

## Zápočtové příklady - metrické priestory

1. Nech  $M = \{\{x_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}\}$ . Overte, že zobrazenie  $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  definované

$$\rho(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}, \quad x, y \in M,$$

je metrika na množine  $M$ . Dokážte, že metrický priestor  $(M, \rho)$  je úplný.

2. V daných metrických priestoroch uveďte príklad postupnosti, ktorá je ohraničená, ale nemá žiadny hromadný bod v danom priestore (vzhľadom na príslušnú metriku).

- priestor spojitéch funkcií  $\mathcal{C}[0, 1]$  s maximálnou metriku;
- priestory  $l^p$ ,  $p \in [1, \infty)$ , s odpovedajúcimi  $p$ -metrikami.

3. Dokážte, že množina

$$A = \left\{ \{x_k\}_{k=1}^\infty \subseteq l^\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} kx_k = 0 \right\}$$

nie je uzavretá v priestore  $l^\infty$ .

4. Ukážte, že nasledujúce metrické priestory nie sú úplné a nájdite ich úplné obaly.

- a) Priestor

$$M = \{f \in \mathcal{C}[0, 1], \text{ existuje } \varepsilon_f \in (0, 1) \text{ tak, že } f \equiv 0 \text{ na } [0, \varepsilon_f]\}$$

s maximálnou metriku.

- b) Priestor

$$M = \{\{x_k\}_{k=1}^\infty \subseteq l^\infty, \quad x_k \neq 0 \text{ iba pre konečne veľa indexov } k \in \mathbb{N}\}$$

so suprémovou metriku.

5. Dokážte nasledujúce tvrdenia.

- a) Množina

$$A = \left\{ f \in \mathcal{C}^1[0, 1], \quad \max_{t \in [0, 1]} |f(t)| \leq 1, \quad \max_{t \in [0, 1]} |f'(t)| \leq 1 \right\}$$

nie je kompaktná v priestore  $\mathcal{C}[0, 1]$  s maximálnou metriku.

- b) Množina

$$A = \{\{x_k\}_{k=1}^\infty \subseteq l^2, \quad |x_k| \leq 1/k, \quad k \in \mathbb{N}\}$$

je kompaktná v priestore  $l^2$ .