Zápočtové príklady - lineárne priestory

1. Nech $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineárny priestor a $A \subsetneq X$ vlastný (uzavretý) podpriestor. Dokážte, že ak A má konečnú dimenziu, potom existuje jednotkový vektor $x \in X$ tak, že $\rho(x, A) = 1$.

2. Dokážte, že množina
$$A = \left\{ \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq l^1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0 \right\}$$
je uzavretý lineárny podpriestor v normovanom priestore l^1.

3. Ukážte, že suprémová norma v priestore l^∞ nie je generovaná žiadnym skalárnym súčinom.

4. Dokážte, že zobrazenie $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{C}^1[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definované predpisom
$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} [f(t)\, g(t) + f'(t)\, g'(t)]\, \mathrm{d}t, \quad f, g \in \mathcal{C}^1[-\pi, \pi],$$
je (reálny) skalárny súčin na lineárnom priestore $\mathcal{C}^1[-\pi, \pi]$. Určte vzdialenosť funkcie $f(t) = t$ od podpriestoru $\mathrm{Lin}\{\sin t\}$ v metrike indukovanej týmto skalárnym súčinom.

5. Nech X je komplexný lineárny priestor, t.j., vektorový priestor nad telesom $\mathbb{C}$. Uvažujme nejaký (komplexný) skalárny súčin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na X a nech $\|\cdot\|$ je odpovedajúca norma na X indukovaná týmto skalárnym súčinom. Overte, že platí

   a) formula
   $$\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} + \mathrm{i} \cdot \frac{\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \|x-\mathrm{i}y\|^2}{4}, \quad x, y \in X;$$

   b) Cauchyho–Schwarzova–Buňakovského nerovnosť
   $$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad x, y \in X;$$

   c) rovnobežníkové pravidlo
   $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \quad x, y \in X.$$

6. Nájdite ortogonálny doplnok lineárneho podpriestoru
$$A = \left\{ \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq l^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} = 0 \right\}$$
v Hilbertovom priestore l^2. Je podpriestor A uzavretý v l^2?