M6201 Příklady - fold bifurkace

Lenka Přibylová
pribylova@math.muni.cz

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

7. března 2020

Příklad

Nalezněte limitní body (body fold bifurkace) parametrické rovnice

$$\dot{x} = 1 + \alpha x - x^3, \quad x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ověřte podmínky nedegenerovanosti a transverzality fold bifurkace. Podle znaménka $f_\alpha(x^*, \alpha^*)$ a $f_{xx}(x^*, \alpha^*)$ klasifikujte limitní bod. Nakreslete bifurkační diagram.

Rovnováha splňuje $1 + \alpha x - x^3 = 0$, mohou být tedy až tři.

Rovnováha splňuje $1 + \alpha x - x^3 = 0$, mohou být tedy až tři. Limitní bod větve rovnováh splňuje $\alpha - 3x^2 = 0$. Protože rovnováha nemůže být nulová, je tato rovnice ekvivalentní rovnici $\alpha x - 3x^3 = 0$.

Rovnováha splňuje $1 + \alpha x - x^3 = 0$, mohou být tedy až tři. Limitní bod větve rovnováh splňuje $\alpha - 3x^2 = 0$. Protože rovnováha nemůže být nulová, je tato rovnice ekvivalentní rovnici $\alpha x - 3x^3 = 0$. Odečtením

$$\begin{aligned} 1 + \alpha x - x^3 &= 0, \\ \alpha x - 3x^3 &= 0 \end{aligned}$$

dostáváme $1 + 2x^3 = 0$, tedy $x^* = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx -0,8$ pro kritickou hodnotu $\alpha^* = 3(\frac{1}{2})^{2/3} \approx 1,9$.

Rovnováha splňuje $1 + \alpha x - x^3 = 0$, mohou být tedy až tři. Limitní bod větve rovnováh splňuje $\alpha - 3x^2 = 0$. Protože rovnováha nemůže být nulová, je tato rovnice ekvivalentní rovnici $\alpha x - 3x^3 = 0$. Odečtením

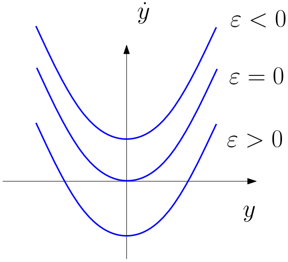
$$\begin{aligned} 1 + \alpha x - x^3 &= 0, \\ \alpha x - 3x^3 &= 0 \end{aligned}$$

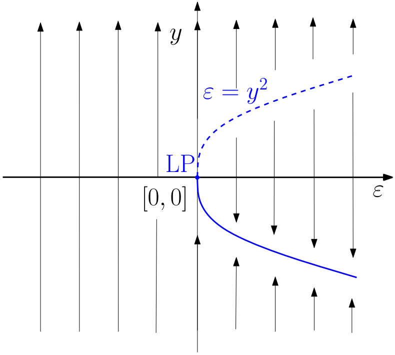
dostáváme $1 + 2x^3 = 0$, tedy $x^* = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx -0,8$ pro kritickou hodnotu $\alpha^* = 3(\frac{1}{2})^{2/3} \approx 1,9$. Podmínka nedegenerovanosti je $f_{xx}(x^*, \alpha^*) = -6x^* > 0$ a podmínka transversality je $f_\alpha(x^*, \alpha^*) = x^* < 0$.

V okolí fold bifurkace bude tedy dynamika rovnice lokálně topologicky ekvivalentní rovnici

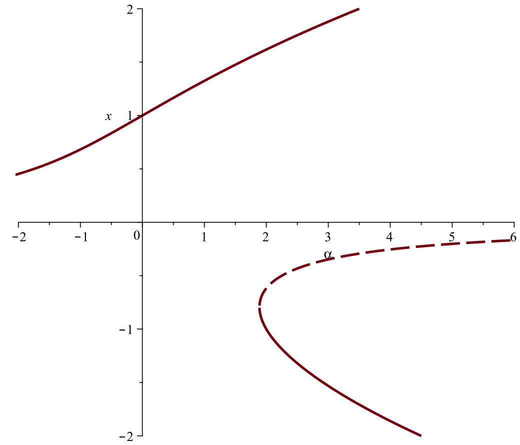
$$\dot{y} = -\varepsilon + y^2,$$

jejíž bifurkační diagram je





Pokud zakreslíme větve rovnováh v závislosti na parametru α, (můžeme udělat průběh funkce $\alpha = \frac{x^3-1}{x}$), dostaneme



Vidíme limitní bod $[1,9\,,-0,8]$. Spodní větev rovnováh je podle věty o normální formě fold bifurkace stabilní, ohýbá se do nestabilní větve uprostřed. Grobmanova–Hartmanova nebo Ljapunovova věta

Příklad

Nalezněte limitní body (body fold bifurkace) parametrické rovnice

$$\dot{x} = \alpha + 3x - x^3, \quad x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ověřte podmínky nedegenerovanosti a transverzality fold bifurkace. Podle znaménka $f_\alpha(x^*, \alpha^*)$ a $f_{xx}(x^*, \alpha^*)$ klasifikujte limitní bod. Nakreslete bifurkační diagram.

Příklad

Ukažte, že v parametrickém systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y + 1 \\ \dot{y} &= y^2 - 2x - \varepsilon \end{aligned}$$

dochází k bifurkaci sedlo-uzel, najděte kritickou hodnotu parametru ε a nakreslete bifurkační diagram.

Příklad

Ukažte, že v parametrickém systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y + 1 \\ \dot{y} &= y^2 - 2x - \varepsilon \end{aligned}$$

dochází k bifurkaci sedlo-uzel, najděte kritickou hodnotu parametru ε *a nakreslete bifurkační diagram.*

Řešení:
Rovnováha splňuje $y^2 - 2(y-1) - \varepsilon = 0$, tj. $y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}$

Příklad

Ukažte, že v parametrickém systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y + 1 \\ \dot{y} &= y^2 - 2x - \varepsilon \end{aligned}$$

dochází k bifurkaci sedlo-uzel, najděte kritickou hodnotu parametru ε *a nakreslete bifurkační diagram.*

Řešení:
Rovnováha splňuje $y^2 - 2(y-1) - \varepsilon = 0$, tj. $y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}$

pro $\varepsilon_0 = 1$ je rovnováha $[0, 1]$ limitní,
pro $\varepsilon < 1$ rovnovážné body nejsou
pro $\varepsilon > 1$ jsou dvě rovnováhy $[\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}]$.

Jacobiho matice má tvar $D\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2y \end{pmatrix}$,

Jacobiho matice má tvar $\boldsymbol{Df}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2y \end{pmatrix}$,
v rovnováhách $[\pm\sqrt{\varepsilon-1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon-1}]$ tedy platí
$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{Df}(\pm\sqrt{\varepsilon-1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2(1 \pm \sqrt{\varepsilon-1}) \end{pmatrix}$.

Jacobiho matice má tvar $D\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2y \end{pmatrix}$,
v rovnováhách $[\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}]$ tedy platí
$$\boldsymbol{J} = D\boldsymbol{f}(\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2(1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}) \end{pmatrix}.$$

$$\det \boldsymbol{J} = \pm 2\sqrt{\varepsilon - 1} = \lambda_1 \lambda_2$$

Jacobiho matice má tvar $D\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2y \end{pmatrix}$,
v rovnováhách $[\pm\sqrt{\varepsilon-1}, 1\pm\sqrt{\varepsilon-1}]$ tedy platí

$$\boldsymbol{J} = D\boldsymbol{f}(\pm\sqrt{\varepsilon-1}, 1\pm\sqrt{\varepsilon-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2(1\pm\sqrt{\varepsilon-1}) \end{pmatrix}.$$

$\det \boldsymbol{J} = \pm 2\sqrt{\varepsilon-1} = \lambda_1\lambda_2$
$\operatorname{tr} \boldsymbol{J} = 3 \pm 2\sqrt{\varepsilon-1} = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ pro $\varepsilon > 1$ v okolí 1.

Jacobiho matice má tvar $D\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2y \end{pmatrix}$,
v rovnováhách $[\pm\sqrt{\varepsilon-1}, 1\pm\sqrt{\varepsilon-1}]$ tedy platí
$\boldsymbol{J} = D\boldsymbol{f}(\pm\sqrt{\varepsilon-1}, 1\pm\sqrt{\varepsilon-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2(1\pm\sqrt{\varepsilon-1}) \end{pmatrix}$.

$\det\boldsymbol{J} = \pm 2\sqrt{\varepsilon-1} = \lambda_1\lambda_2$
$\operatorname{tr}\boldsymbol{J} = 3 \pm 2\sqrt{\varepsilon-1} = \lambda_1+\lambda_2 > 0$ pro $\varepsilon > 1$ v okolí 1.

Bod $[\sqrt{\varepsilon-1}, 1+\sqrt{\varepsilon-1}]$ je tedy nestabilní uzel
a bod $[-\sqrt{\varepsilon-1}, 1-\sqrt{\varepsilon-1}]$ sedlo.

Jacobiho matice má tvar $D\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2y \end{pmatrix}$,
v rovnováhách $[\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}]$ tedy platí

$$\boldsymbol{J} = D\boldsymbol{f}(\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2(1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}) \end{pmatrix}.$$

$\det \boldsymbol{J} = \pm 2\sqrt{\varepsilon - 1} = \lambda_1 \lambda_2$
$\operatorname{tr} \boldsymbol{J} = 3 \pm 2\sqrt{\varepsilon - 1} = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ pro $\varepsilon > 1$ v okolí 1.

Bod $[\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 + \sqrt{\varepsilon - 1}]$ je tedy nestabilní uzel
a bod $[-\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 - \sqrt{\varepsilon - 1}]$ sedlo.

V kritické hodnotě parametru $\varepsilon_0 = 1$ dochází k bifurkaci typu sedlo-uzel.

Příklad

Výpočtem na papíře, analyticky v programu Maple a numericky v MatContu nalezněte bod limitní bod systému

$$
\begin{aligned}
x' &= y \\
y' &= -a - x + x^2 - xy.
\end{aligned}
$$

Nalezněte vlastní čísla v limitním bodě (x^*, y^*, a^*) *a ukažte, že determinant Jacobiho matice zadaného systému je v limitním bodě nulový. Zkoumejte fázové portréty v programu XPPAUT.*