

Deváté cvičení – klasifikace shodností, rozklad na souměrnosti podle nadroviny

Úloha 1. Klasifikujte následující shodnosti (včetně určujících prvků).

$$f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{10} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{3}+1}{5} & \frac{\sqrt{3}-2}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{3}-2}{5} & \frac{\sqrt{3}+8}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$h : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Úloha 2. Rozložte posunutí o vektor $(2, 2, 2)$ na co nejmenší počet rovinových souměrností, jestliže první¹ z uvažovaných rovin souměrnosti prochází počátkem souřadnicového systému. Uveďte rovnice těchto souměrností.

Úloha 3. Rozložte souměrnost podle přímky $p : X = [0, 0, -2] + t(-1, 1, -2)$ na co nejmenší počet rovinových souměrností, jestliže první z uvažovaných rovin souměrnosti prochází počátkem souřadnicového systému. Uveďte rovnice těchto souměrností.

Úloha 4. Klasifikujte shodnost f . Dále ji rozložte na co možná nejmenší počet rovinových souměrností, jestliže první z uvažovaných rovin souměrnosti prochází počátkem souřadnicového systému. Uveďte rovnice těchto souměrností.

$$\begin{aligned} f : x' &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 6 \\ y' &= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 6 \\ z' &= \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 2 \end{aligned}$$

¹Ve smyslu pořadí prováděných souměrností.

Řešení

1. f : Rovinná souměrnost podle roviny $\varrho: 2x - y + z - 3 = 0$.

g : Otočení kolem přímky $p: X = [0, 0, 0] + t(0, 1, -2)$ o úhel $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

h : Souměrnost podle přímky $p: X = [0, 0, -2] + t(-1, 1, -2)$.

2. Rovina symetrie procházející počátkem souřadnicového systému: $\varrho_1: x + y + z = 0$

Druhá rovina symetrie: $\varrho_2: x + y + z - 3 = 0$

$$\sigma = \tau_2 \circ \tau_1$$

$$\begin{aligned} \tau_1: x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \\ y' &= -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z \\ z' &= -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \end{aligned} \quad \begin{aligned} \tau_2: x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + 2 \\ y' &= -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 2 \\ z' &= -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 2 \end{aligned}$$

3. Rovina symetrie procházející počátkem souřadnicového systému: $\varrho_1: x + y = 0$

Druhá rovina symetrie: $\varrho_2: x - y - z - 2 = 0$

$$\sigma = \tau_2 \circ \tau_1$$

$$\begin{aligned} \tau_1: x' &= -y \\ y' &= -x \\ z' &= z \end{aligned} \quad \begin{aligned} \tau_2: x' &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{4}{3} \\ y' &= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} \\ z' &= \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

4. Otočení kolem přímky $p: X = [-7, 0, -2] + s(1, 1, 0)$ o úhel $\varphi = 109^\circ 28'$.

Rovina symetrie procházející počátkem souřadnicového systému: $\varrho_1: 2x - 2y - 7z = 0$

Druhá rovina symetrie: $\varrho_2: 3x - 3y - z + 19 = 0$

$$\sigma = \tau_2 \circ \tau_1$$

$$\begin{aligned} \tau_1: x' &= \frac{49}{57}x + \frac{8}{57}y + \frac{28}{57}z \\ y' &= \frac{8}{57}x + \frac{49}{57}y - \frac{28}{57}z \\ z' &= \frac{28}{57}x - \frac{28}{57}y - \frac{41}{57}z \end{aligned} \quad \begin{aligned} \tau_2: x' &= \frac{1}{19}x + \frac{18}{19}y + \frac{6}{19}z - 6 \\ y' &= \frac{18}{19}x + \frac{1}{19}y - \frac{6}{19}z + 6 \\ z' &= \frac{6}{19}x - \frac{6}{19}y + \frac{17}{19}z + 2 \end{aligned}$$