M6201 Příklady - nulkliny a fázové portréty

Lenka Přibylová
pribylova@math.muni.cz

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

22. února 2020

Příklad

Najděte rovnováhy systému, vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= x(1-x^2)-y.\end{aligned}$$

Příklad

Najděte rovnováhy systému, vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= x(1-x^2)-y.\end{aligned}$$

Řešení:

Rovnováha splňuje $y=0$ a $x=0$ nebo $x=\pm 1$. Jsou tedy tři: $[0,0]$, $[1,0]$ a $[-1,0]$.

Příklad

Najděte rovnováhy systému, vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(1-x^2) - y. \end{aligned}$$

Řešení:

Rovnováha splňuje $y = 0$ a $x = 0$ nebo $x = \pm 1$. Jsou tedy tři: $[0, 0]$, $[1, 0]$ a $[-1, 0]$.

Jacobiho matice je tvaru $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & -1 \end{pmatrix}$.

Příklad

Najděte rovnováhy systému, vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(1-x^2) - y. \end{aligned}$$

Řešení:

Rovnováha splňuje $y = 0$ a $x = 0$ nebo $x = \pm 1$. Jsou tedy tři: $[0,0]$, $[1,0]$ a $[-1,0]$.

Jacobiho matice je tvaru $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & -1 \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a protože $\det \boldsymbol{J}([0,0]) = -1 < 0$, je bod $[0,0]$ sedlo.

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= x(1 - x^2) - y.
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & -1 \end{pmatrix}
$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= x(1-x^2)-y.\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{J}([\pm 1, 0]) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ a protože $\det \boldsymbol{J}([\pm 1, 0]) = 2 > 0$ a $\operatorname{tr} \boldsymbol{J}([\pm 1, 0]) = -1 < 0$ jsou oba body $[\pm 1, 0]$ stabilní.

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= x(1-x^2) - y.
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & -1 \end{pmatrix}
$$

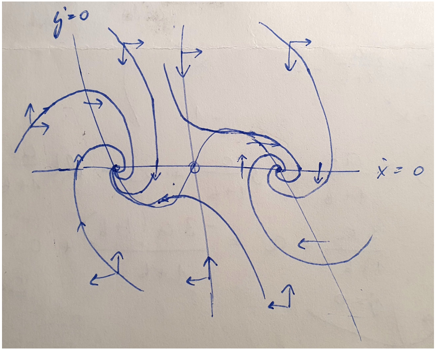
$\boldsymbol{J}([\pm 1, 0]) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ a protože $\det \boldsymbol{J}([\pm 1, 0]) = 2 > 0$ a $\operatorname{tr} \boldsymbol{J}([\pm 1, 0]) = -1 < 0$ jsou oba body $[\pm 1, 0]$ stabilní. Protože $(\operatorname{tr} \boldsymbol{J}([\pm 1, 0]))^2 - 4 \det \boldsymbol{J}([\pm 1, 0]) < 0$, jde o stabilní ohniska.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(1 - x^2) - y. \end{aligned}$$

Fázový portrét nakreslíme s pomocí nulklin: $\dot{x} = 0 \iff y = 0$ a x klesá v bodech pod osou x a roste nad ní,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= x(1-x^2)-y.\end{aligned}$$

Fázový portrét nakreslíme s pomocí nulklin: $\dot{x}=0 \iff y=0$ a x klesá v bodech pod osou x a roste nad ní, $\dot{y}=0 \iff y=x(1-x^2)$ a y klesá v bodech nad touto kubickou parabolou a roste pod ní.



Příklad

Najděte rovnováhy systému, vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(y + x^2 - 4), \\ \dot{y} &= 3x^2 - y. \end{aligned}$$

Příklad

Najděte rovnováhy systému, vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(y + x^2 - 4),\\ \dot{y} &= 3x^2 - y.\end{aligned}$$

Řešení:

Rovnováha splňuje $x = 0$ a $y = 0$ nebo $y = 4 - x^2$, což implikuje $x^2 = 1$. Jsou tedy tři: $[0, 0]$, $[1, 3]$ a $[-1, 3]$.

Příklad

Najděte rovnováhy systému, vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= x(y + x^2 - 4), \\
\dot{y} &= 3x^2 - y.
\end{aligned}
$$

Řešení:

Rovnováha splňuje $x = 0$ a $y = 0$ nebo $y = 4 - x^2$, což implikuje $x^2 = 1$. Jsou tedy tři: $[0, 0]$, $[1, 3]$ a $[-1, 3]$.

Jacobiho matice je tvaru $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} y + 3x^2 - 4 & x \\ 6x & -1 \end{pmatrix}$.

Příklad

Najděte rovnováhy systému, vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(y + x^2 - 4), \\ \dot{y} &= 3x^2 - y. \end{aligned}$$

Řešení:

Rovnováha splňuje $x = 0$ a $y = 0$ nebo $y = 4 - x^2$, což implikuje $x^2 = 1$. Jsou tedy tři: $[0, 0]$, $[1, 3]$ a $[-1, 3]$.

Jacobiho matice je tvaru $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} y + 3x^2 - 4 & x \\ 6x & -1 \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, bod $[0, 0]$ stabilní uzel.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(y + x^2 - 4),\\ \dot{y} &= 3x^2 - y.\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} y + 3x^2 - 4 & x \\ 6x & -1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= x(y + x^2 - 4),\\
\dot{y} &= 3x^2 - y.
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} y + 3x^2 - 4 & x \\ 6x & -1 \end{pmatrix}
$$

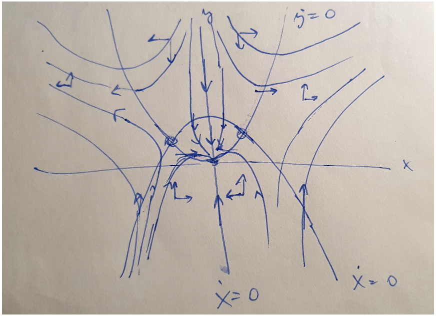
$\boldsymbol{J}([\pm 1, 3]) = \begin{pmatrix} 2 & \pm 1 \\ \pm 6 & -1 \end{pmatrix}$ a protože $\det \boldsymbol{J}([\pm 1, 3]) = -8 < 0$ jsou oba body $[\pm 1, 3]$ sedla.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(y + x^2 - 4),\\ \dot{y} &= 3x^2 - y.\end{aligned}$$

Fázový portrét nakreslíme s pomocí nulklin: $\dot{x} = 0 \iff x = 0$ nebo $y = 4 - x^2$, x roste resp. klesá podle znamének v jednotlivých oblastech oddělených těmito křivkami,

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= x(y + x^2 - 4), \\
\dot{y} &= 3x^2 - y.
\end{aligned}
$$

Fázový portrét nakreslíme s pomocí nulklin: $\dot{x} = 0 \iff x = 0$ nebo $y = 4 - x^2$, x roste resp. klesá podle znamének v jednotlivých oblastech oddělených těmito křivkami, $\dot{y} = 0 \iff y = 3x^2$ a y klesá v bodech nad touto parabolou a roste pod ní.



Příklad

Najděte rovnováhy systému v 1. kvadrantu ($x \geq 0$, $y \geq 0$), vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(y + x^2 - a), \\ \dot{y} &= bx^2 - y, \end{aligned}$$

kde $a > 0$ a $b > 0$ jsou parametry.

Příklad

Najděte rovnováhy systému v 1. kvadrantu ($x \geq 0$, $y \geq 0$), vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(y + x^2 - a), \\ \dot{y} &= bx^2 - y, \end{aligned}$$

kde $a > 0$ a $b > 0$ jsou parametry.

Řešení:

Rovnováha splňuje $x = 0$ a $y = 0$ nebo $y = a - x^2$, což implikuje $x^2 = \frac{a}{b+1}$. Jsou tedy dvě: $[0, 0]$ a $[x^*, y^*] = [\sqrt{\frac{a}{b+1}}, \frac{ab}{b+1}]$.

Příklad

Najděte rovnováhy systému v 1. kvadrantu ($x \geq 0$, $y \geq 0$), vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(y + x^2 - a), \\ \dot{y} &= bx^2 - y, \end{aligned}$$

kde $a > 0$ a $b > 0$ jsou parametry.

Řešení:
Rovnováha splňuje $x = 0$ a $y = 0$ nebo $y = a - x^2$, což implikuje $x^2 = \frac{a}{b+1}$. Jsou tedy dvě: $[0, 0]$ a $[x^*, y^*] = \left[\sqrt{\frac{a}{b+1}}, \frac{ab}{b+1}\right]$.
Jacobiho matice je tvaru $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} y + 3x^2 - a & x \\ 2bx & -1 \end{pmatrix}$.

Příklad

Najděte rovnováhy systému v 1. kvadrantu ($x \geq 0$, $y \geq 0$), vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(y + x^2 - a), \\ \dot{y} &= bx^2 - y, \end{aligned}$$

kde $a > 0$ a $b > 0$ jsou parametry.

Řešení:

Rovnováha splňuje $x = 0$ a $y = 0$ nebo $y = a - x^2$, což implikuje $x^2 = \frac{a}{b+1}$. Jsou tedy dvě: $[0,0]$ a $[x^*, y^*] = [\sqrt{\frac{a}{b+1}}, \frac{ab}{b+1}]$.

Jacobiho matice je tvaru $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} y + 3x^2 - a & x \\ 2bx & -1 \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{J}(0,0) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, bod $[0,0]$ stabilní uzel.

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= x(y + x^2 - a), \\
\dot{y} &= bx^2 - y.
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} y + 3x^2 - a & x \\ 2bx & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= x(y + x^2 - a), \\
\dot{y} &= bx^2 - y.
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} y + 3x^2 - a & x \\ 2bx & -1 \end{pmatrix}
$$

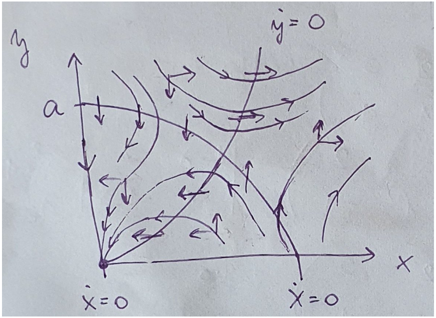
$\boldsymbol{J}([x^*, y^*]) = \begin{pmatrix} 2(x^*)^2 & x^* \\ 2bx^* & -1 \end{pmatrix}$ a protože
$\det \boldsymbol{J}([x^*, y^*]) = -2(x^*)^2 - 2b(x^*)^2 < 0$ je bod $[x^*, y^*]$ sedlo.

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= x(y + x^2 - a), \\
\dot{y} &= bx^2 - y.
\end{aligned}
$$

Fázový portrét nakreslíme s pomocí nulklin: $\dot{x} = 0 \iff x = 0$ nebo $y = a - x^2$, x roste resp. klesá podle znamének v jednotlivých oblastech oddělených těmito křivkami,

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= x(y + x^2 - a), \\
\dot{y} &= bx^2 - y.
\end{aligned}
$$

Fázový portrét nakreslíme s pomocí nulklin: $\dot{x} = 0 \iff x = 0$ nebo $y = a - x^2$, x roste resp. klesá podle znamének v jednotlivých oblastech oddělených těmito křivkami, $\dot{y} = 0 \iff y = bx^2$ a y klesá v bodech nad touto parabolou a roste pod ní.



Příklad

Najděte rovnováhy systému, vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y - 2,\\ \dot{y} &= x + y^2 - 2.\end{aligned}$$

Příklad

Najděte rovnováhy systému, vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 + x - y,\\ \dot{y} &= 2x - y.\end{aligned}$$

Příklad

Najděte rovnováhy systému, vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(4-2x-y),\\ \dot{y} &= y(7-x-3y).\end{aligned}$$

Příklad

Najděte rovnováhy systému, vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x - y + 2), \\ \dot{y} &= y - x^2. \end{aligned}$$

Příklad

Najděte rovnováhy systému, vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - y^3 - ax,\\ \dot{y} &= x - y - xy.\end{aligned}$$

Příklad

Najděte rovnováhy systému, vyšetřete jejich stabilitu a typ a nakreslete nulkliny a fázový portrét systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - x - ay), \\ \dot{y} &= y(1 - bx - y). \end{aligned}$$