Zápočtové príklady - lineárne funkcionály

1. Overte, že nasledujúce zobrazenia sú spojité lineárne funkcionály na daných normovaných priestoroch a nájdite ich normy. Konštanty $p \in [1, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ sú dané a v priestore $\mathcal{C}[0,1]$ uvažujeme maximálnu normu, kým v priestore $\mathbb{R}^n$ uvažujeme odpovedajúcu p-normu.

   a)
   $$f(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\, u\left(\frac{1}{k}\right), \quad u \in \mathcal{C}[0,1];$$

   b)
   $$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_k, \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^1;$$

   c)
   $$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2. Nech X je daný normovaný priestor a X' je jeho duálny priestor. Dokážte, že platí
   $$\|x\|_X = \max\left\{|f(x)|,\ f \in X',\ \|f\|_{X'} \le 1\right\}.$$

3. Nájdite v priestoroch l^∞ a $\mathcal{C}[0,1]$ (s maximálnou normou) postupnosti, ktoré sú slabo konvergentné, ale nie sú konvergentné silno, t.j., v norme.

4. Nech X je daný normovaný priestor a X' je jeho duálny priestor. Dokážte, že ak postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ konverguje slabo k vektoru $x \in X$ a postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ konverguje v norme k funkcionálu $f \in X'$, potom číselná postupnosť $\{f_k(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje s limitou $f(x)$.

5. Ukážte, že postupnosť funkcionálov $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ z Príkladu 29 v prednáške Lineárne funkcionály nie je cauchyovská v norme duálneho priestoru. Ako pomocný krok odvoďte nerovnosť
   $$\|f_m - f_n\| \ge 1 - \frac{2}{n}\,\|y_m\|_{\mathcal{C}}, \quad m, n \in \mathbb{N},\ n > m.$$

6. Nech $\{e^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť daná $e^{[n]} := \{\delta_{kn}\}_{k=1}^{\infty}$ pre $n \in \mathbb{N}$ (δ_{ij} je Kroneckerov symbol). Zistite, či táto postupnosť je slabo konvergentná v l^2. Ak áno, nájdite jej slabú limitu v l^2.

7. Nech je daná číselná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a postupnosť funkcionálov $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq (l^\infty)'$ na priestore l^∞ s predpismi $f_n(x) := a_n x_n$, $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^\infty$, pre každé $n \in \mathbb{N}$. Overte, že sa skutočne jedná o postupnosť spojitých lineárnych funkcionálov na l^∞ a stanovte ich normy. Ďalej dokážte, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje $*$-slabo v duálnom priestore $(l^\infty)'$ práve vtedy, keď postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$, t.j., $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. V tomto prípade nájdite príslušnú $*$-slabú limitu postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $(l^\infty)'$. Je táto konvergencia aj silná?