Numerické výpočty diskrétní matematiky

Jiří Zelinka

31. března 2020

Obsah

Úvod

Tento text je prozatím v pracovní verzi. Jedná se o mírně upravený starší text určený pro předmět Numerické výpočty IV. Je možné, že s vžvojem software už některé příkazy nebudou funkční nebo budou fungovat jinak. Proto budu tento text postupně upravovat, jak v něm budou nacházena sporná či problematická místa. Reakce ze strany studentů bude v tomto směru rozhodně vítána.

Většina příkladů bude uvedena v Sage, který jakožto symbolický nástroj oplývá mnohými algebraickými dovednostmi. Proto také si ve většině případů budeme toliko ukazovat, jak využívat již hotové nástroje. Ukážeme si stručně také PARI/GP, který je patrně nejlepším výpočetním prostředkem pro algoritmy teorie čísel. A nezapomeneme na kombinatorické a grafové algoritmy. Zájemce o další zdroje odkážeme prozatím na internetové vyhledávače.

Kapitola 1

Algoritmy teorie čísel

1.1 Prvočísla

Jednou ze základních záležitostí v teorii čísel je určení, zda dané číslo je prvočíslo, případně najít jeho rozklad na prvočinitele. To zvládne Sage celkem bez problémů, Matlab má zde jistá omezení:

```
sage: is_prime(2^16+1)
True
sage: is_prime(2^256+1)
False
sage:
```

```
>> isprime(2^16+1)
ans =
     1
>> isprime(2^256+1)
Error using isprime (line 24)
The maximum value of X allowed is 2^32.

>>
```

Tento výsledek dávaly starší verze Matlabu, zatímco v novějších se dozvíme správný výsledek:

```
>> isprime(2^256+1)
ans =
  logical
   0
>>
```

Jelikož ale číslo 2^{256} je poměrné velké, můžeme mít pochybnosti, zda se přičtení jedničky v rámci počítačové přesnosti neztratí a výsledek není správný jen náhodou. Proto v Sage zjistíme nejbližší vyšší prvočíslo

```
sage: next_prime(2^256+1)
115792089237316195423570985008687907853269984665640564039\
457584007913129640233
sage: np=next_prime(2^256);np-2^256
297
sage:
```

a následně si ověříme, zda Matlab počítá správně:

```
>> isprime(2^256+297)
ans =
  logical
   0
>>
```

Vidíme, že v tomto případě Matlab dává nesprávný výsledek, ale je možné se k němu dopracovat, pokud použijeme symbolické výpočty:

```
>> d=sym(2);
>> isprime(d^256+297)
ans =
  logical
   1
>>
```

Lze také zjistit délku výpočtu faktorizace a porovnat ji s rychlostí určení prvočíselnosti:

```
sage: time factor(2^256+1)
CPU times: user 9.17 s, sys: 0.00 s, total: 9.17 s
Wall time: 9.20 s
1238926361552897 * 93461639715357977769163558199606896 5\
840512375416381885802803 21
sage: time is_prime(2^256+1)
CPU times: user 0.00 s, sys: 0.00 s, total: 0.00 s
Wall time: 0.00 s
False
sage:
```

Otestujme také rychlost výpočtu největšího společného dělitele (funkce `gcd`):

```
sage: p1=next_prime(5*10^100)
sage: p2=next_prime(3*10^100)
sage: p3=next_prime(10^100)
sage: p1
5000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
00000000000000000000000000000000000000000087
sage: p2
3000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
00000000000000000000000000000000000000000223
sage: p3
1000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
00000000000000000000000000000000000000000267
sage: a=p1*p2;b=p2*p3
sage: time gcd(a,b)
CPU times: user 0.00 s, sys: 0.00 s, total: 0.00 s
Wall time: 0.14 s
3000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
00000000000000000000000000000000000000000223
sage:
```

Zdá se, že s tím Sage nemá problémy. Kdybychom ale zkusil `b` rozložit na prvočísla, výsledku bychom se nedočkali, i když to, že `b` není prvočíslo se zjistí okamžitě:

```
sage: time is_prime(b)
CPU times: user 0.00 s, sys: 0.00 s, total: 0.00 s
Wall time: 0.00 s
False
sage:
```

1.2 Zbytkové třídy

Počítání a operace ve zbytkových třídách se objevuje jak v algebře tak i v teorii čísel. V Sage máme několik možností, jak výpočty zbytkové třídě modulo n provádět. Můžeme používat přímo funkci `mod`, nebo si definovat zbytkovou třídu jako objekt a pracovat s ní:

```
sage: x=mod(20,12)
sage: x
8
sage: x^10
4
sage: Z12=Integers(12)
sage: Z12
Ring of integers modulo 12
sage: y=Z12(20)
sage: y
8
sage: y^10
4
sage: x==y
True
sage:
```

Dostali jsme různým způsobem dva totožné objekty, což není v Sage nijak výjimečné. Výsledek funkce `mod` je prvek příslušné zbytkové třídy a dál se s ním tak pracuje.

Funkce `mod` samozřejmě je i v Matlabu, ale jak se dá čekat, výsledkem je číslo:

```
>> format longg
>> x=mod(20,12)
x =
     8
>> x^10
ans =
                1073741824
>> mod(ans,12)
ans =
     4
>>
```

Pokud tedy chceme v Matlabu provádět výpočty v rámci zbytkové třídy, musíme na výsledek operace opět aplikovat funkci `mod`. To ale někdy může být trochu problém, pokud je výsledek už příliš velký:

```
>> mod(2^55,12)
ans =
     8
>> mod(2^56,12)
ans =
     0
>>
```

Výsledek by měl být roven 4, ale 2^{56} už není v paměti uloženo přesně, takže operace `mod` s tak velkými a většími čísla dává nesprávné výsledky.

Můžeme si ale v Matlabu vytvořit vlastní funkce pro operace ve zbytkových třídách, které by dokázaly pracovat lépe. Se sčítáním asi nebude žádný problém a funkce se dá samozřejmě použít i na odečítání:

```
function c = plus_modulo(a,b,n)
%function c = plus_modulo(a,b,n)
%   scitani a+b modulo n

c=mod(a+b,n);

end
```

U násobení by mohl být výsledek překročit hranice přesnosti, proto funkci `mod` použijeme i na vstupní proměnné:

```
function c = krat_modulo(a,b,n)
%function c = krat_modulo(a,b,n)
%   nasobeni a*b modulo n

a1=mod(a,n);
b1=mod(b,n);
c=mod(a1*b1,n);

end
```

U mocniny využijeme algoritmus, který se běžně uvádí pro násobení, že totiž umocňujeme jenom na druhou a podle potřeby tuto mocninu násobíme s průběžným mezivýsledkem:

```
function c = mocnina_modulo(a,b,n)
%function c = mocnina_modulo(a,b,n)
%   mocnina a^b modulo n

if b<0, error('Zaporny exponent'); end
c=1;
z=mod(a,n);
while b>0
    if mod(b,2)
        c=mod(c*z,n);
    end
    b=floor(b/2);
    z=mod(z*z,n);
end

end
```

Tady u výpočtu druhé mocniny nemusíme mít strach, že výsledek by mohl být moc velký, protože funkci `mod` jsme použili v předchozím kroku. Funkce pak výpočty i s velkými exponenty zvládá bez problémů:

```
>> mocnina_modulo(2,56,12)
ans =
     4
>> mocnina_modulo(2,10000,12)
ans =
     4
>>
```

Aby náš výčet byl kompletní, vytvořme ještě funkci pro výpočet inverzního prvku modulo n. Při tom můžeme využít malou Fermatovu větu, která pro prvočíslo n dává

$$a^{n-1} \equiv 1 \quad (mod \quad n)$$

```
function c = inverze_modulo(a,n)
%function c = inverze_modulo(a,n)
%   inverzni privek 1/a modulo n
%   n musi byt prvocislo

if ~isprime(n)
 error('Modulo zaklad neni prvocislo');
end

c=mocnina_modulo(a,n-2,n);

end
```

Druhou možností je použít Eukleidův algoritmus pro dělení se zbytkem, který pro čísla a a b a jejich největší společný dělitel d dává čísla x, y, že platí

$$d = a \cdot x + b \cdot y.$$

Podle tohoto postupu můžeme inverzi a modulo n spočítat v případě, že a a n jsou nesoudělná. Při výpočtu můžeme využít funkci `gcd`, která může jako další výstupy vracet zmiňované hodnoty x a y:

```
function c = inverze_modulo2(a,n)
%function c = inverze_modulo2(a,n)
%   inverzni privek 1/a modulo n
```

```
%   a,n musi byt nesoudelna

[d,x,z]=gcd(a,n);

if d~=1
 error('soudelna cisla a,n');
end

c=mod(x,n);

end
```

1.3 PARI/GP

Pokud hovoříme o algoritmech teorie čísel, nezapoměňme na francozský software PARI/GP (viz `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`), který v této oblasti patří k nejlepším. Sage umí příkazy PARI/GP vyvolat. Ukážeme si jen základní použití a rozdíly mezi výsledky Sage a PARI/GP:

```
sage: 1./7
0.142857142857143
sage: gp(1./7)
0.14285714285714285000000000000000000000
sage: gp(sqrt(2))
1.4142135623730950488016887242096980786
sage: sqrt(2)
sqrt(2)
sage: factor(2^257-1)
535006138814359 * 1155685395246619182673033 *
374550598501810936581776630096313181393
sage: gp.factor(2^257-1)
[535006138814359, 1; 1155685395246619182673033, 1;
374550598501810936581776630096313181393, 1]
sage:
```

Kapitola 2

Algebraické výpočty

2.1 Zbytkové třídy

Sage umí pracovat se základními číselnými okruhy a tělesy:

```
sage: ZZ
Integer Ring
sage: QQ
Rational Field
sage: RR
Real Field with 53 bits of precision
sage: CC
Complex Field with 53 bits of precision
sage: Integers()
Integer Ring
sage: ZZ==Integers()
True
sage:
```

A ani vytvářet složitější struktury mu není cizí. O zbytkových třídách modulo n už tady byla řeč, podívejme se na ně trochu blíž:

```
sage: Z8=Integers(8)
sage: Z8
Ring of integers modulo 8
sage: Z8.list()
```

```
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
sage: Z8.addition_table()
+  a b c d e f g h
 +---------------
a| a b c d e f g h
b| b c d e f g h a
c| c d e f g h a b
d| d e f g h a b c
e| e f g h a b c d
f| f g h a b c d e
g| g h a b c d e f
h| h a b c d e f g

sage:
```

Vidíme, že prvky v tabulce sčítání jsou zobrazeny symbolicky, je samozřejmě možné způsob zobrazení nastavit. Taky si zobrazíme tabulku násobení

```
sage: Z8.addition_table(names='elements')
+  0 1 2 3 4 5 6 7
 +---------------
0| 0 1 2 3 4 5 6 7
1| 1 2 3 4 5 6 7 0
2| 2 3 4 5 6 7 0 1
3| 3 4 5 6 7 0 1 2
4| 4 5 6 7 0 1 2 3
5| 5 6 7 0 1 2 3 4
6| 6 7 0 1 2 3 4 5
7| 7 0 1 2 3 4 5 6

sage: Z8.multiplication_table(names='elements')
*  0 1 2 3 4 5 6 7
 +---------------
0| 0 0 0 0 0 0 0 0
1| 0 1 2 3 4 5 6 7
2| 0 2 4 6 0 2 4 6
3| 0 3 6 1 4 7 2 5
4| 0 4 0 4 0 4 0 4
```

```
5| 0 5 2 7 4 1 6 3
6| 0 6 4 2 0 6 4 2
7| 0 7 6 5 4 3 2 1

sage:
```

Na jednotlivé prvky se můžeme dostat pomocí jejich indexu:

```
sage: x=Z8(3);x
3
sage: y=Z8(11);y
3
sage: x==y
True
sage:
```

Taky se lze dotazovat na různé vlastnosti jednotlivých prvků:

```
sage: x.is_zero()
False
sage: x.is_one()
False
sage: x.is_unit()
True
sage:
```

Všechny invertibilní prvky tedy zjistíme příkazem

```
sage: [[a,a.is_unit()] for a in Z8]
[[0, False],
 [1, True],
 [2, False],
 [3, True],
 [4, False],
 [5, True],
 [6, False],
 [7, True]]
sage: Z7=Integers(7)
```

```
sage: [[a,a.is_unit()] for a in Z7]
[[0, False],
 [1, True],
 [2, True],
 [3, True],
 [4, True],
 [5, True],
 [6, True]]
sage:
```

Okruh zbytkových tříd lze také vytvořit jako podíl $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$:

```
sage: R8=ZZ.quotient(8)
sage: R8
Ring of integers modulo 8
sage: R8==Z8
True
sage:
```

Je také možné vytvořit aditivní grupu izomorfní zbytkové třídě modulo n vzhledem ke sčítání, jedná se ale o jiný objekt:

```
sage: R8=AdditiveAbelianGroup([8])
sage: R8
Additive abelian group isomorphic to Z/8
sage: R8.list()
[(0), (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7)]
sage: R8==Z8
False
sage:
```

2.2 Grupy permutací

V Sage se grupy permutací nazývají symetrické grupy a k jejich vytváření se používá příkazem `SymmetricGroup`:

```
sage: S3=SymmetricGroup(3);S3
Symmetric group of order 3! as a permutation group
```

```
sage: S3.list()
[(), (2,3), (1,2), (1,2,3), (1,3,2), (1,3)]
sage: S4=SymmetricGroup(4)
sage: S4.list()
[(),
 (3,4),
 (2,3),
 (2,3,4),
 (2,4,3),
 (2,4),
 (1,2),
 (1,2)(3,4),
 (1,2,3),
 (1,2,3,4),
 (1,2,4,3),
 (1,2,4),
 (1,3,2),
 (1,3,4,2),
 (1,3),
 (1,3,4),
 (1,3)(2,4),
 (1,3,2,4),
 (1,4,3,2),
 (1,4,2),
 (1,4,3),
 (1,4),
 (1,4,2,3),
 (1,4)(2,3)]
sage:
```

Jednotlivé prvky (permutace) jsou tedy vyjádřeny pomocí cyklů. Pokud chceme vybrat nějaký prvek, odkážeme se na něj pomocí permutace, tedy pořadí čísel $1,\ldots,n$:

```
sage: tau=S4([2,4,3,1]);tau
(1,2,4)
sage: tau.list()
[2, 4, 3, 1]
```

```
sage: [a.list() for a in S4]
[[1, 2, 3, 4],
 [1, 2, 4, 3],
 [1, 3, 2, 4],
 [1, 3, 4, 2],
 [1, 4, 2, 3],
 [1, 4, 3, 2],
 [2, 1, 3, 4],
 [2, 1, 4, 3],
 [2, 3, 1, 4],
 [2, 3, 4, 1],
 [2, 4, 1, 3],
 [2, 4, 3, 1],
 [3, 1, 2, 4],
 [3, 1, 4, 2],
 [3, 2, 1, 4],
 [3, 2, 4, 1],
 [3, 4, 1, 2],
 [3, 4, 2, 1],
 [4, 1, 2, 3],
 [4, 1, 3, 2],
 [4, 2, 1, 3],
 [4, 2, 3, 1],
 [4, 3, 1, 2],
 [4, 3, 2, 1]]
sage:
```

Tímto způsobem můžeme vyjádřit permutaci pomocí cyklů, případně naopak. Také můžeme permutace skládat a výsledek si vypisovat ve tvaru, který nám vyhovuje. Samozřejmě také můžeme určit inverzní permutaci:

```
sage: S4([3,2,4,1])
(1,3,4)
sage: S4((1,4,3))
(1,4,3)
sage: S4((1,4,3)).list()
[4, 2, 1, 3]
sage: p1=S4([2,4,1,3]);p1
```

```
(1,2,4,3)
sage: p2=S4([4,3,1,2]);p2
(1,4,2,3)
sage: p1*p2
(1,3,4)
sage: p2*p1
(1,3,2)
sage: p3=p2*p1;p3.list()
[3, 1, 2, 4]
sage: p1.inverse()
(1,3,4,2)
sage: p1.inverse().list()
[3, 1, 4, 2]
sage:
```

Na výpis tabulky operací pro grupu permutací slouží příkaz `cayley_table`, pookud jej ale použijeme bez dalších parametrů, je výsledek poněkud nepřehledný.

```
sage: S3.cayley_table()
*  a b c d e f
 +------------
a| a b c d e f
b| b a d c f e
c| c e a f b d
d| d f b e a c
e| e c f a d b
f| f d e b c a
```

Proto si jednotlivé permutace označíme symboly, abychom je snáze identifikovali.

```
sage: S3.list()
[(), (2,3), (1,2), (1,2,3), (1,3,2), (1,3)]
sage:
```

Máme tam dva cykly, ty označíme `c1` a `c2`. Pak jsou tam tři permutace, které prohodí mezi sebou dva prvky, ty označíme postupně `r1`, `r3` a `r2` podle toho, který prvek zůstává na místě. No a označení `id` ja doufám jasné.

```
sage: S3.cayley_table(names=['id','r1','r3',
'c1','c2','r2'])
 *  id r1 r3 c1 c2 r2
  +------------------
id| id r1 r3 c1 c2 r2
r1| r1 id c1 r3 r2 c2
r3| r3 c2 id r2 r1 c1
c1| c1 r2 r1 c2 id r3
c2| c2 r3 r2 id c1 r1
r2| r2 c1 c2 r1 r3 id

sage:
```

Z tabulky je například vidět, které prvky jsou inverzní ke kterým. Čtenář může popřemýšlet, jestli by se dalo podobným způsobem aspoň trochu zpřehlednit tabulku operací pro `S4`.

Poslední ukázkou z oblasti grup permutací budou kvaterniony. Jedná se o zobecnění komplexních čísel, kdy kromě imaginární jednotky i máme ještě dvě další j a k, přičemž platí

$$I^1 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j.$$

Kvaterniony tvoří nekomutativní těleso, záměnou pořadí násobení u posledních tří rovností se otočí znaménko výsledku.

Uvedené imaginární jednotky spolu s ± 1 a svými opačnými hodnotami tvoří multiplikativní grupu řádu 8, která je isomorfní podgrupě grupy permutací 8 prvků:

```
sage: Q=QuaternionGroup();Q
Quaternion group of order 8 as a permutation group
sage: Q.list()
[(),
 (1,2,3,4)(5,6,7,8),
 (1,3)(2,4)(5,7)(6,8),
 (1,4,3,2)(5,8,7,6),
 (1,5,3,7)(2,8,4,6),
 (1,6,3,8)(2,5,4,7),
 (1,7,3,5)(2,6,4,8),
```

```
 (1,8,3,6)(2,7,4,5)]
sage: [a.list() for a in Q]
[[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8],
 [2, 3, 4, 1, 6, 7, 8, 5],
 [3, 4, 1, 2, 7, 8, 5, 6],
 [4, 1, 2, 3, 8, 5, 6, 7],
 [5, 8, 7, 6, 3, 2, 1, 4],
 [6, 5, 8, 7, 4, 3, 2, 1],
 [7, 6, 5, 8, 1, 4, 3, 2],
 [8, 7, 6, 5, 2, 1, 4, 3]]
sage:
```

Zobrazíme si tabulku operací, přičemž jednotlivé prvky označíme symboly uvedených imaginárních jednotek:

```
sage: Q.cayley_table(names=['1','i','-1','-i',
'j','-k','-j','k'])
 *   1  i -1 -i  j -k -j  k
  +-----------------------
 1|  1  i -1 -i  j -k -j  k
 i|  i -1 -i  1  k  j -k -j
-1| -1 -i  1  i -j  k  j -k
-i| -i  1  i -1 -k -j  k  j
 j|  j -k -j  k -1 -i  1  i
-k| -k -j  k  j  i -1 -i  1
-j| -j  k  j -k  1  i -1 -i
 k|  k  j -k -j -i  1  i -1

sage:
```

Čtenář si může vyzkoušet, jestli přiřazení imaginárních jednotek jednotlivým permutacím je jednoznačně určeno, či zda snad jsou i jiné možnosti.

2.3 Polynomy

Také polynomy je možné v Sage definovat vícero způsoby.

```
sage: t=var('t')
sage: R = PolynomialRing(QQ, 't')
sage: S = QQ['t']
sage: S==R
True
sage: R2.<t>=QQ[]
sage: S2.<t>=PolynomialRing(QQ)
sage: R2==S2
True
sage: R2==R
True
sage:
```

S polynomy lze provádět různé operace:

```
sage: p1=(t+1)*(t+2);p1
t^2 + 3*t + 2
sage: p1^2
t^4 + 6*t^3 + 13*t^2 + 12*t + 4
sage: p1 in R
True
sage: p1.parent()
Univariate Polynomial Ring in t over Rational Field
sage: p1.is_irreducible()
False
sage: p1.factor()
(t + 1) * (t + 2)
sage: R.gen()
t
sage:
```

Dají se taktéž vytvářet polynomy nad zbytkovými třídami modulo n:

```
sage: R8.<x>=Integers(8)[];R8
Univariate Polynomial Ring in x over
Ring of integers modulo 8
sage: p2=x^3+4*x-5
```

```
sage: p2
x^3 + 4*x + 3
sage: p2^2
x^6 + 6*x^3 + 1
sage: p2 in R8
True
sage: [p2(a) for a in Integers(8)]
[3, 0, 3, 2, 3, 4, 3, 6]
sage:
```

Polynomy více proměnných taky nejsou problémem:

```
sage: S2.<x,y>=PolynomialRing(ZZ);S2
Multivariate Polynomial Ring in x, y over Integer Ring
sage: f=(x^3+2*y^2*x)^2
sage: g=x^2*y^2
sage: d0=f.gcd(g);d0
x^2
sage:
```

Kapitola 3

Kombinatorické a grafové algoritmy

3.1 Kombinatorika

O kombinatorice jsem se už zmiňovali vícekrát, ukážeme si tedy ještě alespoň několik příkladů s použitím Sage.

Začneme karetním příkladem, který možná ocení hráči pokeru:

```
sage: Barvy=Set(["srdce","kary","piky","krize"])
sage: Hodnoty=Set([2,3,4,5,6,7,8,9,10,"kluk","dama",
"kral","eso"])
sage: Karty=CartesianProduct(Hodnoty,Barvy)
sage: C5=Combinations(Karty,5)
sage: C5.cardinality()
2598960
sage: binomial(Karty.cardinality(),5)
2598960
sage: C5.random_element()
[[4, 'krize'], [5, 'piky'], [5, 'krize'], [7, 'kary'],
[7, 'krize']]
sage:
```

Dostali jsme dvě pětky a dvě sedmičky, to není špatné. Ještě zahodíme tu čtverku a zkusíme full house:

```
sage: Karty.random_element()
[8, 'srdce']
sage:
```

Tak dnes to nevyšlo, snad příště.

Jako další příklad si zkusíme konstrukci Pascalova trojúhelníku:

```
sage: [[binomial(n,i) for i in range(n+1)] for n in
range(12)]
[[1],
 [1, 1],
 [1, 2, 1],
 [1, 3, 3, 1],
 [1, 4, 6, 4, 1],
 [1, 5, 10, 10, 5, 1],
 [1, 6, 15, 20, 15, 6, 1],
 [1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1],
 [1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1],
 [1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1],
 [1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1],
 [1, 11, 55, 165, 330, 462, 462, 330, 165, 55, 11, 1]]
sage:
```

Nesmíme při tom zapomenout, že `range(n)` dává hodnoty od 0 do $n-1$.

Další kombinatorickou úlohou je rozklad přirozeného čísla na součty:

```
sage: Q=Partitions(6)
sage: Q
Partitions of the integer 6
sage: Q.cardinality()
11
sage: Q.list()
[[6],
 [5, 1],
 [4, 2],
 [4, 1, 1],
 [3, 3],
```

```
 [3, 2, 1],
 [3, 1, 1, 1],
 [2, 2, 2],
 [2, 2, 1, 1],
 [2, 1, 1, 1, 1],
 [1, 1, 1, 1, 1, 1]]
sage:
```

Podobně funguje funkce `Compositions`, u níž se ale bere v potaz i pořadí:

```
sage: Q1=Compositions(5);Q1
Compositions of 5
sage: Q1.cardinality()
16
sage: Q1.list()
[[1, 1, 1, 1, 1],
 [1, 1, 1, 2],
 [1, 1, 2, 1],
 [1, 1, 3],
 [1, 2, 1, 1],
 [1, 2, 2],
 [1, 3, 1],
 [1, 4],
 [2, 1, 1, 1],
 [2, 1, 2],
 [2, 2, 1],
 [2, 3],
 [3, 1, 1],
 [3, 2],
 [4, 1],
 [5]]
sage:
```

Dalším známým kombinatorickým problémem je nalezení všech možných přípustných uzávorkování n páry závorek, tedy laicky řečeno, pravé závorky nesmí převařovat nad levými. Počet všech možností dávají Catalanova čísla:

```
sage: for i in range(11): print catalan_number(i)
1
```

```
1
2
5
14
42
132
429
1430
4862
16796
sage:
```

Sage ale umí také najít všechna přípustná uzávorkování:

```
sage: D=DyckWords(3);D
Dyck words with 3 opening parentheses and 3 closing parentheses
sage: D.cardinality()
5
sage: D.list()
[[1, 0, 1, 0, 1, 0],
 [1, 0, 1, 1, 0, 0],
 [1, 1, 0, 0, 1, 0],
 [1, 1, 0, 1, 0, 0],
 [1, 1, 1, 0, 0, 0]]
sage:
```

Lepší možná bude zobrazení skutečně pomocí závorek:

```
sage: for i in D: print i
()()()
()(())
(())()
(()())
((()))
sage: D2=DyckWords(4)
sage: D2.cardinality()
14
sage: for i in D2: print i
```

```
()()()()
()()(())
()(())()
()(()())
()((()))
(())()()
(())(())
(()())()
(()()())
(()(()))
((()))()
((())())
(((())))
((((()))
sage:
```

Jako poslední příklad si ukážeme práci s abecedou:

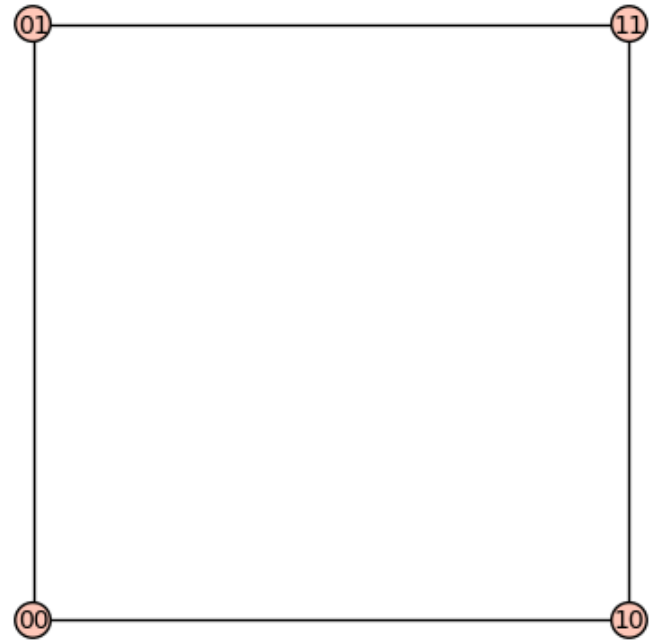
```
sage: W=Words("xy");W
Words over {'x', 'y'}
sage: W.cardinality()
+Infinity
sage: i1=iter(W)
sage: for k in range(20): print i1.next()

x
y
xx
xy
yx
yy
xxx
xxy
xyx
xyy
yxx
yxy
yyx
```

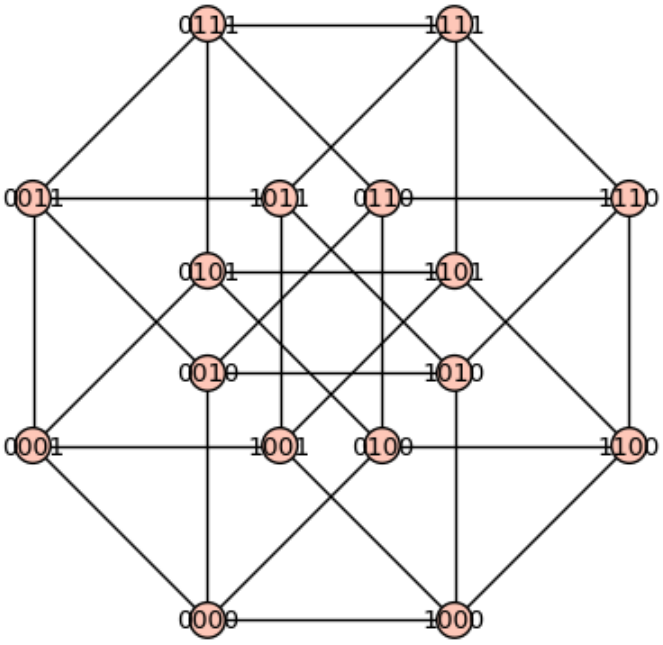
```
yyy
xxxx
xxxy
xxyx
xxyy
xyxx
sage:
```

3.2 Grafy

Ukážeme si, jak v Sage generovat některé základní grafy. Jako první to bude hyperkrychle v n dimenzích. Pro $n = 2$ dostaneme samozřejmě čtverec, pro $n = 4$ je to poněkud zajímavější.

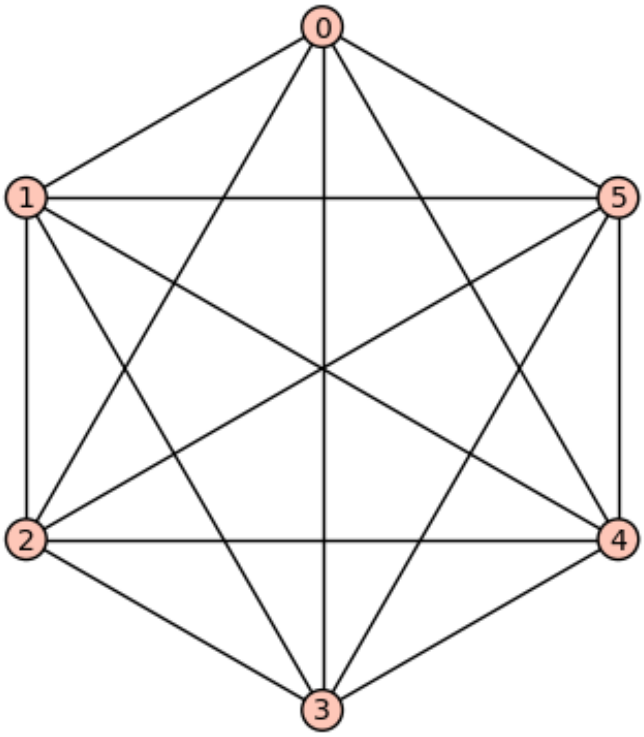
```
sage: C = graphs.CubeGraph(2);C
2-Cube: Graph on 4 vertices
sage: C.show()
sage: C = graphs.CubeGraph(4);C.show()
sage:
```

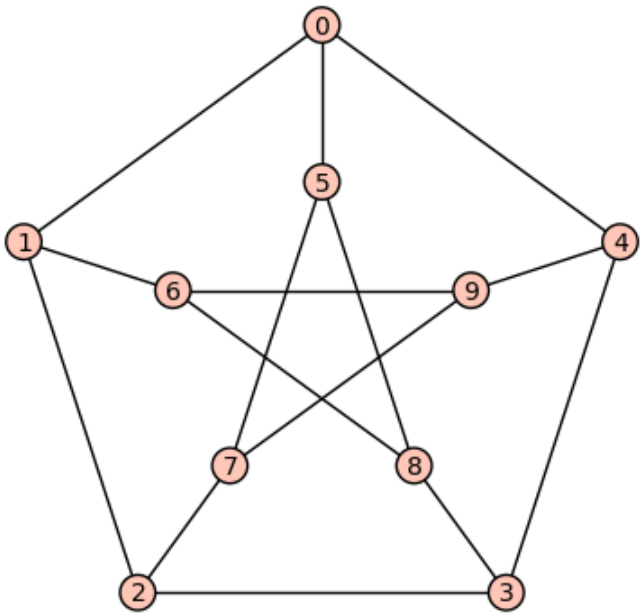




Důležitý je samozřejmě úplný graf či Petersenův graf:

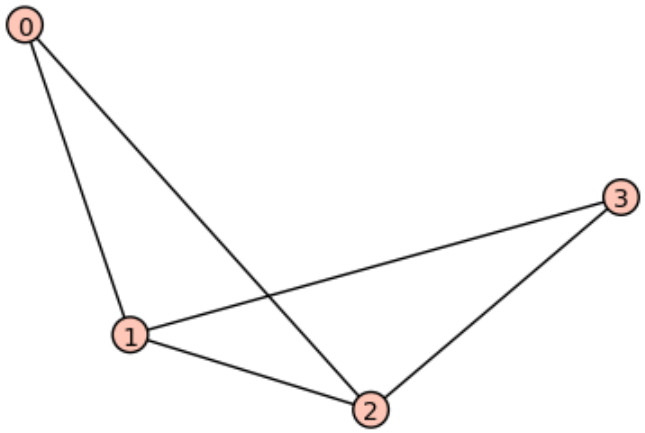
```
sage: graphs.CompleteGraph(6).show()
graphs.PetersenGraph().show()
sage:
```





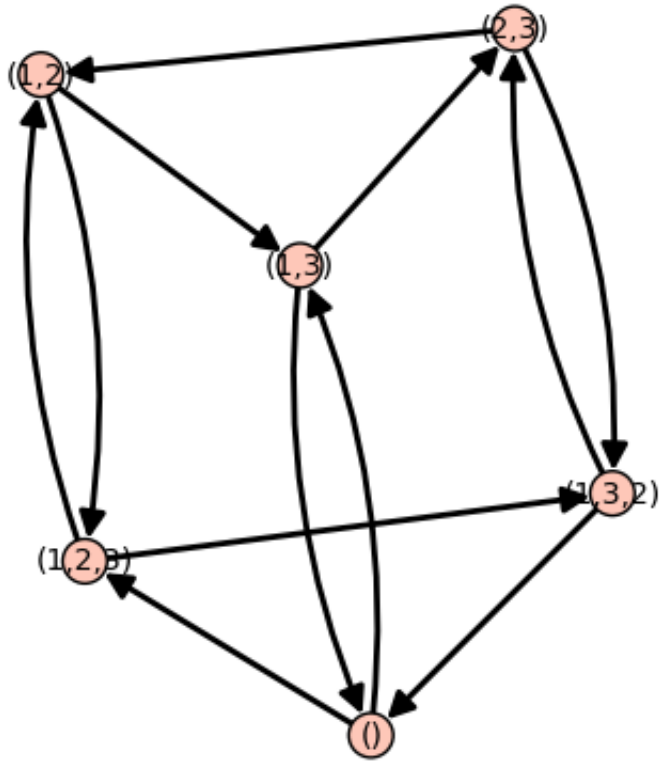
Grafově lze také reprezentovat matice, kdy 1 nebo 0 říkají v matici, zda uzly očíslované indexy řádků resp. sloupců, jsou nebo nejsou spojeny hranou. Přitom na hlavní diagonále musejí být nuly. Příslušné grafy často mohou pomoci například při faktorizaci matice.

```
sage: M1=Matrix([[0,1,1,0],[1,0,1,1],[1,1,0,1],[0,1,1,0]])
sage: M1
[0 1 1 0]
[1 0 1 1]
[1 1 0 1]
[0 1 1 0]
sage: G1=Graph(M1);G1.show()
sage:
```



A nesmíme zapomínat na orientované grafy, jako je třeba Cayleyho graf dané grupy:

```
sage: G = DihedralGroup(3)
sage: G
Dihedral group of order 6 as a permutation group
sage: G.list()
[(), (2,3), (1,2), (1,2,3), (1,3,2), (1,3)]
sage: G.cayley_graph()
Digraph on 6 vertices
sage: G.cayley_graph().show()
sage:
```


(2,3)
(1,2)
(1,3)
(1,3,2)
(1,2,3)
()