Sedmé cvičení – opakování

Úloha 1. *Udejte příklad (pokud takový příklad neexistuje, podejte navíc vysvětlení):*

a) *homotetie v $\mathcal{A}_3$, která není stejnolehlostí;*

b) *elace v $\mathcal{A}_3$;*

c) *afinního zobrazení $f : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$, ke kterému neexistuje inverzní zobrazení;*

d) *základní afinity v $\mathcal{A}_3$;*

e) *podgrupy v grupě všech homotetií $\mathcal{A}_2$;*

f) *afinní transformace v $\mathcal{A}_3$, která nemá žádná reálná vlastní čísla;*

g) *afinity v $\mathcal{A}_3$ s právě jednou silně samodružnou přímkou;*

h) *afinního zobrazení v $\mathcal{A}_3$ s vlastními čísly 3, $1 + \mathrm{i}$ a $3 - \mathrm{i}$;*

i) *základní afinity v $\mathcal{A}_2$ s charakteristikou 2;*

j) *základní afinity v $\mathcal{A}_2$ bez charakteristiky;*

k) *afinity v $\mathcal{A}_3$ s právě jednou slabě samodružnou přímkou.*

Úloha 2. *Afinita f v $\mathcal{A}_3$ je zadána rovnicemi:*

$$\begin{aligned} f : x' &= 2x - y - z - 1 \\ y' &= \quad + 2y \quad - 1 \\ z' &= \quad - y + z + 3 \end{aligned}$$

(a) *Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory afinity f.*
(b) *Vyšetřete samodružné body afinity f.*
(c) *Uveďte repér $\mathcal{R}$, ve kterém mají matice afinity f co nejjednodušší možný tvar, a rovnice afinity vůči tomuto repéru.*

Úloha 3. *Afinita f v $\mathcal{A}_3$ má přímku samodružných bodů $p : X = [1, 1, 0] + t(2, 1, 0)$. Dále víme, že $(1, 0, 1)$, resp. $(0, 1, -1)$, je vlastním vektorem f s vlastním číslem 2, resp. -2.*
(a) *Určete rovnice afinity f.*
(b) *Nalezněte alespoň jednu přímku, která je vůči afinitě f slabě samodružná.*

Úloha 4. *Je dána stejnolehlost $s : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$, která zobrazuje bod $A[2, -1, 3]$ na bod $A'[-\frac{2}{3}, \frac{13}{3}, -1]$ a bod $B[-3, 3, -6]$ na $B'[1, 3, 2]$. Určete střed stejnolehlosti S a její koeficient κ.*

Řešení

1. *f*) Neexistuje, protože v $\mathcal{A}_3$ musí mít alespoň jedno reálné vlastní číslo (komplexní vlastní čísla se mohou vyskytovat jen po dvojicích).

   h) Neexistuje, protože s každým komplexním vlastním číslem musí být vlastní číslo i komplexně sdružené číslo (celkem by mělo afinní zobrazení pět vlastních čísel).

2. $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$
   $\lambda_{1,2} = 2, \mathbf{u}_1 = (1,0,0), \mathbf{u}_2 = (0,-1,1)$
   $\lambda_3 = 1, \mathbf{u}_3 = (1,0,1)$
   Bez samodružných bodů.
   Repér tvoří lib. bod (např. $[0,0,0]$) a vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.
   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Slabě samodružná je např. přímka $q : X = [1,1,0] + t(1,0,1)$ (obecně libovolný samodružný bod + libovolný vlastní vektor příslušný jinému vlastnímu číslu než 1).
   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & -3 \\ -4 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

4. $S[0,3,0]; \kappa = -\frac{1}{3}$