O $\frac{\pi}{2}$ je proto otočena každá lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}_2$ a $\mathbf{u}_3$ (tj. celá „rovina“ daná $\mathbf{u}_2$ a $\mathbf{u}_3$) a toto zobrazení si proto můžeme přibližně představit jako otočení v prostoru kolem „přímky“ dané vektorem $\mathbf{u}_1$.